40-й Международный математический Турнир городов

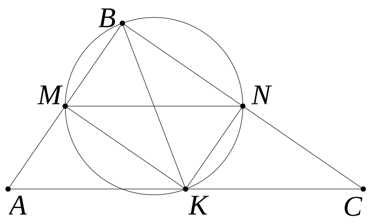
Решения задач осеннего тура

Младшие классы.

Базовый вариант

1. [4] *Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, пересекает катеты этого треугольника в точках M и N. Оказалось, что AC = 2MN. Докажите, что M и N – середины катетов треугольника ABC.*

(М. Евдокимов)



Пусть точка M лежит на AB, точка N – на BC, и пусть точка K – середина AC. Тогда $BK = {}^1/_2\ AC$ (в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы). Так как угол B прямой, то MN – диаметр данной окружности. Поскольку $BK = {}^1/_2\ AC = MN$, то BK – тоже диаметр. Следовательно, $KM \perp AB$, то есть KM – средняя линия треугольника ABC. Аналогично KN – средняя линия.

2. [4] *Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию: числа 1, 2, 3, …, 2n можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.*

(Фольклор)

Ответ: все $n > 1$. **Решение**. $1 + 2$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

1-й способ. Разобьём эти числа на четвёрки подряд идущих, и, если надо, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)=18^2$.

2-й способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1))\dots(n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1))\dots((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

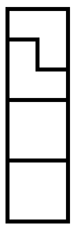
Замечание. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

3. *Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трёх клеток. Могло ли квадратов получиться*

а) *[1] столько же, сколько уголков;*

б) *[3] больше, чем уголков?*

(М. Евдокимов)



а) **Ответ:** могло. Будем считать, что в прямоугольнике 7 строк и 14 столбцов. Разобьём прямоугольник на полоски из двух столбцов, а каждую из полосок – как на рисунке справа.

б) **Ответ:** не могло. Докажем, что требуется хотя бы 14 уголков. Тогда квадратов будет не больше $(7\cdot 14 - 3\cdot 14) : 4 = 14$.

Первый способ. Выставляя фигурки, будем следить за чётностью количества покрытых клеток в каждом столбце. Квадраты не меняют эту чётность, а уголок меняет чётность только одного столбца. Сначала все столбцы были чётными, а должны стать нечётными. Следовательно, потребуется хотя бы 14 уголков.

Второй способ. Раскрасим прямоугольник «в полоску»: все нечётные горизонтали – чёрные, а чётные – белые. При этом чёрных клеток будет на 14 больше, чем белых. Но в квадрате число чёрных клеток равно числу белых, а в уголке их количества отличаются на единицу. Следовательно, потребуется не меньше 14 уголков.

4. [5] *У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?*

(Р. Женодаров)

Ответ. Может. **Первый способ**. Обозначим монеты буквами *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Настя попросит провести взвешивания: *a*?*b*, *c*?*d*, *ab*?*cd*. С точностью до симметрии возможны четыре исхода.

1) $a > b$, $c > d$, $ab > cd$. Тогда *a* – тяжёлая, *d* – лёгкая.
2) $a = b$, $c > d$, $ab = cd$. Тогда *c* – тяжёлая, *d* – лёгкая.
3) $a = b$, $c > d$, $ab > cd$. Тогда *e* – тяжёлая, *d* – лёгкая.
4) $a = b$, $c > d$, $ab < cd$. Тогда *c* – тяжёлая, *e* – лёгкая.

Второй способ. Настя отдаст эксперту четыре монеты и попросит взвесить все три разбиения их на пары. Пусть каждая из этих монет получит метку – сколько раз она была на перевесившей чаше. Для каждого вида оставшейся монеты запишем набор меток: настоящая – 2110, лёгкая – 3111, тяжёлая – 2220. Видно, что все эти случаи различаются, и в каждом из них определяется вид обеих фальшивых монет.

Замечание. Можно доказать, что других способов у Насти нет.

