СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, март 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Найдите наибольшее натуральное число n со свойством: для каждого простого числа p, большего 2 и меньшего n, разность $n - p$ также является простым числом.

Игорь Акулич

7 2. Докажите, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера. (У копии соответственные углы равны исходным, а соответственные стороны — в два раза меньше исходных.)

Александр Юран

7 3. Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

4. В белом клетчатом квадрате 100×100 закрашено чёрным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток — *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

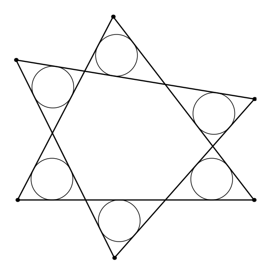
5 а) Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали и по вертикали.

5 б) Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали — средняя и по вертикали?

Борис Френкин

10 5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

Андрей Кушнир



10 6. Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны весить одинаково, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной — имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может весить только меньше стандартной золотой, бронзовая — только больше стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по весу от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

Александр Грибалко

12 7. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, и дано простое число p. Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p - 1$.

Николай Белухов

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, март 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 — 1. Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, …, $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

2. В прямоугольной системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график функции $y = f(x)$. Затем ось ординат и все отметки на оси абсцисс стёрли. Предложите способ, как с помощью карандаша, циркуля и линейки восстановить ось ординат, если

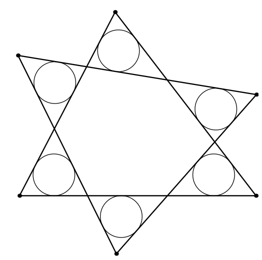
4 — а) $f(x) = 3^x$;

4 — б) $f(x) = \log_a x$, где $a > 1$ — неизвестное число.

Михаил Евдокимов

8 — 3. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

Андрей Кушнир



8 — 4. По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причём каждый её ход был на соседнюю по стороне клетку. Клетки занумерованы целыми числами от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — наибольшая разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение M?

Борис Френкин

8 — 5. Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0, 1)$?

Алексей Канель-Белов

8 — 6. Султан собрал 300 мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

Александр Грибалко

7. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, пролетев путь длиной

6 — а) не более $14a$;

6 — б) не более $13a$?

Михаил Евдокимов