41-й Международный математический Турнир городов
Решения задач, старшие классы
Базовый вариант

1. [3] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? (*Алексей Воропаев*)

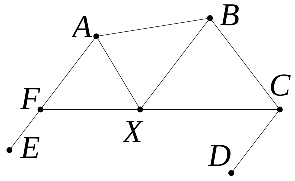
Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель всегда называет номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

Стратегия 2. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

2. [4] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$. (*Егор Бакаев*)



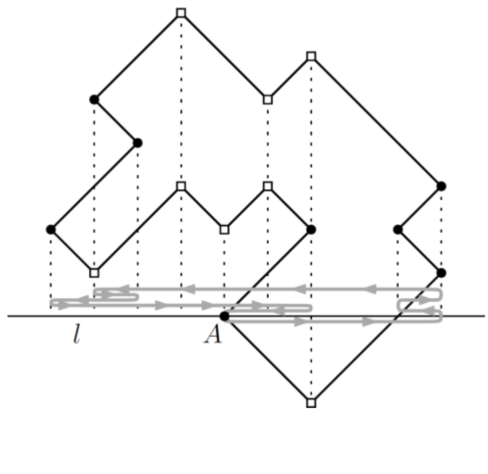
Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает прямую AE в точке F, а прямая, проходящая через B параллельно AE, пересекает отрезок CF в точке X. Тогда $\angle BXC = \angle DCX = \angle BCX$. Отсюда $BX = BC = BA$. Значит, $\angle BAX = \angle BXA = \angle FAX$. Следовательно, AX – биссектриса угла A, поэтому X совпадает с K и $BK \parallel AE$.

Замечание. На рисунке точка F лежит на стороне AE, но в решении это не используется. Можно, впрочем, доказать, что биссектриса угла C не может пересекать сторону AB (а сторону ED – может).

3. [4] Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[^x/_2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число. (*Владислав Новиков*)

Решение. Индукция. Число 1 написано. Покажем, как получить натуральное $n > 1$, если умеем получать все меньшие числа. Число n представимо в одном из трёх видов: $3k - 1$, $3k$ или $3k + 1$, где k – натуральное. 1) $2k - 1 \to 6k - 2 \to 3k - 1$; 2) $2k \to 6k + 1 \to 3k$; 3) $k \to 3k + 1$.

4. [5] Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовём две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно. (*Михаил Скопенков*)



Решение 1. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Пусть вертикальных сторон k, тогда горизонтальных сторон тоже k. Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: ┌ , ┐ , └ , ┘ . Пусть вершина A имеет тип 2 (без ограничения общности). Тогда не дружные с ней – вершины типа 1 и 4.

Рассмотрим любую горизонтальную сторону. Её левый конец может быть только типа 1 или 3. Всего левых вершин у горизонтальных сторон столько же, сколько левых сторон, то есть k, откуда суммарное число вершин типа 1 и 3 равно k. Пусть вершин типа 1 всего x, тогда вершин типа 3 всего $k - x$. Рассматривая нижние концы вертикальных сторон, получаем аналогично, что вершин типа 3 и 4 всего k, откуда вершин типа 4 всего $k - (k - x)$, то есть x. Но тогда вершин типа 1 и 4 всего $2x$ (чётное число), а это и есть вершины, которые не дружны с A.

Решение 2. Расположим многоугольник так, чтобы биссектриса l данной вершины A была горизонтальна. Пусть некая точка движется по периметру многоугольника с постоянной скоростью, начав и закончив в вершине A. Тогда её проекция на l также движется с постоянной скоростью, причём проекция меняет направление движения ровно в те моменты, когда точка проходит через вершину, дружную с A, или через саму A. Учитывая, что всего вершин чётное число, получаем требуемое.

Решение 3. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Поскольку они чередуются, число вершин чётно (пусть их $2n$). При этом угловой коэффициент биссектрисы равен 1 или –1.

