41-й Международный математический Турнир городов
Решения задач, младшие классы
Базовый вариант

1. [4] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

(Алексей Воропаев)

Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

Стратегия 2. Пусть зритель всегда угадывает номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

2. [4] Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P. *(Артемий Соколов)*

Решение. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая YH содержит среднюю линию треугольника APC. Аналогично, прямая XH содержит среднюю линию этого треугольника. Эти средние линии пересекаются в точке H – середине стороны AC.

3. [4] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

Ответ. За 50 рублей.

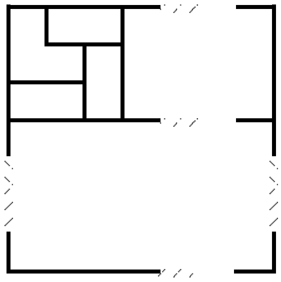
Решение. *Оценка*. Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек. Поэтому потребуется хотя бы 50 рублей.

Пример. Занумеруем фишки по порядку числами от 0 до 99. Покрасим клетки в четыре цвета: *abcdabcd…d*. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах *bc* и *da* – это 49 платных операций. В клетках цвета *b* и *c* фишки уже можно расставить нужным образом бесплатно. В клетках цвета *a* и *d* сделаем так, чтобы фишки 0 и 99 встали рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки в нужном порядке.

4. [5] Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма каждых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41? *(Борис Френкин)*

Ответ: верно. **Решение**. Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы считаем зацикленными, то есть за 1000 следует 1). Значит, $a_{k+41n}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом n. Так как числа 41 и 1000 взаимно просты, то квадраты всех чисел на круге дают при делении на 41^2 один и тот же остаток. Следовательно, $41a_k^2$ делится на 41^2, поэтому a_k^2 делится на 41, а поскольку 41 – простое число, то и a_k делится на 41.

5. [5] У Васи есть неограниченный запас брусков $1\times1\times3$ и уголков из трёх кубиков $1\times1\times1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где m, n и k – целые числа, большие 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками. *(Михаил Евдокимов)*



Решение. Так как mnk делится на 3, то один из множителей делится на 3; пусть это высота k. Достаточно заполнить коробку $m\times n\times3$. Из двух уголков можно сложить *кирпич* $1\times2\times3$. Если mn чётно, то основание коробки можно разбить на доминошки 2×1 и поставить на них по кирпичу, заполнив тем самым коробку. Иначе разобьём основание коробки на квадрат 3×3 и два прямоугольника (возможно пустых), см. рис. Прямоугольники разобьём на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки поставим по кирпичу, а в оставшееся место положим три уголка. Коробка заполнена уголками.

Сложный вариант

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые. Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

а) [2] не больше, чем у n; **б**) [2] меньше, чем у n? *(Борис Френкин)*

Ответ. **а**) Для $n = 2^k$; **б**) таких чисел нет. **Решение**. **а**) Очевидно, 2^k – наименьшее число сложности k. Поэтому все числа между 2^k и 2^{k+1} имеют сложность не больше k. Пусть n – не степень двойки. Тогда между n и $2n$ есть степень двойки (можно взять наибольшую степень двойки, меньшую n, и удвоить её). Очевидно, её сложность больше, чем у n.

б) В силу пункта а), достаточно рассмотреть случай $n = 2^k$, где k натуральное. Но число $3\cdot2^{k-1}$ имеет такую же сложность, как и n, и находится между n и $2n$.

Для знатоков. Утверждение **б**) следует из *постулата Бертрана*: если p – простое число, то следующее простое меньше $2p$. Действительно, представим n в виде pr, где p – простое, r – натуральное. Пусть q – следующее за p простое число. Тогда $n < qr < 2n$, а сложность qr равна сложности n.

2. [7] Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 – внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 – соответственно площади этих треугольников. Докажите, что $\dfrac{S}{AB+AC} > \dfrac{S_1}{A_1B_1+A_1C_1}$. *(Наири Седракян, Илья Богданов)*

Решение. Пусть точки D и D_1 симметричны точкам A и A_1 относительно BC. Проведём биссектрисы AK и A_1K_1 наших треугольников. Заметим, что K и K_1 – центры окружностей, вписанных в четырёхугольники $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$, а требуемое неравенство превратилось в очевидное неравенство $r > r_1$, где r и r_1 – радиусы указанных окружностей.

3. [7] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \neq b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \neq a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k - 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k - 1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k - 2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k - 4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

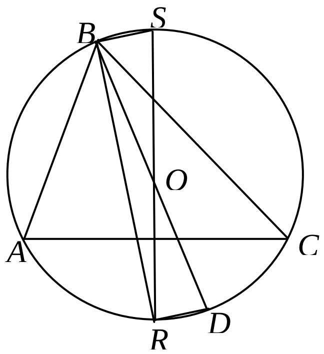
Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k - 1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [7] Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB. (*Артемий Соколов*)



Решение. Проведём гомотетию с центром B и коэффициентом 2. Точка O перейдёт в точку D, диаметрально противоположную вершине B на описанной окружности Ω, точка P – в точку R пересечения биссектрисы угла B с Ω, точка Q – в диаметрально противоположную R точку S, «отрезок, соединяющий…» – в сторону AC. Осталось заметить, что диаметр RS проходит через середину стороны AC, так как R – середина дуги AC.

