

# 45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

## Решения задач осеннего тура

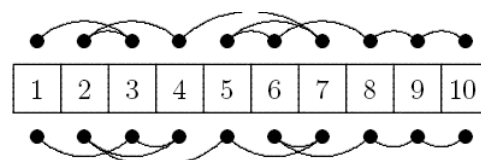
### Базовый вариант

### Младшие классы

1. [4] На асфальте нарисована полоса  $1 \times 10$  для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

*Алексей Толыго*

**Ответ:** не обязательно. **Решение.** На рисунке проход Ани указан над полосой, а проход Вари – под полосой.

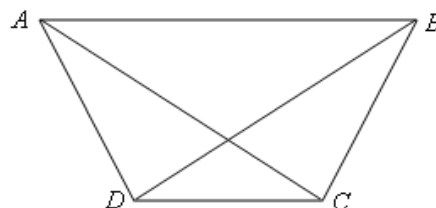


**Замечание.** Разумеется, есть и другие примеры: скажем, Аня могла прыгать в порядке 1-6-3-7-5-9-8-4-2-10, а Варя – в порядке 1-6-9-5-3-7-8-4-2-10.

2. [4] Четырёхугольник  $ABCD$  выпуклый, его стороны  $AB$  и  $CD$  параллельны. Известно, что углы  $DAC$  и  $ABD$  равны, а также углы  $CAB$  и  $DBC$  равны. Обязательно ли  $ABCD$  – квадрат?

*Александр Тертерян*

**Ответ:** не обязательно. **Решение.** Пусть  $A, D, C, B$  – последовательные вершины правильного шестиугольника. Тогда  $ABCD$  – равнобедренная трапеция (половина правильного шестиугольника), и все упомянутые в условии углы равны  $30^\circ$ .



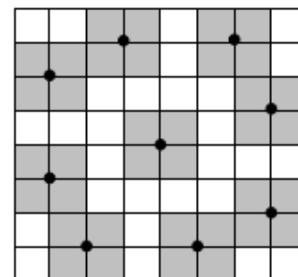
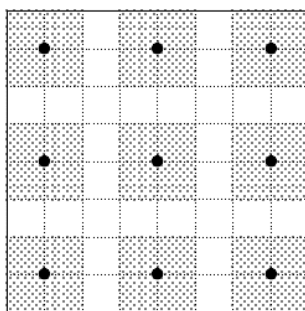
**Замечание:** четырёхугольник из условия может быть любой равнобедренной трапецией, у которой одно из оснований равно боковой стороне, или квадратом. Других вариантов нет.

3. [5] У восьми фермеров есть клетчатое поле  $8 \times 8$ , огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы

между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

*Татьяна Казыцына*

**Ответ:** может. **Решение.** Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке слева. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат  $2 \times 2$  с центром в этой точке. Поэтому никакие две утащенные вороной ягоды не могут лежать внутри одного участка – ведь участок имеет площадь 8 клеток и состоял бы тогда ровно из двух таких квадратов, а они не образуют многоугольник.



**Замечание.** Возможен и пример, аналогичный примеру из решения задачи 5 старших классов (рисунок справа).

4. [5] По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

*Сергей Дворянинов*

**Ответ:** не может. **Решение.** Рассмотрим любые два соседних числа, пусть  $a$  – меньшее из них. Тогда большее равно либо  $2a$ , либо  $5a$ , и вместе с меньшим оно даёт либо  $3a$ , либо  $6a$ . Значит, сумма любых двух соседних чисел кратна 3. Далее можно рассуждать по-разному.

**1-й способ.** Найдём для каждого числа сумму его и следующего за ним по часовой стрелке, и все эти суммы сложим. Получим, что удвоенная сумма всех чисел кратна 3. Значит, она не может равняться 4046.

**2-й способ.** Найдём для каждого числа его отношение к следующему за ним по часовой стрелке. Каждое такое отношение равно одному из чисел  $2$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $5$ ,  $\frac{1}{5}$ , а произведение всех таких отношений равно 1. Значит, двоек среди этих отношений столько же, сколько и чисел  $\frac{1}{2}$ , а пятёрок – столько же, сколько чисел  $\frac{1}{5}$  (по основной теореме арифметики). Тогда общее количество чисел чётно и их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3.

**3-й способ.** Если общее количество чисел чётно, то их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3. Если общее количество чисел нечётно, то выберем любое число  $x$  из них, а остальные разобьём на пары соседних с суммой, кратной 3. Получим, что  $x$  имеет такой же остаток от деления на 3, что и общая сумма 2023, то есть остаток 1. Но в качестве  $x$  можно взять

любое из чисел, поэтому все они имеют остаток 1 от деления на 3. Тогда сумма двух соседних имеет остаток 2 от деления на 3, а должна делиться на 3 – противоречие.

