СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

РЕШЕНИЯ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [4]. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: может.

Решение. Например, $(8!-4)+(8!-3)+\ldots+8!+\ldots+(8!+4)=9\cdot 8!=9!$.

Замечание. См. также задачу 3 базового варианта старших классов.

2 [4]. В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, а также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Жюри

Ответ: не обязательно.

Решение. Например, нетрудно проверить, что в треугольнике с углами $\angle A=40^\circ$, $\angle B=80^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 10°, а в треугольнике с углами $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 15°.

Замечание. Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3 [4]. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

Жюри

Ответ: может.

Решение 1. Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который ещё не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар 1001, 1005 и 1002, 1004. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «лёгкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжёлой» паре — так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвёртым взвешиванием.

Решение 2. Сначала положим на чаши по две гири.

1) Одна из чаш перевесила. Тогда гири разбиваются на две пары: лёгкую и тяжёлую. Есть два варианта: лёгкая пара — гири 1001, 1002, тяжелая — 1004, 1005 или лёгкая пара — 1001, 1004, тяжёлая — 1002, 1005. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более тяжелую гирю лёгкой пары с более лёгкой гирей тяжёлой пары, узнаем, какой из вариантов имеет место.

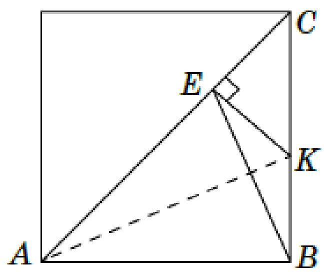
2) Весы в равновесии. Тогда гири разбиваются на две пары равного веса: 1001, 1005 и 1002, 1004. Вторым и третьим взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более лёгкие гири пар, узнаём, какая пара какая.

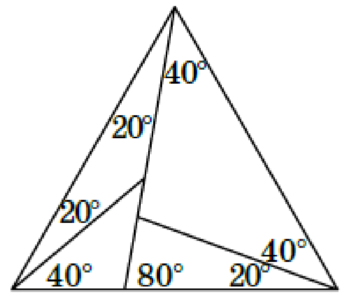
4. а) [3] Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?
б) [3] А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

Владимир Расторгуев

Ответы: можно в обоих пунктах.

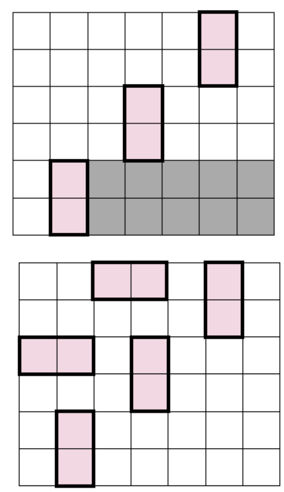
Решение. См. рисунки. На левом рисунке сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.





5. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры
а) [2] 100×101 клеток;
б) [4] 100×100 клеток?

Николай Чернятьев



а) Ответ: не всегда.

Решение. На рисунке справа вверху показано расположение доминошек на доске 6×7, которое не позволяет пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю. Действительно, попасть в (серую) область правее самой нижней доминошки нельзя, поскольку сначала мы должны подняться выше первой доминошки, и тогда мы уже выше серой полосы (а вниз ходить нельзя). Далее, нельзя попасть в аналогичную серую область правее следующей доминошки и т.д. Эта конструкция обобщается на любую доску размера $2n \times (2n+1)$.

Замечание. Для упрощения доказательства можно было бы добавить ещё горизонтальные доминошки над вертикальными, чтобы оставался единственный путь по доске, упирающийся в итоге в последнюю вертикальную доминошку (рисунок справа внизу).

б) Ответ: всегда.

Решение. Начальная и конечная клетки лежат на главной диагонали доски и имеют «координаты» $(1,1)$ и $(100,100)$. Докажем, что в любую свободную клетку этой диагонали можно попасть.

Действительно, пусть мы дошли до клетки (n,n). Если клетка $(n+1,n+1)$ свободна, то хоть одна из клеток $(n,n+1)$ и $(n+1,n)$ не занята и через неё можно пройти на клетку $(n+1,n+1)$.

Если же клетка $(n+1,n+1)$ занята, то из её соседей занята ровно одна клетка, причём по стороне, поэтому один из двух путей из (n,n) в $(n+2,n+2)$ не закрыт.

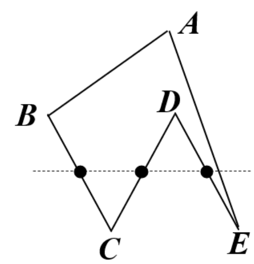
10 – 11 классы

1. а) [2] Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой?
б) [2] Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.

Александр Грибалко

Ответы: а) не могут; **б)** могут.

Решение. Ясно, что проведено ровно две диагонали, причём они выходят из одной вершины (пусть из A). Тогда указанные точки пересечения медиан получаются гомотетией с центром A и коэффициентом $2/3$ из середин сторон BC, CD и DE.



а) Эти середины сторон не могут лежать на одной прямой, так как прямая, не содержащая сторону выпуклого многоугольника, может пересечь его границу не более чем в двух точках.

б) Эти середины сторон могут лежать на одной прямой, как показано на рисунке справа.

2. а) [2] У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)
б) [2] Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Алексей Толпыго

а) Ответ: не может.

Решение. Как бы Таня ни помещала гири на весы, равновесия они никогда не покажут. Поэтому каждое взвешивание делит множество подозрительных перестановок не более чем на две части. Вначале было 24 подозрительных перестановки, после первого взвешивания при «неудачном» исходе их останется не меньше 12, после второго — не меньше 6, …, после четвёртого — не меньше 2.

б) Ответ: может.

