СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 6 марта 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3 1. Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один — медленно, другой — быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше — быстрого хозяина или медленного?

Александр Рубин

4 2. Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

Сергей Дориченко

5 3. На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Александр Грибалко

5 4. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P. Пусть H — точка пересечения высот треугольника APD, M — середина AD и N — середина CD. Докажите, что прямые PN и MH взаимно перпендикулярны.

Иван Кухарчук

6 5. Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

Алексей Глебов

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 6 марта 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Натуральное число умножили на 5, результат снова умножили на 5 и так далее, всего сделали k умножений. Оказалось, что в десятичной записи исходного числа и полученных k чисел нет цифры 7. Докажите, что существует натуральное число, которое можно k раз умножить на 2, и снова ни в одном числе не будет цифры 7 в его десятичной записи. *Александр Грибалко*
4	2. На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь? *Александр Грибалко*
5	3. Пусть n — натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *интересной*, если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно одно из равенств $a_i = i$ или $a_i = i + 1$. Назовем интересную последовательность *чётной*, если сумма её членов чётна, и *нечётной* — иначе. Для каждой нечётной интересной последовательности нашли произведение её чисел и записали его на первый листок. Для каждой чётной — сделали то же самое и записали на второй листок. На каком листке сумма чисел больше и на сколько? (Дайте ответ в зависимости от n.) *Алексей Глебов*
5	4. Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети? *Алексей Глебов*
6	5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O. Описанная окружность треугольника AOC пересекает вторично прямые AB, BC, CD и DA в точках M, N, K и L соответственно. Докажите, что прямые MN, KL и касательные, проведённые к ω в точках A и C, касаются одной окружности. *Азамат Марданов*