5. [5] *Назовём девятизначное число* <u>*красивым*</u>*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.*

(М. Евдокимов)

Всякое девятизначное число M равно сумме $10^6A + 10^3B + C = 999\cdot(1001A + B) + (A + B + C)$, где A, B, C – числа, образованные тремя первыми, тремя следующими и тремя последними цифрами числа M. Разобьём цифры от 1 до 9 на три тройки с суммой 15 в каждой. Если мы на первые места в числах A, B, C поставим три цифры из одной тройки, на вторые – из другой, на третьи – из оставшейся, сумма $A + B + C$ будет равна $15\cdot 111 = 45\cdot 37$. Так как и 999 делится на 37, то красивое число M при такой расстановке цифр будет кратно 37. Поскольку три цифры по трём местам можно расставить шестью способами и назначить три тройки на первое, второе и третье места тоже можно шестью способами, всего у нас получается $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 1296$ красивых чисел, кратных 37. Теперь достаточно указать три тройки цифр с равными суммами. Например, это $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$.

ДОПОЛНЕНИЕ. В варианте старших классов надо было доказать, что красивых чисел не менее 2018. Приведём несколько решений этой задачи. Будем записывать красивое число $\overline{a_8\ldots a_0}$ в виде таблицы (см. рис.). Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

$$\overline{a_8\ldots a_0} = 10^8 a_8 + \ldots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}.$$

Поэтому из красивого числа, кратного d, где d – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

1-е решение. Рассмотрим таблицу справа. Суммы в её столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6\cdot 216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111, а значит, кратных и 37.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2\cdot 72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Для двух следующих решений нам понадобится следующая

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d, то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + y$ кратны d.

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) - 999x$.

2-е решение. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100\cdot 8 + 10\cdot 18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972. Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5\cdot 3\cdot 216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При этом $5\cdot72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ (навеяно идеей Алиева Рашида, 10 кл., г. Махачкала). Рассмотрим таблицу справа. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24\cdot216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

0	3	7
1	4	8
2	5	9

Замечания. **1**. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

0	7	4
1	8	5
2	9	6

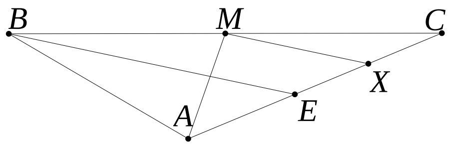
2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

Сложный вариант

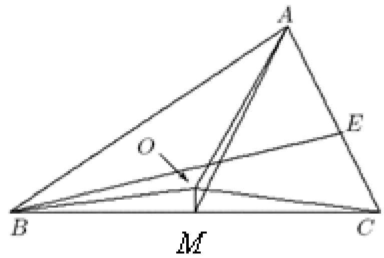
1. [5] *В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, точка E – произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \geq 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.*

(Н. Седракян)

Решение 1. Пусть X – середина отрезка EC. Тогда $MX = {}^{BE}/_{2}$. Как известно, чевиана треугольника меньше хотя бы одной из сторон, выходящих из той же вершины (это следует, например, из свойств наклонных и проекций). По условию, $MX \geq MA$, значит, $MX < MC$. Тем более, $MA < MC$. Следовательно, точка A лежит внутри круга с диаметром BC. А это и значит, что угол A тупой.



Решение 2. Пусть угол A не тупой. Тогда центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на BC или по ту же сторону от BC, что и вершина A. Значит, $2AM \geq 2AO = OB + OC \geq BC > BE$. Противоречие.



Решение 3. (*Арбуханова Гульжаган*) Достроим треугольник до параллелограмма $ABDC$. Пусть AM и BE пересекаются в точке Y. Так как треугольники AYE и DYB подобны и $BE \geq 2AM = AD$, то $BY \geq YD$. Сравнивая это с неравенством треугольника $YM + MB > BY$, получим $MB > MD$. То есть BC – большая диагональ параллелограмма. Это и значит, что угол A тупой.

2. [6] *На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?*

(М. Кузнецов)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение**. Назовём рыцарей и лжецов *принципиальными* людьми.

Оценка. **Первый способ**. (*Бучаев Абдулкадыр*) Будем следить за *балансом* – разностью количеств ответов «Да» и «Нет». В начале и в конце баланс нулевой, с каждым ответом он изменяется на 1. Нулевые значения баланса разбивают ряд жителей на группы. Внутри каждой группы баланс сохраняет знак. Подпевалы всегда увеличивают модуль баланса. Поэтому, чтобы сделать баланс нулевым, принципиальных жителей должно быть не меньше чем подпевал. Это справедливо для каждой группы, а значит, и для всех жителей острова.

Второй способ. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то принципиальных жителей хотя бы 1009.