Решение 1. Сначала положим на чаши по две гири. В результате гири разбиваются на две пары: лёгкую и тяжёлую (если весы показали равновесие, то, как мы знаем, более тяжёлая группа — на левой чаше). Есть три варианта: лёгкая пара — гири 1000, 1002, тяжёлая — 1004, 1005; лёгкая пара — 1000, 1004, тяжёлая — 1002, 1005; лёгкая пара — 1000, 1005, тяжёлая — 1002, 1004. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием сравним более тяжёлые гири обеих пар, положив на левую чашу гирю из тяжёлой пары. В первом варианте перевесит левая чаша, в третьем — правая, а во втором весы покажут равновесие (на левой чаша 1005, на правой — 1004).

Решение 2. Положим гирю A на левую чашу, а гирю B — на правую. Если равновесия нет, более тяжёлую гирю кладём на левую чашу и вторым взвешиванием сравниваем с C. Если снова нет равновесия, опять более тяжёлую гирю кладём на левую чашу и третьим взвешиванием сравниваем с D. У нас в запасе осталось одно взвешивание.

Если равновесие хоть раз было, более тяжёлая гиря в этом взвешивании весит 1005 г, другая — 1004 г, а две оставшиеся гири определяются ещё одним взвешиванием.

Если равновесия ни разу не было, мы заведомо нашли самую тяжёлую гирю (1005 г). Разберём случаи, какая это гиря, и покажем, что в каждом из них мы уже знаем также гирю 1004 г (тогда оставшиеся две гири мы различим четвёртым взвешиванием).

1) Это A. Она все три взвешивания была на левой чаше, значит, один раз весы показали бы «равновесие», а этот случай разобран.

2) Это B. Она дважды была на левой чаше, поэтому 1004 г может весить только A.

3) Это C. Тогда 1004 г весит гиря, «проигравшая» C при втором взвешивании (так как она более тяжёлая из A и B, а D не может весить 1004 г).

4) Это D. Тогда 1004 г весит самая тяжёлая гиря из трёх оставшихся (она определилась при втором взвешивании).

3. [5] При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: при нечётных n.

Решение. Произведение n последовательных целых чисел делится на n, значит, и равная ей сумма целых чисел делится на n. Поэтому среднее арифметическое этих чисел — целое число. Значит, n нечётно. Вот пример для $n = 2m+1$: $((2m)! - m) + ((2m)! - m + 1) + \ldots + ((2m)! + m) = (2m+1) \cdot (2m)! = n!$.

4. [5] Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней? ($[x^2]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2.)

Алексей Толпыго

Ответ: может.

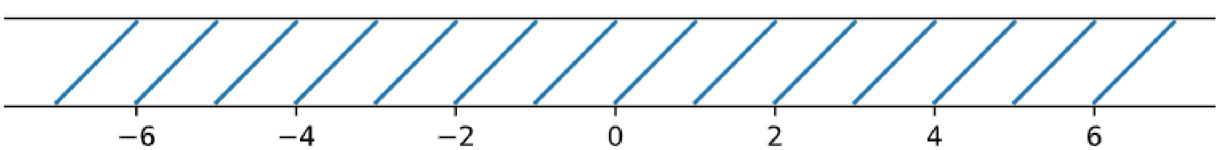
Решение. Рассмотрим, например, уравнение $[x^2] - 100x + 2500 = 0$. Оно имеет 199 корней вида $50 + \frac{k}{100}$ (где $k = -99, -98, \ldots, 99$). Действительно,

$$\left[\left(50 + \frac{k}{100}\right)^2\right] = \left[2500 + k + \left(\frac{k}{100}\right)^2\right] = 2500 + k = 100 \cdot \left(50 + \frac{k}{100}\right) - 2500.$$

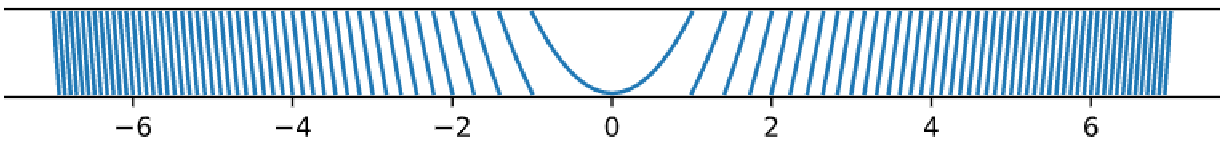
Идеология. Прямая $y = 100x - 2500$ касается параболы $y = x^2$ в точке $(50, 2500)$.

Замечание. Поясним неформально, как можно было придумать решение задачи.

Поскольку $[x^2] = x^2 - \{x^2\}$, исходное уравнение можно переписать в виде $x^2 + px + q = \{x^2\}$. Будем решать его графически: искать пересечения графиков параболы и дробной части квадрата. График дробной части $y = \{x\}$ представляет собой ряд равномерно идущих наклонных полуинтервалов:



Аналогично, график $y = \{x^2\}$ состоит из кусочков параболы: мы разрезаем параболу $y = x^2$ горизонтальными прямыми вида $y = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, на кусочки и каждый кусочек параллельно сдвигаем вниз к оси абсцисс. Но эти кусочки идут уже не равномерно, а «чем дальше от нуля, тем всё чаще» (ведь при стремлении x к бесконечности ордината возрастает на 1 при увеличении x на всё меньшее (стремящееся к 0) число:

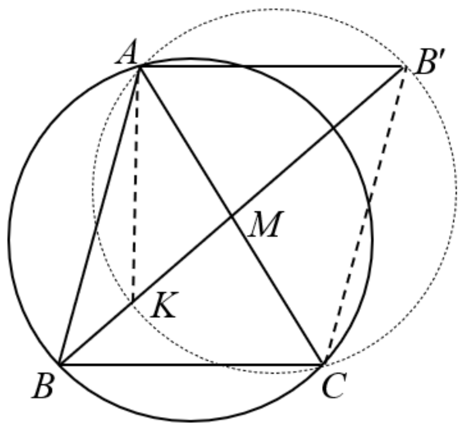


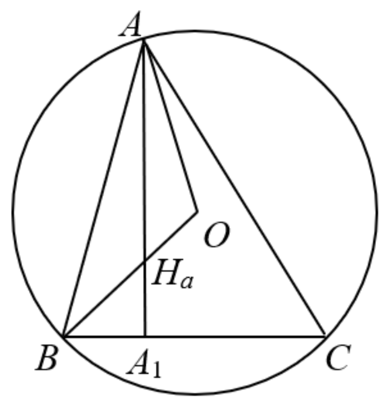
Но тогда любое уравнение вида $(x-a)^2 = \{x^2\}$ с достаточно большим а годится: в окрестности своей вершины парабола $y = (x-a)^2$ пересечёт много кусочков графика $y = \{x^2\}$.

5. [6] Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка M — середина стороны AC. Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой BM.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно точки M, а описанная окружность треугольника ACB' пересекает медиану BM в точке K. Тогда внешний угол AKB' треугольника AKB равен $\angle ACB' = \angle A$ (см. далее рисунок слева). Но и внешний угол BH_aA_1 треугольника AH_aB равен $\angle BAA_1 + \angle ABO = 90^\circ - \angle B + 90^\circ - \angle C = \angle A$ (см. далее рисунок справа). Поэтому $\angle AKB = \angle AH_aB$, то есть точка K лежит на описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BH_cC.

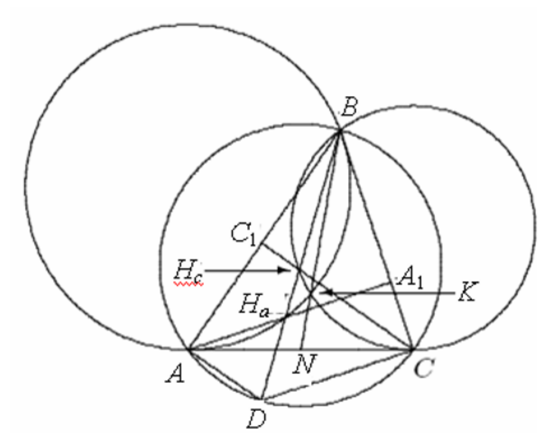




Решение 2. Пусть BD — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle ADB = \angle C$, имеем:

$$\angle CAH_a = \angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle ADB = \angle ABH_a.$$

Следовательно, сторона AC касается описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она касается описанной окружности треугольника BH_cC. Как известно, радикальная ось BK этих двух окружностей проходит через середину M отрезка AC их общей касательной.



СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] Число $2021 = 43 \cdot 47$ составное. Докажите, что если вписать в числе 2021 сколько угодно восьмёрок между 20 и 21, тоже получится составное число.

Михаил Евдокимов

Решение. Разность двух таких чисел, в которых число восьмёрок различается на 1, имеет вид $1880\ldots0$. Но $188 = 47 \cdot 4$, то есть делится на 47, как и 2021. Поэтому, добавляя восьмёрки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 47.

2. [5] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

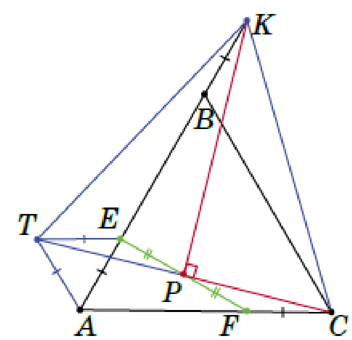
Решение. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на k кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

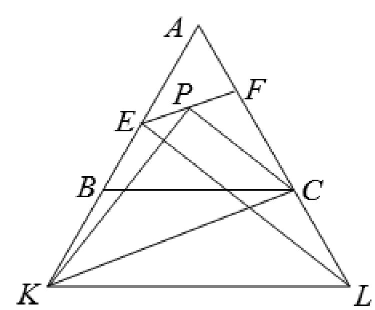
Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

3. [6] Треугольник ABC равносторонний. На сторонах AB и AC выбрали точки E и F, а на продолжении стороны AB — точку K так, что $AE = CF = BK$. Точка P — середина EF. Докажите, что угол KPC прямой.

Владимир Расторгуев



Решение 1. На продолжении отрезка CP за точку P отметим такую точку T, что $CP = PT$. Тогда $FCET$ — параллелограмм, откуда TE равно и параллельно FC. Но тогда треугольники TEK и KBC равны по первому признаку: тупые углы у них равны 120° и соответствующие стороны при этих углах равны. Следовательно, треугольник TKC равнобедренный и его медиана KP является высотой.



Решение 2. Построим равносторонний треугольник AKL. Ясно, что PC — средняя линия треугольника EFL. Треугольники EKL и CAK равны ($KL = AK$, $EK = AC$, $\angle EKL = \angle CAK$). Значит, $CK = EL = 2PC$. Треугольники EAL и CLK также равны, поэтому $\angle ELA = \angle CKL$. Следовательно, $KCP = 60^\circ - \angle PCA + \angle BCK = 60^\circ - \angle ELA + \angle CKL = 60^\circ$ (мы использовали, что $PC \parallel EL$ и $BC \parallel KL$). Но тогда KPC — половина равностороннего треугольника, откуда угол KPC прямой.

4. [7] Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой — уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?

Александр Грибалко

Ответ: всегда.

Решение 1. Выберем любого аборигена — будем называть его Петей, — и покажем, как найти его возраст. Мысленно наденем на каждого второго аборигена шапку, начиная с Пети. Занумеруем аборигенов без шапок, идущих за Петей по часовой стрелке: 1, 2, ..., 24, 25.