5. [8] Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m + 1)(n + 1)$ – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n>m$, что пара (m, n) хорошая. (*Юрий Маркелов*)

Решение. Пара $(m, m(4m + 3)^2)$ хорошая. Действительно,
$(m + 1)(m(4m + 3)^2 + 1) = (m + 1)(16m^3 + 24m^2 + 9m + 1) = (m + 1)^2(16m^2 + 8m + 1) = ((m + 1)(4m + 1))^2$.

Путь к решению. Естественно попытаться найти такое n, что оно есть квадрат, умноженный на m, и при этом $n+1$ есть квадрат, умноженный на $m+1$. Тогда $n+1$ имеет вид $k^2(m+1)$. Так как n, поделённое на m, тоже квадрат, имеем: $(k^2(m+1) - 1)/m = k^2 + (k^2 - 1)/m$ – квадрат. Самый простой способ это обеспечить – положить $(k^2 - 1)/m$ равным $4k+4$, тогда $(k - 1)/m = 4$, откуда $k = 4m+1$.

6. [9] У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке *дорогой* книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке *дешёвой* (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5000 рублей? *(Татьяна Казицына)*

Решение 1. Посмотрим, сколько мелочи Петя мог получить.

Рассмотрим самую последнюю дешёвую покупку, которая увеличила количество мелочи. Пусть стоимость этой покупки x, тогда перед этим было не более $x-1$ рублей мелочи, а значит, после этого её станет не больше чем $x-1+100-x=99$ рублей. Так как дорогие покупки количество мелочи не уменьшают, то все предыдущие покупки вместе с рассмотренной дали в сумме не более 99 руб. мелочи. Тем более все *дешёвые* покупки в сумме принесли не более 99 рублей.

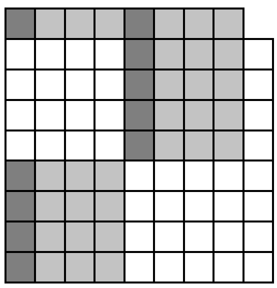
Пусть было n покупок дороже 100 рублей. Каждая из них добавляет не более 99 рублей мелочи. Если бы других покупок совсем не было, то на дорогие было бы потрачено не менее $2n$ сотен, а сдача составила бы не более $99n$ – меньше половины потраченного. Поэтому другие покупки есть. Но тогда у Пети было не менее $2n+1$ сторублёвки, а мелочи в конце стало не больше $99n+99$. Значит, $(2n+1)50 \le 99n+99$, откуда $n \le 49$. Таким образом, мелочи останется не более $99\cdot 49+99 < 5000$ руб. Значит, и потрачено менее 5000 рублей.

Решение 2. Пусть какой-то товар куплен за x рублей мелочью. Эта мелочь появилась как сдача при предыдущих покупках. Увеличим стоимость этих покупок на соответствующие величины, в сумме составляющие x рублей, а данную покупку отменим. Аналогично избавимся от всех покупок за мелочь. На каждом шаге количество мелочи уменьшается, поэтому новых покупок за мелочь не появится.

Имеется покупка стоимостью не больше 50 рублей (*маленькая*), иначе осталось бы меньше половины всех денег. Маленькая покупка только одна, так как вторая маленькая покупка была бы сделана на сдачу за первую, а покупок за мелочь теперь нет.

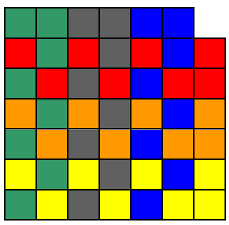
Разность между сдачей за маленькую покупку и её ценой не больше $99-1=98$ руб. Для каждой другой покупки эта разность отрицательна, и она чётна (так как сумма цены и сдачи кратна 100, то есть чётна). Значит, эта разность не меньше -98 и не больше -2. Поэтому остальных покупок не больше $98:2=49$, и за каждую из них отдано не больше двух сторублёвок (иначе указанная разность не больше $99-201<-98$). Следовательно, всего сторублёвок было не больше $1+2\cdot 49=99$, а половина от этой суммы не больше $9900:2=4950<5000$.

7. [10] В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные? (*Александр Грибалко*)



Ответ. Мог. **Решение**. Покажем, что любой квадрат $(2N+1)\times(2N+1)$ без угловой клетки можно получить, $2N$ раз приложив печать из $2N+2$ клеток. Для пояснения приведём рисунок для $N=4$.

Квадрат без правого верхнего угла представим как квадрат $2N\times 2N$ с двумя приклееными сверху и справа полосками $1\times 2N$. Разобьём квадрат $2N\times 2N$ на четыре квадратика $N\times N$. Покрасим левый нижний и правый верхний квадратики $N\times N$ и верхнюю полоску в серый цвет. Теперь белая часть получается из серой поворотом на 90° по часовой стрелке (относительно центра квадрата $2N\times 2N$). Левый край каждого серого квадратика $N\times N$ и две клетки серой полоски на тех же вертикалях сделаем тёмными. Это будет первый отпечаток. Сдвинув его вправо на одну клетку, сделаем второй отпечаток, и т.д. Тогда N отпечатков покроют в точности серую область. Развернув печать на 90°, N отпечатками покроем белую область.



Замечание. Есть и другие варианты печатей. Например, такой (для простоты рассмотрен случай $N=3$):