Пример. Сначала все 1009 подпевал сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 принципиальных жителей можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

3. [8] *Требуется записать число вида 77…7, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида 77…7, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?*

(С. Маркелов)

Ответ. Существует. **Решение 1**. Заметим, что $\underbrace{7\ldots7}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}\cdot 7 = \frac{7\cdot 10^n - 7}{9}$. Число 10 можно записать как (77 – 7):7, а 9 – как 7 + (7 + 7):7. В качестве *n* можно взять 77 или 14 = 7 + 7.

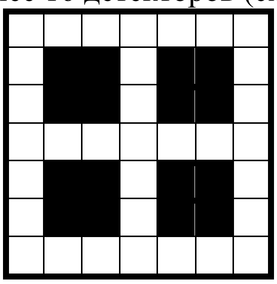
Замечание. В этом решении использовано 12 семёрок. Заменив (77 – 7):7 на 7 + (7 + 7 + 7):7 можно обойтись без использования двузначных чисел.

Решение 2. (*Будун Будунов*) $\underbrace{7\ldots7}_{14}\cdot\left(\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7+7}+\frac{7}{7}\right)=\underbrace{7\ldots7}_{28}$.

4. [8] *Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?*

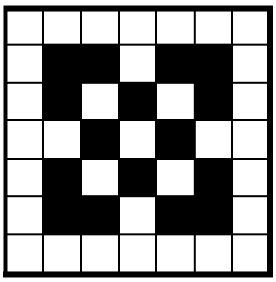
(Р. Женодаров)

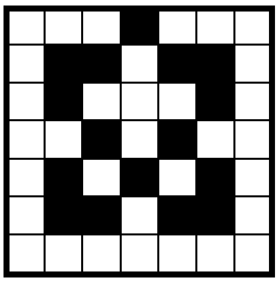
Ответ. 16 детекторов. **Решение**. *Оценка*. В каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора: прямоугольник состоит из трёх доминошек 1×2, полосок, и если детектор в крайней доминошке, мы можем не понять, есть ли корабль на двух других доминошках, а если детектор в средней доминошке, мы можем не понять, какую из крайних доминошек занимает корабль вместе со средней доминошкой. Поэтому всего должно быть не менее 16 детекторов (см. рис. слева).



Пример. На правом рисунке чёрным указано расположение 16 детекторов. Всякий корабль пересекается ровно с одним чёрным квадратом 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырём. В любом случае однозначно определяется положение корабля или его отсутствие.

Замечание. 16 детекторов можно расположить только тремя принципиально различными способами. Один указан в решении, остальные два см. на рисунке ниже.





5. [8] *Равнобокая трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.*

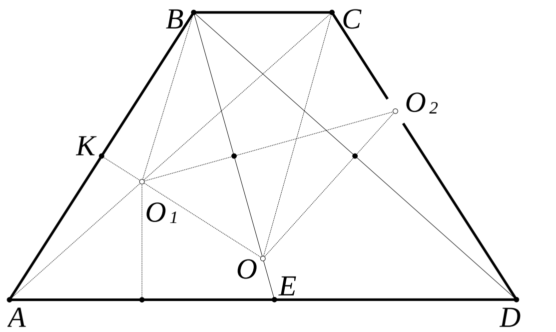
(А. Заславский)

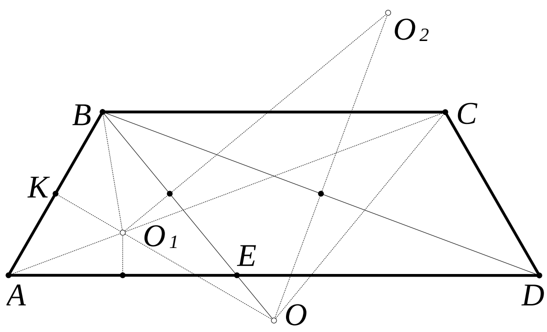
Нетрудно понять, что *AD* – большее основание, треугольник *AEB* остроугольный, и точки *B*, *C* и O_2 лежат по одну сторону от прямой OO_1. Прямые OO_1, O_1O_2 и OO_2 – серединные перпендикуляры к

AB, BE и BD соответственно. Пусть K – середина AB.

Первый способ. Так как $\angle BO_1O_2 = \angle BAD = \angle BOO_2$ (половина центрального угла равна вписанному для треугольников BAE и BAD), то, четырёхугольник OO_1BO_2 вписанный. Поскольку $\angle KO_1B = \angle AEB = \angle CBE = \angle CBO = \angle BCO$, то четырёхугольник OO_1BC вписанный.