Заметим, что каждый абориген верно сообщает сумму возрастов своих соседей (если сложить названные аборигеном числа). Сложим числа, названные 1-м, 3-м, ..., 25-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *плюс* возраст Пети. Сложим числа, названные 2-м, 4-м, ..., 24-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *минус* возраст Пети. Вычтя из первой суммы вторую и поделив на 2, получим возраст Пети.

Зная возраст любого аборигена, легко узнать, кто его соседи, по их ответам.

Решение 2. Для удобства будем считать, что в круге стоят через одного 25 мужчин и 25 женщин. Покажем, как различить мужчин (женщины определяются аналогично). Заметим, что два высказывания о возрасте одной женщины отличаются на 1 тогда и только тогда, когда ее соседи – рыцарь и лжец. Поэтому достаточно опознать одного мужчину: далее по кругу определяются все остальные.

Разберём два случая.

1) Для одной из женщин высказывания об её возрасте различаются на 2. Тогда оба её соседа – лжецы, и, как сказано выше, все мужчины определяются.

2) Таких женщин нет. Все мужчины разбиваются на группы: внутри такой группы оба соседа каждой женщины говорят об её возрасте одно и то же. Но пока не известно, какие группы состоят из лжецов, а какие – из рыцарей.

Сложив все числа, названные мужчинами, получим удвоенную сумму возрастов женщин. Теперь сложим первые числа, названные мужчинами. Если полученная сумма имеет ту же чётность, что сумма возрастов женщин, то среди мужчин чётное число лжецов, а если не совпадает – нечётное. Поскольку из двух возможных вариантов количество лжецов чётно только в одном, путешественник определит, какой из вариантов правильный.

5. В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника M расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если

а) [4] M — квадрат 21×21;

б) [4] M — прямоугольник 20×21?

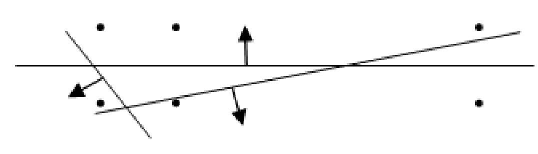
Александр Шаповалов

Ответы: а) 3 хода; **б)** 4 хода.

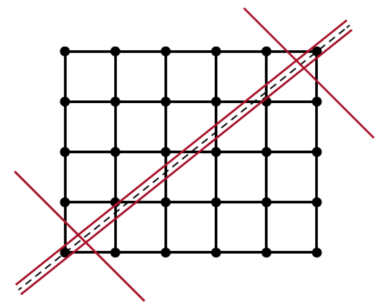
Решение. Вместо исходного прямоугольника M будем рассматривать прямоугольник N с вершинами в угловых лампочках.

Оценки. Заметим, что каждым ходом зажигается хотя бы одна из четырёх угловых лампочек. Следовательно, ходов не больше 4. В п. а) заметим ещё, что мы должны на каком-то ходу зажечь центральную лампочку. Вместе с ней по одну сторону от проведённой прямой окажется хотя бы две угловых лампочки (поскольку прямая, параллельная проведённой и проходящая через центр, делит квадрат N на две симметричные относительно центра части).

Примеры. **а)** Сначала зажигаем всё, кроме нижнего ряда лампочек, затем зажигаем все из оставшихся лампочек, кроме угловой, и наконец зажигаем угловую лампочку. (На рисунке изображены два нижних слоя лампочек, стрелки указывают по какую сторону от прямой зажигаются лампочки.)



б) Прямоугольник N имеет размеры 19×20. На его диагонали нет других лампочек, поскольку 19 и 20 взаимно просты. Проведём первую прямую параллельно диагонали, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжём все лампочки ниже этой прямой. Аналогично проведём вторую прямую параллельно диагонали, но чуть выше, и зажжём все лампочки выше этой прямой, как на рисунке. (Для примера мы взяли N размером 4×5 — поменьше, но тоже с взаимно простыми сторонами.) Оставшиеся две угловые лампочки можно зажечь за два хода, отсекая прямой от остальных.



6. [10] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, $\ldots$, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

Ответ: $n = 100(m+1)$ при $k = 2m$ и $n = 100(m+1)+1$ при $k = 2m+1$.

Решение. Пусть $k = 2m$ или $k = 2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i = 100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из $k+1$ различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

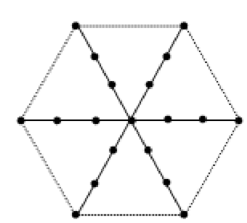
Рассмотрим для каждого туриста первые $m+1$ номеров из его списка. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m+m=2m$, все на ремонте). Следовательно, $n \geqslant 100(m+1)$.

При чётном k этой оценки достаточно. В случае нечётного k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров будут на ремонте, а у Васи — все номера до совпадающего с Петиным (их не более m) будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n \geqslant 100(m+1)+1$.

Замечание. Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном k мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери $k+2$ номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более k ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном k представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по $k+2$ номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и $k=5$). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил $\frac{k+1}{2}$ ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



7. [12] Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p+q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся ровно на d.

Николай Белухов

Решение 1. Случай $p = q = 1$ очевиден. Иначе p и q различны, пусть $p < q$. Всего лягушка пропрыгала путь, длина которого делится на p и на q, а значит, и на pq, так как p и q взаимно просты. Тогда длина пути равна kpq для некоторого натурального k, и лягушка сделала kq «коротких» прыжков вправо и kp «длинных» прыжков влево.

Известно, что при взаимно простых p и q можно представить d в виде $d = ap - bq$ с целыми a и b. Это равенство, очевидно, сохранится, если одновременно увеличить (или уменьшить) a на q и b на p. Поэтому можно выбрать a натуральным и не превосходящим q. При этом b будет неотрицательным (иначе $d \geqslant p+q$), и так как $a \leqslant q$, то $b < p$ (ведь $d > 0$). Поэтому $a + b < p + q \leqslant k(p + q)$.