5. [5] Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

*Николай Чернятьев*

**Ответ:** Вася. **Решение.** Назовём башенку *белой*, если её нижний и верхний кубики белые, и *бело-чёрной*, если её нижний кубик белый, а верхний чёрный. Аналогично определяются чёрная и чёрно-белая башенки. В начале игры имеется 50 белых и 50 чёрных башенок. Петя из белой и чёрной башенок соберёт *разноцветную* (чёрно-белую или бело-чёрную). В любом случае Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеивает белую башенку. В результате остаются по 49 белых и чёрных башенок. Далее Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после своего хода две белые и две чёрные башенки. Петя своим ходом снова соберёт разноцветную башенку. Теперь Вася из оставшихся белой и чёрной башенок соберёт противоположную башенку (чёрно-белую, если Петя собрал бело-чёрную), и у Пети не будет хода.

### Старшие классы

1. [3] Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  лишь то, что многочлен  $P(x) + P(-x)$  имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно  $n$ , утверждает, что может определить один из коэффициентов  $a_n, \dots, a_1, a_0$  (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?

*Борис Френкин*

**Ответ:** не ошибается. **Решение.** Отметим действительные корни многочлена  $P(x) + P(-x)$  на координатной прямой. Поскольку  $P(x) + P(-x)$  – чётная функция, отмеченные корни симметричны относительно нуля. Так как их нечётное количество, один из этих корней равен нулю. Тогда  $2a_0 = P(0) + P(-0) = 0$ , откуда  $a_0 = 0$ .

**Замечание:** никакой другой коэффициент не определён условием однозначно.

2. [4] На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?

*Александр Юран*

**Ответ:** не обязательно.

**1-е решение.** *Контрпример.* Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя –  $\frac{1}{8}$  оборота, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на  $\frac{3}{8}$  оборота против часовой стрелки.

Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (то есть условия выполнены). Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, то есть все их встречи происходят через *чётное* число часов после «утра», и значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через *нечётное* число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

**2-е решение.** Пусть угловые скорости короткой, средней и длинной стрелок равны соответственно  $\alpha$ ,  $\alpha + \beta$  и  $\alpha + \gamma$  градусов в час (нам удобны именно эти обозначения, ведь  $\beta$  и  $\gamma$  окажутся относительными скоростями стрелок). Назовём утреннее направление короткой стрелки (совпадающее с направлением длинной) начальным. Пусть средняя в этот момент отстояла от начального направления на угол  $\delta$  градусов по часовой стрелке.

Тогда через  $t$  часов после начального момента короткая стрелка отстоит от начального направления на  $\alpha t$  градусов, средняя – на  $(\alpha + \beta)t + \delta$  градусов, длинная – на  $(\alpha + \gamma)t$  градусов.

Чтобы через 3 часа длинная и средняя стрелки совпали, достаточно выполнения равенства  $3(\alpha + \gamma) = 3(\alpha + \beta) + \delta$ , или, что то же самое,  $\delta = 3(\gamma - \beta)$ .

Аналогично, чтобы ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки совпали, достаточно того, чтобы  $7\alpha = 7(\alpha + \beta) + \delta$ , то есть,  $\delta = -7\beta$ .

Итого, для выполнения условия задачи достаточно выполнения равенств  $\beta = -\frac{\delta}{7}$ ,  $\gamma = \frac{10\delta}{21}$ .

Докажем, что при иррациональном  $\delta$  все три стрелки никогда не встретятся. Предположим противное. Чтобы три стрелки когда-нибудь встретились, необходимо и достаточно существования положительного вещественного числа  $T$ , для которого попарные разности чисел  $((\alpha + \beta)T + \delta) - \alpha T$ , и  $(\alpha + \gamma)T - \alpha T$  оказались целыми числами, кратными 360. Иными словами, числа  $\delta + \beta T$  и  $\gamma T$  целые и кратны 360.

Подставим значения  $\beta$  и  $\gamma$ . Получим, что для некоторого  $T$  будут целыми числа  $\delta(1 - \frac{T}{7})$  и  $\delta(\frac{10T}{21})$ . Отсюда отношение  $\frac{\delta(1 - \frac{T}{7})}{\delta(\frac{10T}{21})} = \frac{21}{10} \cdot \frac{1}{T} - \frac{3}{10}$  рационально. Но тогда и  $T$  рационально!

Отсюда иррационально число  $\delta(1 - \frac{T}{7})$  как произведение рационального и иррационального. Но оно должно быть целым. Противоречие.

**3-е решение.** Пусть  $p$  и  $q$  – произвольные различные действительные числа. Пусть «утром» длинная и короткая стрелки стартуют из одного положения и идут со скоростями  $p$  и  $q$  оборотов в час соответственно. Далее эти стрелки совпадают в точности в те

моменты, когда более быстрая из них прошла на целое число оборотов больше, чем другая. Так как множество целых положительных чисел счётно, то и таких моментов счётно, а значит, множество положений в которых эти стрелки совпадают не более чем счётно (в случае, когда  $p/q$  рационально, этих положений конечное количество). Тогда пусть средняя стрелка неподвижно стоит в положении отличном от всех вышеописанных.