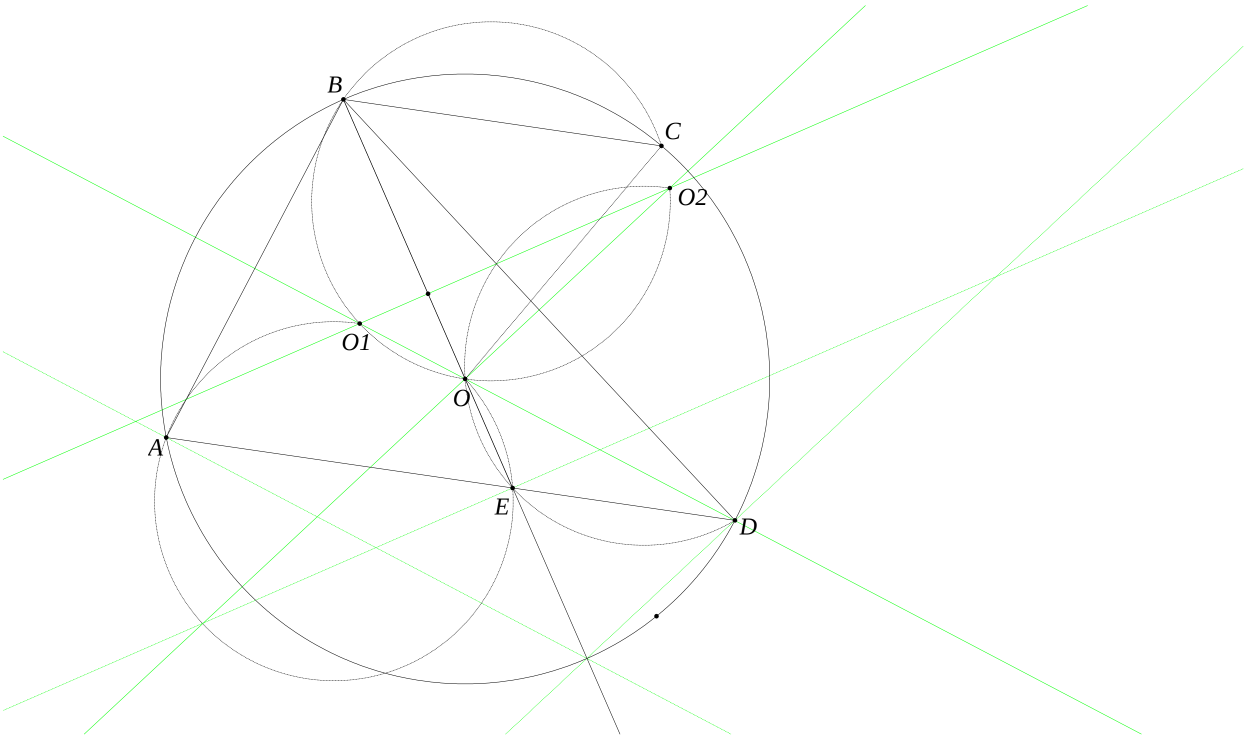
Поэтому точки O, O_1, B, C, O_2 лежат на одной окружности.



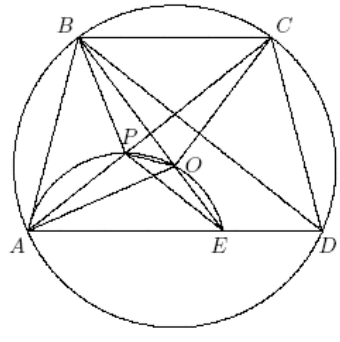


Второй способ. Заметим, что $\angle EAO_1 = 90° - \angle ABE = \angle KOB = \angle ADB = \angle CAD$. Значит, точка O_1 лежит на прямой AC. Поэтому $\angle OCO_1 = \angle EBD = 90° - \angle BOO_2 = \angle OO_2O_1$. Следовательно, точки O, O_1, C, O_2 лежат на одной окружности.

Замечание. Аналогично можно показать, что точка O_2 лежит на луче (но не обязательно на отрезке) DC; точки A, E, O, O_1 лежат на одной окружности; точки D, E, O, O_2 лежат на одной окружности.