Занумеруем вершины против часовой стрелки числами от 1 до $2n$ и поставим в i-й вершине число a_i, равное 1, если угол в ней равен 90°, и –1, если угол в ней равен 270°. Обходя многоугольник по контуру против часовой стрелки, в каждом угле в 90° мы поворачиваем на 90° против часовой стрелки, а в каждом угле в 270° – на 90° по часовой. Вернувшись в исходное положение после полного обхода, мы повернулись в итоге на 360° против часовой стрелки, откуда количество углов в 270° на 4 меньше, чем в 90°, то есть равно $(2n - 4)/2 = n - 2$, поэтому $a_1a_2...a_{2n} = (-1)^{n-2}$.

Заметим, что направления биссектрис в соседних вершинах совпадают тогда и только тогда, когда углы в них разные. Можно считать, что угловой коэффициент биссектрисы в первой вершине равен a_1. Тогда для каждого i знак b_i углового коэффициента биссектрисы в i-й вершине совпадает с a_i, если i нечётно, и совпадает с $-a_i$, если i чётно. Поэтому $b_1b_2...b_{2n} = a_1a_2...a_{2n}(-1)^n = (-1)^{2n-2} = 1$. Следовательно, число «отрицательных» (а потому и «положительных») биссектрис чётно.

5. [5] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

Ответ. За 61 рубль. **Решение**. Занумеруем фишки и клетки по порядку от 0 до 99. Бесплатная операция не меняет остаток номера клетки при делении на 5.

Оценка. Мысленно расположим кучки фишек по кругу. Сначала кучка фишек с остатком 0, потом – с 1, и так далее до 4. Платная операция переставляет пару фишек из соседних кучек. Фишки из нулевой кучки должны участвовать хотя бы в одной такой замене, чтобы добраться до четвёртой кучки. Аналогично для фишек из четвёртой кучки. Фишки из первой кучки должны участвовать хотя бы в двух заменах, чтобы добраться до третьей кучки. Аналогично для третьей кучки. Значит, потребуется хотя бы $(20 + 20 + 40 + 40):2 = 60$ рублей. Но если будет потрачено только 60 рублей, то фишкам из первой кучки придётся идти через вторую кучку, поэтому хотя бы одна фишка из второй кучки будет участвовать в заменах. Следовательно, необходимо больше 60 рублей.

Алгоритм. Ясно, что бесплатными операциями можно расставить фишки внутри кучки в любом порядке. Поэтому правильно расставить все фишки из нулевой и четвёртой кучек можно за 20 рублей. Рассмотрим оставшиеся три кучки. Мысленно оставим только одну фишку A во второй кучке. Поменяем её с фишкой из первой кучки. Каждый раз будем передвигать дальше фишку, пришедшую во вторую кучку, за счёт новой фишки. Тогда за 40 рублей мы перетащим все фишки из первой кучки в третью, а из третьей – в первую кроме одной: она останется во второй кучке, не дойдя до первой. Поменяем ее с A, и все фишки окажутся в нужных кучках.

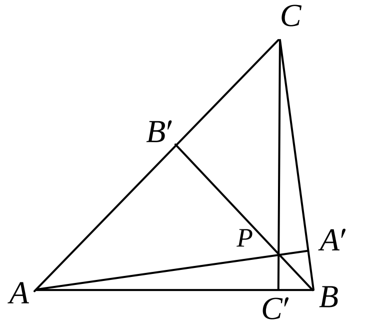
Сложный вариант

1. [5] Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geq 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень? (*Борис Френкин*)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть наибольшая степень, в которой встречается x, равна m, а наибольшая степень, в которой встречается y, равна n, Для определенности положим $n \ge m$. Запишем многочлен $P(x, y)$ в виде $A(x)y^n + B(x)y^{n-1} + \dots$, где $A(x)$, $B(x)$, … – многочлены от x. Поскольку при всех целых $0 \le k < n$ степень многочлена $P(k, y) = A(k)y^n + B(k)y^{n-1} + \dots$ меньше n, то $A(0) = A(1) = \dots = A(n-1) = 0$. У многочлена $A(x)$ есть n различных корней, поэтому его степень не меньше n. Но она не больше m, значит, $m = n$. При этом одночлен $x^n y^n$ заведомо встречается в произведении $A(x)y^n$ и не встречается в остальных произведениях, поэтому $\deg P(x, x) = 2n$.