Теперь умножим скорости всех стрелок на одно и тоже положительное число (положения встреч длинной и коротких стрелок не поменяются) так, чтобы через  $q$  часов после «утра» длинная заняла положение средней. Тогда через  $p$  часов после «утра» короткая займёт это положение (отношение скоростей не поменялось). Теперь увеличим скорости всех стрелок на одно и то же положительное число, скорости станут ненулевыми, а даты встреч соответствующих стрелок не изменятся (в частности, не появится одновременной встречи всех стрелок). В частности, при  $p = 7, q = 3$  получаем в точности ситуацию, описанную в условии.

3. [4] Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра – какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на  $2^{100}$ ?

*Павел Кожевников*

**Ответ:**  $3^{100}$  чисел. **Решение.** Докажем по индукции, что есть ровно  $3^n$  хороших  $n$ -значных чисел (кратных  $2^n$  и составленных из указанных цифр). База ( $n = 1$ ) очевидна.

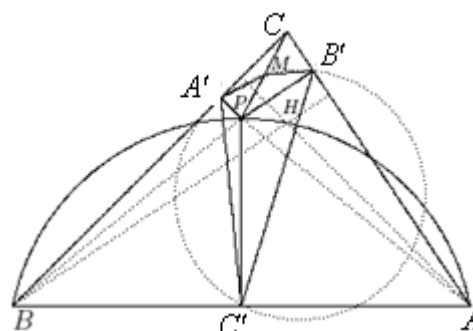
*Шаг индукции.* Если у хорошего  $(n+1)$ -значного числа стереть первую цифру, получится хорошее  $n$ -значное число (поскольку, стирая цифру  $x$ , мы вычитаем из числа, кратного  $2^{n+1}$ , число  $x10^n$ , кратное  $2^n$ ).

С другой стороны, хорошее  $n$ -значное число имеет вид  $y2^n$ . Приписывая к нему цифру  $x$ , мы добавляем число  $(x5^n)2^n$ , и сумма будет делиться на  $2^{n+1}$  тогда и только тогда, когда число  $y + x5^n$  чётно, то есть, когда  $x+y$  чётно. Видно, что для чётных  $y$  в качестве  $x$  подходят в точности чётные цифры 2, 4, 6, а для нечётного  $y$  – в точности нечётные цифры 3, 5, 7. Значит, хороших  $(n+1)$ -значных чисел в 3 раза больше, чем хороших  $n$ -значных.

4. [5] Высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Пусть  $P$  – произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника  $ABC$ , лежащая на описанной окружности треугольника  $ABH$ , и  $A', B', C'$  – проекции точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $A'B'C'$  проходит через середину отрезка  $CP$ .

*Алексей Заславский*

**Решение.** Пусть  $M$  – середина  $CP$ . Точки  $A'$  и  $B'$  лежат на окружности с диаметром  $CP$  и центром в  $M$ , а вписанный в эту окружность угол  $A'CB'$  острый, поэтому  $\angle AMB' = 2\angle BSA$  и  $M$  лежит от прямой  $AB'$  по ту же сторону, что и  $C$ . Так как  $P$  лежит внутри остроугольного треугольника, её проекции  $A', B', C'$  лежат внутри сторон, тогда четырёхугольники  $ABPC'$  и  $BA'PC'$  вписанные.



Используя равенства вписанных углов, имеем:

$$180^\circ - \angle A'CB' = \angle ACB + \angle BCA = \angle BPA' + \angle APB' = 360^\circ - \angle APB - \angle A'PB' = \\ = (180^\circ - \angle AHB) + (180^\circ - \angle A'PB') = \angle C + \angle C = 2\angle BCA, \text{ откуда } \angle AMB' + \angle A'CB' = 180^\circ, \\ \text{то есть точки } A', M', B', C' \text{ лежат на одной окружности, что и требовалось.}$$

**Замечание:** Утверждение задачи остаётся верным для всякого треугольника  $ABC$ , в котором углы при вершинах  $A$  и  $B$  не прямые, и для произвольной точки  $P$ , лежащей на описанной окружности треугольника  $ABH$  и отличной от вершин треугольника  $ABC$ .

5. [6] У девяти фермеров есть клетчатое поле  $9 \times 9$ , огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

*Татьяна Казыцина*

**Ответ:** может. **Решение.** Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат  $2 \times 2$  с центром в этой точке. Если участок содержит две утащенные вороной ягоды, он, кроме соответствующих квадратов  $2 \times 2$ , содержит тогда ещё ровно одну клетку (так как площадь участка равна 9). Но тогда эти квадраты  $2 \times 2$  соприкасаются (иначе одной клетки не хватит, чтобы получить связный участок). В этом случае образуется примыкающий к углу поля изолированный участок, «отсечённый» этими двумя квадратами, в котором будет одна или две клетки, что невозможно (площади всех участков равны 9).