Третий способ. Рассмотрим только случай, когда точка O лежит внутри трапеции. Пусть диагональ AC пересекает описанную окружность треугольника OAE в точке P. Тогда $\angle OEP = \angle OAP = \angle OCP$, поэтому $\angle PEA = \angle BEA - \angle OEP = \angle OCB - \angle OCP = \angle ACB = \angle PAE$. Следовательно, $PA = PE$. С другой стороны, $\angle BOP = \angle PAE = \angle PEA = \angle POA$. Значит, треугольники POB и POA равны, а $PB = PA$. Таким образом, точка P совпадает с O_1. Аналогично доказывается, что точка O_2 лежит на луче CD. Поэтому $\angle OCO_1 = \angle DBE = \angle OO_2O_1$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), что и требовалось.



6. Докажите, что

а) [7] *любое число вида* $3k - 2$, *где* k *целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;*

б) [3] *любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.*

(Н. Седракян)

а) Достаточно заметить, что $k^3 - (k + 3)^3 + (3k + 5)^2 = 3k - 2$. **б**) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или –1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт **а**).

7. *В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом можно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется сложным, иначе – простым. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что*

а) [5] *в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;*

б) [7] *в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.*

(М. Дидин)

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а рёбрами – дороги.

а) Условие означает, что граф – дерево. Петя выбирает произвольную вершину. От каждой вершины существует ровно один путь в выбранную. Все рёбра на этом пути он ориентирует в сторону выбранной вершины.

Первым ходом Петя перемещает туриста в выбранную вершину. Все ориентированные пути ведут к туристу. Вася разворачивает одно ребро. Турист идёт по нему. Ясно, что все пути снова ведут к нему. Вася снова разворачивает одно ребро и так далее. Поэтому у Пети всегда есть ход и он не проиграет.

б) По условию граф связен и содержит цикл. Будем доказывать индукцией по количеству вершин, что Вася может гарантировать себе победу, причём для любой изначальной расстановки стрелок перед его ходом (включая «невозможный» случай, когда все стрелки ведут из вершины, где стоит фишка перед первым ходом Васи).

База – простые циклы. Пусть в простом цикле $A_1A_2\ldots A_n$ как-то расставлены стрелки на рёбрах и турист смог сделать ход, пойдя из A_1 в A_2. Вася будет разворачивать стрелки перед ним. Поэтому турист не сможет идти в обратную сторону. Допустим, турист смог дойти до A_1. Тогда перед ним разворачивают стрелку, и ему некуда идти. Петя проиграл.

Шаг индукции. Граф не является простым циклом. Выберем в нём цикл C минимальной длины. Ясно, что C – простой и не содержит ребёр внутри себя. Поэтому есть вершины вне C. Выберем из них вершину V с максимальным расстоянием до C. Обозначим граф без V буквой G. Ясно, что G связен и содержит цикл.

По предположению индукции в G есть выигрышная стратегия для Васи при любой ориентации рёбер. Внутри G Вася будет следовать ей. Так как в G Петя проигрывает, то турист вынужден будет когда-то пойти в V. Тогда Вася развернёт эту стрелку. Турист выйдет из V, а Вася сделает любой допустимый ход в G. Турист пойдёт внутри G. Сейчас у Васи опять есть выигрышная стратегия в G, которой он и будет следовать. Турист снова будет вынужден зайти в V, уменьшив количество стрелок, идущих из G в V. В конце концов они кончатся, и Петя проиграет в G, если он не проиграл раньше.

40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач осеннего тура

Старшие классы
Базовый вариант

1. [3] *Можно ли внутри правильного пятиугольника разместить отрезок, который из всех вершин виден под одним и тем же углом?* *(Е. Бакаев, С. Дворянинов)*

Ответ. Нельзя. **Решение**. Предположим, что удалось так разместить отрезок XY. По какую-то сторону от прямой XY окажутся три вершины пятиугольника – пусть A, B и C. Тогда точки A, B, C, X, Y лежат на одной окружности. Она совпадёт с окружностью, описанной около правильного пятиугольника, поскольку имеет с ней три различные общие точки. Следовательно, точки X и Y лежат не внутри пятиугольника. Противоречие.

2. [4] *Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию: числа 1, 2, 3, …, 2n можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.* *(Фольклор)*

Ответ: все $n > 1$. **Решение**. $1 + 2$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

1-й способ. Разобьём эти числа на четвёрки подряд идущих, и, если надо, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)=18^2$.