Назовём каждую серию из $a + b$ последовательных прыжков лягушки *окном*. Условно считаем, что за последним прыжком лягушки идёт её первый прыжок (как при движении по кругу), поэтому окно может состоять и из нескольких последних и первых прыжков. Тогда всего окон ровно $k(p + q)$ штук.

Надо найти окно, где лягушка сделала ровно a коротких прыжков (и b длинных) — тогда она сдвинется на d за эти $a + b$ прыжков. Такое окно найдётся, если есть окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a: можно сдвигать первое окно по кругу, пока не дойдём до второго, число коротких прыжков в окне каждый раз меняется максимум на 1, поэтому будет момент, когда оно равно a.

Сложим число коротких прыжков во всех окнах — получим $kq(a + b)$, ведь каждый прыжок учли $a + b$ раз. Окон $k(p + q)$, и в среднем на окно придётся $\frac{kq(a+b)}{k(p+q)}$ коротких прыжков. Это число равно

$$\frac{kq(a + b)}{k(p + q)} = \frac{qa + qb}{p + q} = \frac{pa + qa - d}{p + q} = a - \frac{d}{p + q},$$

что больше $a - 1$ и меньше a. Значит, найдётся окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a.

Решение 2. Лягушку из условия назовём *старой*. Будем считать, что она пропрыгивает свою последовательность ходов бесконечное число раз по циклу. Посадим на прямую *новую* лягушку в точку d и заставим её прыгать ту же последовательность прыжков, что прыгает старая (тоже в бесконечном цикле).

Множество чисел, посещённых новой лягушкой, получается из множества чисел, посещённых старой, сдвигом на d. Если хотя бы одно число из нового множества совпадет с числом из старого, то обратный сдвиг даст нам искомую пару чисел. Предположим, что этого не произойдёт.

Как и в предыдущем решении, представим число d в виде $ap - bq$ для некоторых неотрицательных a и b. Заставим старую лягушку пропрыгать $a + b$ ходов по её циклу; она окажется в точке $e = xp - yq$, где $x + y = a + b$. Так как $a - x = y - b$, разность координат новой и старой лягушек кратна $p + q$: $d - e = (a - x)p - (b - y)q = (a - x)(p + q)$.

Далее пустим лягушек прыгать одновременно: старую по продолжению исходной траектории, а новую — по сдвинутой. На каждом шаге разность их координат будет либо не меняться (если они прыгают в одну сторону), либо меняться на $p + q$ (если одна прыгает на $+p$, а другая на $-q$). Таким образом, разность всегда будет оставаться кратной $p + q$; при этом она, по предположению, не может становиться нулевой, поэтому она всегда будет сохранять знак.

Пусть лягушки пропрыгали полный цикл и вернулись (новая в d, а старая в e). Количество ходов в цикле обозначим через T. Сумму всех чисел, посещённых новой лягушкой (без учёта начальной позиции), обозначим через S_1, а сумму чисел, посещённых старой, — через S. С одной стороны, числа на соответствующих ходах отличались не менее чем на $p + q$, причём разность всегда имела один и тот же знак, поэтому $|S_1 - S| \geq T(p + q)$. С другой стороны, набор чисел, посещённых новой лягушкой за цикл, отличается от аналогичного набора старой лягушки сдвигом на d, поэтому $|S_1 - S| = Td$ (отметим, что эти наборы могут содержать некоторые числа по несколько раз, если в течение цикла лягушка посещала их неоднократно). Подставляя и сокращая на T, получаем $d \ge p + q$, что противоречит условию задачи.

Решение 3. Как и в решении 2, будем считать, что лягушка прыгает в бесконечном цикле. Также воспользуемся представлением $d = ap - bq$ для неотрицательных a и b, сумму $a + b$ обозначив через r.

Через δ_i обозначим разность между положениями лягушки в момент $i + r$ (то есть через $i + r$ шагов после начала) и в момент i. Так как их разделяет r шагов, то

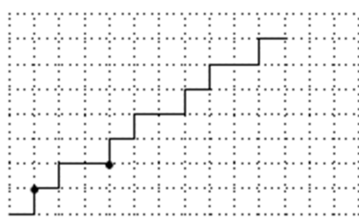
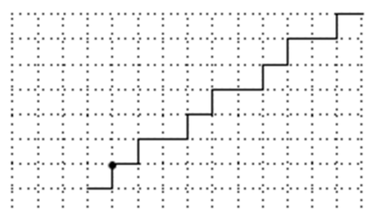
$$\begin{aligned}\delta_i = xp - (r - x)q = ap + (x - a)p - bq - (r - x - b)q =\\ = d + (x - a)p + (x - (r - b))q = d + (x - a)(p + q)\,.\end{aligned}$$

Если δ_i равно d, то мы нашли искомые позиции. Предположим противное, пусть $\delta_i \ne d$ для всех i. Тогда все числа δ_i имеют вид $d + (p + q)k_i$ для целых $k_i \ne 0$.

Заметим, что разность между δ_i и δ_{i+1} определяется тем, какими были $(i + 1)$-й и $(i + r + 1)$-й шаги; разобрав случаи, нетрудно убедиться, что она равна $\pm(p + q)$ или 0. Это означает, что числа δ_i либо все меньше 0, либо все больше 0.

