

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 24 марта 2019 г.

1. В таблице $n \times n$ стоят все целые числа от 1 до n^2 , по одному в клетке. В каждой строке числа возрастают слева направо, в каждом столбце — снизу вверх. Докажите, что наименьшая возможная сумма чисел на главной диагонали, идущей сверху слева вниз направо, равна $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Б. Френкин

2. Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км?

М. Евдокимов

3. Можно ли замостить плоскость параболоми, среди которых нет равных? (Требуется, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одной параболе и чтобы ни одна парабола не переводилась ни в какую другую параболу движением.)

А. Лопатников

4. Про натуральные числа x , y и z известно, что $\text{НОД}(x, y, z) = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Докажите, что x , y и z — квадраты натуральных чисел.

Ю. Маркелов

5. Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции: 1) съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами; 2) пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).

Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу.

И. Митрофанов

6. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.

П. Кожневников, А. Кузнецов