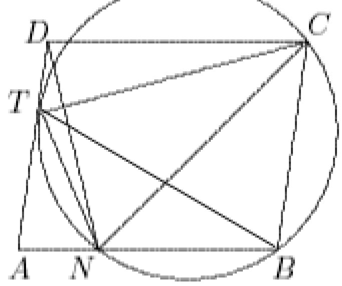
2-й способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1))\ldots(n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1))\ldots((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

Замечание. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

3. [5] *В параллелограмме ABCD угол A острый. На стороне AB отмечена такая точка N, что CN = AB. Оказалось, что описанная окружность треугольника CBN касается прямой AD. Докажите, что она касается её в точке D.* *(М. Евдокимов)*

Решение. Пусть она касается её в точке T.

Первый способ. Так как $BC \parallel AD$, то $BT = CT$. Из равенства вписанных углов NBT и NCT получаем равенство треугольников ABT и NCT. Поэтому $\angle TAB = \angle TNC = \angle TBC = \angle TCB$. Значит, $ABCT$ – параллелограмм, то есть T совпадает с D.



Второй способ. Понятно, что точка T лежит на луче AD. Поскольку $CN = AB = CD$, то $\angle CND = \angle CDN = \angle AND$, то есть ND – биссектриса угла ANC.

С другой стороны, $\angle ATN = \angle TCN$, $\angle TAN = 180° - \angle CBN = \angle CTN$, поэтому и $\angle ANT = \angle TNC$, то есть NT – тоже биссектриса угла ANC. Так как прямые NT и ND совпадают, то и точки T и D – тоже.

Замечание. Решение не зависит от расположения точки T.

4. [5] *Назовём девятизначное число* <u>*красивым*</u>*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 2018 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.* *(М. Евдокимов)*

Будем записывать красивое число $\overline{a_8\ldots a_0}$ в виде таблицы (см. рис.). Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то $\overline{a_8\ldots a_0} = 10^8 a_8 + \ldots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}$.

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

Поэтому из красивого числа, кратного d, где d – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

1-е решение. Рассмотрим таблицу справа. Суммы в её столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6\cdot 216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111, а значит, кратных и 37.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2\cdot 72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Для двух следующих решений нам понадобится следующая

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d, то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + y$ кратны d.

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) – 999x$.

2-е решение. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100·8 + 10·18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972. Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5·3·216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При этом $5·72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ (навеяно идеей Алиева Рашида, 10 кл., г. Махачкала). Рассмотрим таблицу справа. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24·216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

0	3	7
1	4	8
2	5	9

Замечания. **1**. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

0	7	4
1	8	5
2	9	6

2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

5. [5] Петя *расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася – 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?* *(Е. Бакаев)*

Ответ. У Васи больше. **Решение**. Каждой Петиной расстановке поставим в соответствие некоторую расстановку Васи, причём разным расстановкам – разные. Приведём два способа сделать это, для каждого из них найдётся Васина расстановка, которая этим способом не получается. Например, когда короли занимают все белые клетки в каких-то десяти горизонталях, попарно не соседних. Поэтому Васиных расстановок будет больше.

Первый способ. Назовём правую сторону Петиной доски *осью*. Рассмотрим любую расстановку Пети. Отразив всех её королей на чёрных клетках относительно оси, получим какую-то расстановку Васи: 500 королей на белых клетках доски 100×100. Действительно, короли на одной половине доски не будут бить друг друга, потому что до этого не били. А из разных половин друг друга могут бить только короли, соседние с осью отражения. Но соответствующие «чёрные» короли сдвинулись на одну клетку через ось, поэтому тоже не бьют королей со своей бывшей вертикали.

Второй способ (Алиев Рашид, 10 кл., г. Махачкала). Разобьём каждую горизонталь Васиной доски на доминошки. Доминошки образуют доску 100×50. Как бы ни расставил Петя 500 королей в центры доминошек, Вася может сдвинуть каждого короля в белую клетку доминошки. Если после этого какие-то два короля будут бить друг друга, то они будут находиться в соседних доминошках, поэтому били друг друга и в Петиной расстановке.

Сложный вариант

1. [5] *На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?*

(М. Кузнецов)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение**. Назовём рыцарей и лжецов *приниципиальными* людьми.