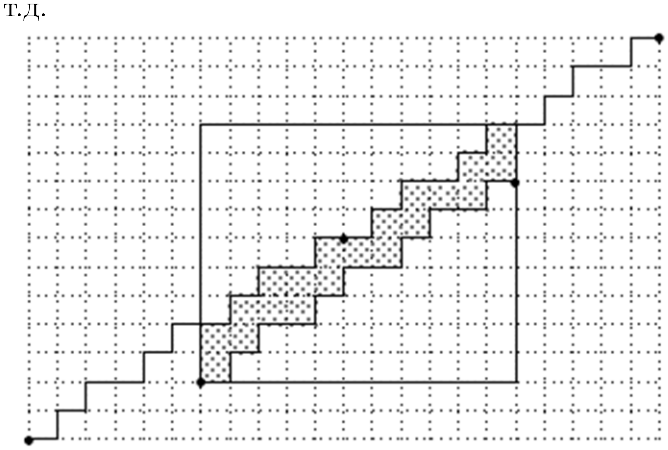
Рассмотрим позицию лягушки через rT шагов, где T — количество шагов в её цикле. С одной стороны, она равна сумме $\delta_0+\delta_r+\delta_{2r}+\ldots+\delta_{r(T-1)}$, которая по доказанному выше должна быть либо отрицательной, либо положительной. С другой стороны, через rT шагов лягушка вернётся на позицию 0. Противоречие.

Решение 4. Поскольку p и q взаимно просты, лягушка может вернуться в исходную точку, только сделав kq прыжков вправо и kp прыжков влево, где k — натуральное число. Изобразим путь P лягушки на целочисленной решетке так: когда лягушка прыгает (на p) вправо будем сдвигаться на 1 вправо, а когда прыгает влево — на 1 вверх. Ниже на рисунке слева изображен такой путь P для $p = 7$, $q = 11$, $k = 1$ и последовательности прыжков $7 - 11 + 7 - 11 + 7 + 7 - 11 + 7 - 11 + 7 + 7 - 11 + 7 - 11 + 7 + 7 - 11 + 7 = 0$.

Как известно, найдутся натуральные a и b, для которых $d = pa - qb$. Сдвинув путь P на a вправо и на b вверх, получим новый путь Q. Выше на рисунке справа изображён путь Q, полученный из пути на левом рисунке для $d = 10$, $a = 3$ и $b = 1$ ($10 = 7 \cdot 3 - 11 \cdot 1$). Если P и Q имеют общую точку (x, y), то точка $(x - a, y - b)$ также лежит на P. Соответствующие положения лягушки на числовой прямой равны $p(x - a) - q(y - b)$ и $px - qy$, а $(px - qy) - (p(x - a) - q(y - b)) = pa - qb = d$, что и требовалось. То же будет верно, если путь Q имеет общую точку с расширенным путем $\mathbf{P}$, полученным добавлением к P его копий, полученными сдвигами на (kq, kp), $(2kq, 2kp)$ и т.д.

Предположим, что общих точек у путей $\mathbf{P}$ и Q нет, например, Q лежит ниже $\mathbf{P}$. На рисунке справа $\mathbf{P}$ состоит из двух копий P, а Q получен из P сдвигом, соответствующим $d = 20$, $a = 6$, $b = 2$ ($20 = 7 \cdot 6 - 11 \cdot 2$).



Рассмотрим заштрихованную фигуру F, расположенную «между» $\mathbf{P}$ и Q, и наименьший содержащий её прямоугольник (его размеры $kq \times (kp + l)$, где l — натуральное число). Когда Q совпадает с P, площадь $S(F)$ равна 0. Сдвиг на a вправо увеличил эту площадь на kpa, а сдвиг на b вверх уменьшил её на kqb. Значит, $S(F) = k(pa - qb) = kd$.

Оценим площадь F снизу другим способом. Фигуру F можно разбить на kq вертикальных полосок толщиной в одну клетку. В каждой полоске есть минимум одна клетка (нижняя). Фигуру F пересекают по внутренним отрезкам $kp+l-1$ горизонтальных линий сетки. В каждой вертикальной полоске клеток хотя-бы на одну больше, чем количество пересекающих её линий, т.к. есть клетка прямо под каждой линией, и клетка выше самой верхней линии. Значит, общая площадь F не менее $kq+kp+l-1$ клеток, что не меньше $k(p+q)$ клеток. Это противоречит неравенству $d < p+q$.

в каждой вертикальной полоске клеток хотя-бы на одну больше чем количество пересекающих её линий, т.к. есть клетка прямо под каждой линией, и клетка выше самой верхней линии.

10 – 11 классы

1. [4] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

Решение. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на k кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

2. [5] Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}?$$

Артемий Соколов

Ответ: существует.

Решение 1. Докажем, что подходит $n = 6$. Предварительно заметим, что любую пару $(0, y)$ с ненулевым y можно получить так: $0 = \frac{3}{2y} + \frac{3}{2y} - \frac{3}{y}$, $y = \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{y}{3}$. Аналогично можно получить любую пару $(x, 0)$ с ненулевым x. Тогда любую пару (x, y) с отличными от нуля x и y можно получить как «сумму» двух рассмотренных выше пар. Пару $(x, 0)$ можно получить как сумму двух пар $(\frac{x}{2}, 0)$, аналогично можно получить пару $(0, y)$, а пару $(0, 0)$ — как $1+1+1-1-1-1$.

Решение 2. Докажем, что подходит $n = 4$. Заметим, что если мы зафиксируем положительное число k и рассмотрим все возможные пары положительных чисел a, b с суммой k, то множество значений выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ — это луч $[\frac{4}{k}; +\infty)$ (проверьте это, записав сумму в виде $\frac{1}{a} + \frac{1}{k-a} = \frac{k}{a(k-a)}$).

Тогда для данных x и y выберем положительные суммы $a+b$ и $c+d$ так, что $a+b-c-d = x$ (сами числа a, b, c, d пока не фиксируем).

Поскольку выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, по сказанному выше, принимают все достаточно большие значения, можно подобрать положительные a, b, c, d так, чтобы разность этих выражений равнялась y.