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют все многочлены следующего вида и только они: $c_0 + xy(c_1 + (x-1)(y-1)(c_2 + \dots + (c_k + ((x-k)(y-k)c_{k+1})\dots)$, где k – неотрицательное целое число, $c_0, \dots, c_{k+1}$ – константы.

2. [5] Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P – точка пересечения высот треугольника ABC. (*Г. Гальперин*)



Решение. Пусть $2x$ – длина указанных хорд. По теореме о произведении отрезков хорд $x^2 = AP\cdot A'P = BP\cdot B'P = CP\cdot C'P$. По обратной теореме точки A, A', B и B' лежат на одной окружности. Значит, $\angle AA'B = \angle AB'B$.

Аналогично $\angle AA'C = \angle AC'C$, $\angle BB'C = \angle BC'C$. Следовательно, $\angle AA'B = \angle AB'B = 180° - \angle BB'C = 180° - \angle BC'C = \angle AC'C = \angle AA'C$, то есть AA' – высота. Аналогично BB' и CC' – высоты.

3. [6] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \ne b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \ne a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k - 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k-1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k-2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k-4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k-1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [10] Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k – наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, ..., либо с некоторого момента постоянна. *(Иван Митрофанов)*

Решение. Очевидно, что $b_1=1$, а при $k > 1$ отношение из условия меньше k, поэтому $b_k \le k$ при всех натуральных k. Если последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ не совпадает с натуральным рядом, то $b_k \le k-1$ при некотором k. Тогда $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+k-1} \le (k-1)a_{i+k-1}$ для каждого целого i, откуда $ka_i < (k-1)a_{i+k-1}$. Обозначив $t = \frac{k-1}{k} < 1$, получаем $a_i < ta_{i+k-1} < ta_{i+k}$ при всех целых i. Следовательно,

$$a_i < t\cdot a_{i+k} < t^2\cdot a_{i+2k} < \ldots < t^q\cdot a_{i+qk} < \ldots \qquad (*)$$

Фактически (так как (a_i) возрастает) мы доказали, что если есть два номера m и n, где $m > n$, то отношение $\frac{a_n}{a_m}$ меньше 1, когда $m-n < k$; $\frac{a_n}{a_m} < t$, когда $m-n < 2k$; $\frac{a_n}{a_m} < t^2$, когда $m-n < 3k$, и т.д. Чтобы оценить сверху произвольное b_n, оценим сверху отношение

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} = \frac{a_{i+n}}{a_{i+n}} + \frac{a_{i+n-1}}{a_{i+n}} + \ldots + \frac{a_{i+1}}{a_{i+n}}.$$

В этой сумме первые k слагаемых не превосходят 1, следующие k не превосходят t, следующие k не превосходят t^2 и т.д. Итак,

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} < k(1 + t + t^2 + \ldots) = \frac{k}{1-t} = k^2.$$

Это значит, что $b_n \le k^2$ при любом натуральном n. Поскольку последовательность (b_n), очевидно, не убывает, то она стабилизируется на числе, не большем k^2.

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $MA\cdot MC + MB\cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

а) [6] вписанный; **б**) [6] описанный. *(Наири Седракян)*

Решение. **а**) Опустим перпендикуляры MP, MQ, MR, MT на прямые AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DMA} \leq (S_{AMP} + S_{BMP}) + (S_{BMQ} + S_{CMQ}) + (S_{CMR} + S_{DMR}) + (S_{DMS} + S_{AMT}) = (S_{AMP} + S_{CMR}) + (S_{BMP} + S_{DMR}) + (S_{BMQ} + S_{DMT}) + (S_{CMQ} + S_{AMT})$. Заметим, что прямоугольные треугольники AMP и CMR имеют равные катеты MP и MR, поэтому из них можно сложить треугольник Δ, две стороны которого равны MA и MC, а значит, $S_{AMP} + S_{CMR} = S_\Delta \leq ½\, MA \cdot MC$. Аналогично $S_{BMP} + S_{DMR} \leq ½\, MB \cdot MD$, $S_{BMQ} + S_{DMS} \leq ½\, MB \cdot MD$, $S_{CMQ} + S_{AMS} \leq ½\, MA \cdot MC$. Следовательно, $S_{ABCD} \leq MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Из условия видно, что все предыдущие неравенства на самом деле являются равенствами. Это значит, что, во-первых, точки P, Q, R, T лежат на соответствующих сторонах четырёхугольника и, во-вторых, треугольник Δ прямоугольный, то есть $\angle MAP + \angle MCR = 90°$. Аналогично $\angle MAD + \angle MCQ = 90°$, откуда $\angle BAD + \angle BCD = (\angle MAP + \angle MCR) + (\angle MAT + \angle MCQ) = 180°$, то есть четырёхугольник вписанный.