Оценка. **Первый способ**. (*Бучаев Абдулкадыр*) Будем следить за *балансом* – разностью количеств ответов «Да» и «Нет». В начале и в конце баланс нулевой, с каждым ответом он изменяется на 1. Нулевые значения баланса разбивают ряд жителей на группы. Внутри каждой группы баланс сохраняет знак. Подпевалы всегда увеличивают модуль баланса. Поэтому, чтобы сделать баланс нулевым, принципиальных жителей должно быть не меньше чем подпевал. Это справедливо для каждой группы, а значит, и для всех жителей острова.

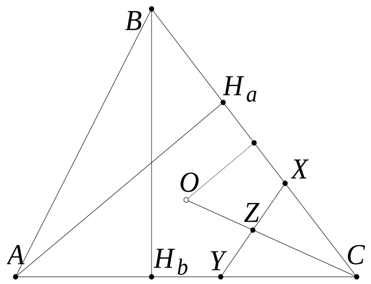
Второй способ. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то принципиальных жителей хотя бы 1009.

Пример. Сначала все 1009 подпевал сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 принципиальных жителей можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

2. [7] *В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b. Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.*

(*Фольклор*)



Решение. Заметим, что $CX : CY = BH_a : AH_b = \cos\angle B : \cos\angle A$.

Кроме того, $\sin\angle OCX = \cos\angle A$, $\sin\angle OCY = \cos\angle B$. Отсюда $ZX : ZY = S_{CZX} : S_{CZY} = CX \sin\angle OCX : CY \sin\angle OCY = 1 : 1$, ч. т. д.

3. Докажите, что

а) [6] *любое число вида $3k - 2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;*

б) [2] *любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.* (*Н. Седракян*)

а) Достаточно заметить, что $k^3 - (k + 3)^3 + (3k + 5)^2 = 3k - 2$. **б**) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или –1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт **а**).

4. [8] *Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.* (*Д. Захаров*)

Решение 1. Вместо клеток будем рассматривать их центры, которые назовём *узлами*. Проведём вертикальную прямую через самой левый узел бумажной фигуры. Если эта прямая не содержит других узлов фигуры, то будем поворачивать прямую по часовой стрелке до тех пор, пока на неё не попадёт ещё один узел фигуры. Мы нашли такую прямую l, содержащую не менее двух узлов фигуры, что все узлы фигуры лежат по одну сторону от l.

Каждый узел плоскости находится на каком-то ориентированном расстоянии от l (расстояния до узлов, лежащих в той же полуплоскости, что и фигура, берём со знаком минус). Пусть r – максимальное из таких расстояний до чёрных узлов. Докажем, что все узлы с расстоянием, большим r, останутся белыми. Предположим противное и рассмотрим первый такой узел, который стал чёрным. Значит, он накрыт сдвигом фигуры. Но тогда фигура накрывает ещё хотя бы один узел с таким же расстоянием (l фиксирована, расстояния – тоже, фигура сдвигается). Так как фигура накрывает хотя бы два белых узла, то окрашивать узел нельзя. Противоречие.

Решение 2. Построим клетчатый прямоугольник, содержащий все черные клетки. Обозначим прямую, содержащую правую сторону прямоугольника за p. Аналогично определим прямые l («левая»), v («верхняя»), n («нижняя»). Заметим теперь, что у M ровно одна самая верхняя клетка, иначе ни одна клетка выше v не будет покрашена (рассмотрим первый момент, когда многоугольник вышел за v, тогда у него выше v хотя бы две точки и они обе белые). Аналогично есть одна самая правая, левая и нижняя. Обозначим их V, P, L, N соответственно (ясно, что они все различны).

Покажем теперь, что если была покрашена клетка выше v, то она была покрашена клеткой V фигуры M. Предположим противное и возьмём первый момент, когда это не так. Тогда некая клетка выше v была закрашена другой клеткой фигуры M. Посмотрим на клетку, где в этот момент находилась V. Она тоже выше v, и при этом уже чёрная (иначе условие покраски не выполняется), значит была покрашена нами ранее. Но тогда она была покрашена клеткой V и фигура M лежала на плоскости так же. Но такого быть не может, так как тогда в M было бы не менее, чем две белые клетки. Аналогично доказываются утверждения про клетки правее p, левее l и ниже n. Рассмотрим теперь любую клетку, которая лежит и выше v, и правее p. С одной стороны она могла быть покрашена только клеткой V, с другой – только клеткой P. Значит покрасить мы её не можем.

Замечание. Связность фигуры-шаблона не важна. Если фигура не помещается ни в горизонталь, ни в вертикаль, то окрашено будет конечное число клеток.