Решение 3. Докажем, что подходит $n = 4$. Будем искать числа $a_1, \ldots, a_4$ как корни многочлена вида $P(t) = t^4 - xt^3 - ut^2 - yt + 1$ (согласно формулам Виета они удовлетворяют указанным равенствам). Поскольку $P(0) = 1$, для того чтобы многочлен $P(t)$ имел четыре вещественных корня, достаточно, чтобы числа $P(1) = 2-x-u-y$ и $P(-1) = 2+x-u+y$ были отрицательны. Мы этого добьемся, взяв $u > |x+y|+2$.

Замечание. Можно доказать, что $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ не подходят.

3. [5] Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω.

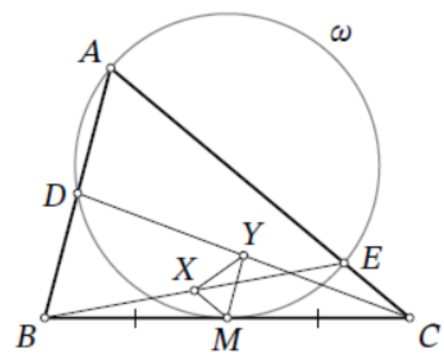
Алексей Доледенок

Решение. Заметим, что MX и MY — средние линии треугольников CBE и BCD соответственно. По условию

$$BD \cdot BA = BM^2 = CM^2 = CE \cdot CA,$$

откуда

$$MX : MY = CE : BD = BA : CA.$$



Поскольку $MX||AC$ и $MY||AB$, треугольники MXY и ABC подобны. Значит, $\angle MXY = \angle B = \angle YMC$. По теореме об угле между касательной и хордой сторона BC касается описанной окружности треугольника MXY, откуда следует утверждение задачи.

4. [8] В ряд лежат $100N$ бутербродов с колбасой. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

Иван Митрофанов

Решение. Докажем, что при $N = 3^{100}$ выиграет кот Матроскин. Для этого достаточно, чтобы на последнем шаге дяди Фёдора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы.

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых даёт остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого даёт остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые 3^{99} ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как Дядя Фёдор за это время съедает $3^{99} \cdot 100$ бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие 3^{99} ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется — ничего не делать. Так как за один ход дядя Фёдор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание 1), то ещё через 3^{99} ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьётся того, чтобы все бутерброды, номер которых даёт остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы.

Замечание 1. Каждым ходом дядя Фёдор будет съедать бутерброды с номерами, дающими различные остатки от деления на 100, даже если съедает их с двух сторон. Это можно понять, заметив, что до его хода количества бутербродов для каждого остатка одинаковы, так как общее их количество кратно 100; и после его хода ситуация такая же.

Замечание 2. Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при $N = 2^{100}$ он тоже выигрывает; на каждой стадии количество бутербродов при этом будет уменьшаться в 2 раза. Для этого ему нужно стягивать колбасу только с тех бутербродов (с номерами, дающими данный остаток от деления на 100), до которых дядя Фёдор на данной стадии гарантированно не доберётся. Нетрудно понять, что такой бутерброд действительно всегда найдётся.

А вот при $N = 2^{100} - 1$ уже выигрывает дядя Фёдор. Действительно, первыми $2^{99} - 1$ ходами он съест любые $2^{99}-1$ сотен бутербродов; за это время усилиями соперника появится не более $2^{99}-1$ бутербродов без колбасы. Далее, если перед дядей Фёдором лежит 2^k сотен бутербродов, из которых не более $(100-k)\cdot 2^k-1$ без колбасы, то при $k > 0$ он может съесть ту половину ряда (правую или левую), в которой бутербродов без колбасы больше. Тогда их в ряду останется не более $(100-k)\cdot 2^{k-1}-1$ плюс, благодаря коту Матроскину, не более 2^{k-1} новых — всего не более $(100-k+1)\cdot 2^{k-1}-1$. Продолжая так и далее, при $k = 0$ дядя Фёдор получит сто бутербродов, из которых не более 99 будут без колбасы.

5. [8] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, $\ldots$, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

Ответ: $n = 100(m+1)$ при $k = 2m$ и $n = 100(m+1)+1$ при $k = 2m+1$.
Решение. Пусть $k = 2m$ или $k = 2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i = 100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из $k+1$ различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

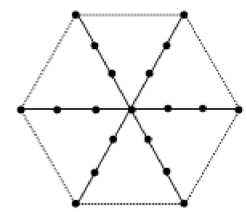
Рассмотрим для каждого туриста первые $m+1$ номеров из его списка. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m+m=2m$, все на ремонте). Следовательно, $n \geqslant 100(m+1)$.

При чётном k этой оценки достаточно. В случае нечётного k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров будут на ремонте, а у Васи — все номера до совпадающего с Петиным (их не более m) будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n \geqslant 100(m+1)+1$.

Замечание. Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном k мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери $k+2$ номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более k ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном k представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по $k+2$ номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и $k=5$). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил $\frac{k+1}{2}$ ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



6. [10] Найдите хоть одно вещественное число A со свойством: для любого натурального n расстояние от верхней целой части числа A^n до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа x — наименьшее целое число, не меньшее x.)

Дмитрий Креков

Решение. Рассмотрим любое квадратное уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, у которого два положительных корня, произведение которых равно 1. Подойдёт, например, уравнение x^2-4x+1, его корни — это $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$. Заметим, что сумма и произведение этих корней — целые, а тогда и сумма $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ — целая при любом натуральном n (это нетрудно доказать по индукции или просто раскрыв скобки: слагаемые с $\sqrt{3}$ либо входят в чётной степени, либо взаимно уничтожаются).

Тогда $((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)^2$ — точный квадрат, и он равен $(2+\sqrt{3})^{2n}+2+(2-\sqrt{3})^{2n}$ (так как произведение корней равно 1), то есть отстоит на 2 от числа $(2+\sqrt{3})^{2n}+(2-\sqrt{3})^{2n}$, которое, в свою очередь, есть верхняя целая часть числа $(2+\sqrt{3})^{2n}$ (поскольку второй корень положителен и меньше 1).

