СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2). Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

2 а) не больше, чем у n;

2 б) меньше, чем у n?

Борис Френкин

7 2. Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 лежит внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 — соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB + AC} > \frac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}\,.$$

Наири Седракян, Илья Богданов

7 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

7 4. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

Артемий Соколов

8 5. Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m+1)(n+1)$ — точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n > m$, что пара (m, n) хорошая.

Юрий Маркелов

8 6. У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке дешёвой (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало — сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5 тысяч рублей?

Татьяна Казицына

10 7. В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?

Александр Грибалко

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5

1. Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geqslant 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень?

Борис Френкин

5

2. Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P — точка пересечения высот треугольника ABC.

Григорий Гальперин

6

3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

Владислав Новиков

10

4. Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k — наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, ..., либо с некоторого момента постоянна.

Иван Митрофанов

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

6 а) вписанный;

6 б) описанный.

Наири Седракян

6. Куб, состоящий из $(2N)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2N$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

6 а) Докажите, что можно выбрать такие $2N^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

6 б) Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

Никита Гладков, Александр Зимин

12

7. Некоторые из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b-c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше, чем $\varphi(n)$ (количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n).

Александр Семенов