б) Из прямоугольного треугольника Δ (см. **а**) видно, что $AP + RC = \sqrt{MA^2 + MC^2}$. Аналогично $BP + RD = \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Тогда $AB + CD = \sqrt{MA^2 + MC^2} + \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Вычисляя похожим образом сумму $BC + DA$, мы получим тот же результат.

Замечание. Можно доказать, что площадь любого вписано-описанного четырёхугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$, где M – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$.

6. Куб, состоящий из $(2n)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2n$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

а) [6] Докажите, что можно выбрать такие $2n^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

б) [6] Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

(Никита Гладков, Александр Зимин)

Решение. (*А. Шаповалов*) Пусть ребра куба параллельны осям координат.

а) Разобьём куб на слои толщиной 1, параллельные плоскости Oxy. Рассмотрим только спицы направлений Ox и Oy. В каждом слое найдём максимум числа таких спиц, идущих в одном направлении. Точно также найдём максимумы числа спиц для каждого слоя параллельного Oxz и параллельного Oyz. Пусть k – минимум из $6n$ этих максимумов.

Рассмотрим слой K, где максимум равен k. В слое можно выбрать $2n - k$ строк и $2n - k$ столбцов, через которые не проходят спицы слоя. На пересечении выбранных рядов есть $(2n - k)^2$ кубиков, их протыкают $(2n - k)^2$ спиц, перпендикулярных K. Покрасим эти $(2n - k)^2$ спиц в синий цвет. Выберем грань P куба, перпендикулярную слою K. Рассмотрим слои, параллельные P и не содержащие синих спиц. Их ровно k. В каждом таком слое можно выбрать не менее k спиц одного направления, всего не менее k^2 спиц. Добавим к ним синие спицы. По известному неравенству

$$k^2 + (2n - k)^2 \geq ½\,(k + (2n - k))^2 = 2n^2.$$

б) Ответ. $2n^2$ спиц. Выделим в нашем кубе два меньших куба со стороной n, примыкающие к противоположным вершинам. Они состоят из $2n^3$ единичных кубиков. Проткнём каждый выделенный кубик тремя перпендикулярными спицами. Тогда и все невыделенные единичные кубики тоже проткнуты. Заметим, что каждая спица протыкает ровно n выделенных кубиков. Значит, если спицы выбраны так, что никакой кубик не проткнут дважды, то спиц не более чем $2n^3 : n = 2n^2$.

7. [12] Некоторые из чисел 1, 2, 3, ..., n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b - c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше чем $\varphi(n)$. (*Александр Семенов*)

Лемма. Пусть D – некоторое множество различных простых делителей числа n. Количество натуральных чисел, не превосходящих n и не кратных ни одному числу из D, равно $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Доказательство. Раскрыв скобки, получаем формулу включений-исключений. □

Пусть красных чисел больше $\varphi(n)$. Тогда некоторые красные числа имеют с n общий простой делитель. Пусть q – наибольшее из таких простых и a – красное число, кратное q. Для противоречия достаточно найти различные красные числа b и c, сравнимые по модулю $\frac{n}{q}$, а для этого достаточно показать, что $\varphi(n)$ больше количества возможных остатков красных чисел по модулю $\frac{n}{q}$.

По лемме, $\varphi(n) = n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, где D – множество всех простых делителей у n, а указанное количество остатков не больше, чем $\frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Достаточно доказать, что $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Сокращая на n и на скобки, в которых $p>q$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{p\in D,\, p<q}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{1}{q}, \quad \text{что равносильно неравенству} \quad q-1 \geq \prod_{p\in D,\, p<q}\frac{p}{p-1}.$$

Оно верно, поскольку $q-1 = \frac{q-1}{q-2}\cdot\frac{q-2}{q-3}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}$.