Но тогда число $A=(2+\sqrt{3})^2$ — искомое.

Коментарий. Несложно видеть, что в качестве t можно взять любое число, являющееся бо́льшим корнем многочлена вида $x^2-nx+1=0$, где n — натуральное число, не меньшее 3. Действительно, как и в решении выше, сумма корней $t^n+\frac{1}{t^n}$ этого многочлена оказывается целой, откуда для $A=t^2$ следует утверждение задачи.

В этом решении мы увидели, что для взятых нами чисел t расстояние от степени t^n до ближайшего целого стремится к нулю с ростом t. На самом деле, чисел, степени которых становятся всё ближе и ближе к целым числам, больше (но про остальные нельзя сказать, что они подходят для решения данной задачи!).

А именно, пусть $P(x)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все корни (в том числе комплексные), кроме одного, по модулю меньше 1. Тогда этот корень x_1 вещественный, и расстояние от x_1^n до ближайшего целого числа стремится к 0 с ростом n. Это следует из того, что сумма n-х степеней всех корней многочлена $P(x)$ целочисленно выражается через его коэффициенты, и потому является целой. А степени всех остальных корней стремятся к 0 — как раз потому, что они по модулю меньше 1. Это рассуждение можно прочитать в статье А. Егорова «Числа Пизо» (журнал ««Квант», номера 5 и 6 за 2005 год); см. также проект «Дробные части степеней» на XII Летней конференции Турнира городов.

Такие числа — корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все остальные корни по модулю меньше 1, — называются *числами Пизо* или *числами Пизо—Виджаярагхавана*. Они представляют интерес в связи с задачами диофантовой аппроксимации и изучались в работах Туэ, Харди, Пизо (см., например, книгу: Дж. В. С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961. [5, глава VIII]).

Свое название эти числа получили после публикации Шарля Пизо, который в своей диссертации открыл много замечательных свойств этих чисел.

7. Дано целое $n > 2$. На сфере радиуса 1 требуется расположить n попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины α. Докажите, что а) [6] при любом $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ это возможно; б) [7] при любом $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ это невозможно.

Илья Богданов

Решение. а) Пусть вертикальная прямая ℓ проходит через центр сферы O. Пусть две параллельных горизонтальных плоскости высекают на сфере две равных (не больших!) окружности γ_+ и γ_-. Тогда существует большая окружность Ω_0, касающаяся γ_+ и γ_- в (диаметрально противоположных) точках P_0 и M_0 соответственно. Повернув Ω_0 на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг ℓ, получим большую окружность Ω_k, также касающуюся двух окружностей в точках P_k и M_k соответственно.

Рассмотрим одну дугу P_0M_0 окружности Ω_0, а также дуги P_kM_k, полученные из неё поворотами. Все эти дуги не пересекаются, поскольку любая горизонтальная плоскость пересекает эти дуги в вершинах правильного n-угольника. Более того, каждую из этих дуг P_kM_k можно расширить до ближайших к ней (но не лежащих на ней) точек пересечения Ω_k с другими окружностями Ω_i. Заметим, что точки пересечения Ω_k и Ω_i лежат в (вертикальной) плоскости, симметрия относительно которой меняет эти окружности местами (эта плоскость содержит, например, биссектрису угла P_iOP_k). Отсюда легко видеть, что ближайшими к нашей дуге будут точки пересечения с Ω_{k-1} и с Ω_{k+1}, и каждую дугу P_kM_k можно расширить до дуги между этими точками (не включающей концы).

Если теперь плоскости, высекающие γ_+ и γ_-, взять близкими к центру сферы, то точки пересечения Ω_k и Ω_{k-1} будут (из симметрии) близки к серединам дуг P_kP_{k-1} и M_kM_{k-1}. Поэтому длины полученных дуг можно сделать сколь угодно близкими к $\pi + \frac{2\pi}{n}$, что и требовалось.

б) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно не пересекающиеся дуги больших окружностей с длинами $\pi + \alpha_1$, $\pi + \alpha_2, \ldots, \pi + \alpha_n$ при положительных α_i; мы считаем, что они содержат свои концы. Мы докажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 2\pi,$$

откуда и следует требуемое.

В дальнейшем под *полюсом* полусферы мы понимаем точку этой полусферы, наиболее удалённую от её границы.

Обозначим через B_i дугу большой окружности, дополнительную к A_i (её длина равна $\pi - \alpha_i$). Рассмотрим все (открытые) полусферы, содержащие B_i; пусть X_i и Y_i — концы B_i (мы считаем, что они принадлежат B_i). Полусфера содержит B_i тогда и только тогда, когда она содержит X_i и Y_i, то есть когда её полюс лежит в открытых полусферах с полюсами X_i и Y_i. Значит, множество $\mathcal{S}_i$ полюсов таких полусфер — это пересечение этих двух полусфер, то есть сферический «ломтик» раствора α_i; его площадь равна $2\alpha_i$.

Докажем теперь, что множества $\mathcal{S}_i$ попарно не пересекаются; поскольку площадь сферы равна 4π, отсюда вытекает требуемое неравенство. Предположим, что некоторая точка Z лежит в $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$; тогда полусфера с полюсом Z содержит B_1 и B_2, а значит, дополнительная к ней (замкнутая) полусфера $\mathcal{H}$ пересекает A_1 и A_2 по целым полуокружностям (а не их частям). Но любые две таких полуокружности на полусфере $\mathcal{H}$ пересекаются (ибо концы любой — диаметрально противоположные точки на границе полусферы). Это противоречит нашему предположению.

Замечание. Для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых меньше 2π, на сфере можно расположить попарно не пересекающиеся дуги длин $\pi + \alpha_i$ тем же методом, что и в решении пункта а).