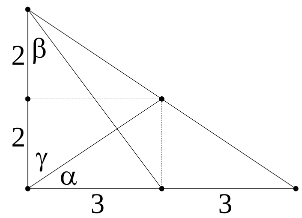
5. [8] *Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше 30°. Каково наибольшее возможное значение k?* *(Н. Седракян)*

Ответ. $k = 3$.

Оценка. **Первый способ**. Пусть $h_1 \le h_2 \le h_3$ – высоты треугольника, m_1, m_2, m_3 – медианы из соответствующих вершин (на самом деле $m_1 \le m_2 \le m_3$, но это не будет использовано). Имеем тогда $m_3 \ge h_i$ для $i = 1, 2, 3$. Из конца m_3 опустим перпендикуляры на смежные стороны. Каждый из них равен половине соответствующей высоты и, значит, не больше $m_3/2$. Поэтому прилегающие к m_3 углы не больше 30°. Аналогично один из углов при m_2 не больше 30°.

Второй способ. Пусть дан треугольник ABC с медианами AX, BY, CZ. Оба угла BAX и BCZ не могут быть больше 30°: иначе точки A и C лежат внутри окружности с хордой ZX и диаметром, в два раза большим ZX, но при этом $AC=2ZX$, то есть отрезок, равный диаметру, лежит строго внутри окружности – противоречие. Аналогично в каждой из двух других пар максимум один угол больше 30°.

Пример 1. Рассмотрим сначала треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Пусть BK и CL – его медианы. Тогда $\angle ACL = 30°$, $\angle BCL = 60°$, $\angle CBK > 30°$ (поскольку биссектриса угла B проходит между катетом и медианой). Теперь чуть уменьшим катет AC. При этом угол ACL немного увеличится (то есть станет больше 30°), а углы BCL и CBK немного уменьшатся, но останутся больше 30°.



Пример 2. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6 (см. рис.). Имеем $\operatorname{tg} 30° < \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \gamma$, поскольку $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$.

6. [9] *На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R, что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R, то на каждой дуге колеса величиной в 1° будет след хотя бы одной отмеченной точки.* (*И. Митрофанов*)

Решение 1. Разделим колесо на 360 дуг и занумеруем их, начиная с точки O в порядке «прокатывания». Докажем индукцией по k, что можно выбрать окружность длины $360s$, прокатив которую по прямой, мы получим следы внутри первых k дуг.

База ($k = 1$). Достаточно выбрать s, большее координаты первой отмеченной точки.

Шаг индукции. По предположению индукции найдётся s_k, при котором следы оставлены на первых дугах. Пусть они оставлены точками с координатами $n_1, ..., n_k$.

Заметим, что незначительное изменение s не повлияет на ситуацию: те же точки оставят следы на тех же дугах. Пусть это происходит для всех $s \in (s_k(1 - \varepsilon), s_k(1 + \varepsilon))$. Рассмотрим отмеченную точку с координатой n_{k+1}, большей всех $n_1, ..., n_k$, а также $360s_k(\varepsilon^{-1} + 1)$. Пусть $m \le \frac{n_{k+1}}{360s_k} < m+1$ (m – целое число). Тогда $m > \varepsilon^{-1}$.

Найдём такое $s_{k+1} \in (s_k(1 - \varepsilon), s_k(1 + \varepsilon))$, чтобы точка n_{k+1} оставила след на данном расстоянии (по окружности) $360ts_{k+1}$ от O (число $t < 1$ выберем так, чтобы этот след оказался на (k+1)-й дуге окружности, соответствующей s_{k+1}). Иными словами, $n_{k+1} = 360(ms_{k+1} + ts_{k+1})$, откуда

$s_{k+1} = \frac{n_{k+1}}{360(m+t)} = \frac{r}{m+t}$, где $r = \frac{n_{k+1}}{360} < (m + 1)s_k$. Это значение подходит, поскольку

$-\dfrac{r}{m(m+1)} < r\left(\dfrac{1}{m+1}-\dfrac{1}{m+t}\right) < s_k - s_{k+1} \le r\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+t}\right) < \dfrac{r}{m(m+1)}$, а $\dfrac{r}{m(m+1)} < \dfrac{s_k}{m} < \varepsilon s_k$.

Решение 2. Пусть на числовой прямой отмечено бесконечное число натуральных точек t_1, t_2, t_3, ...

Докажем индукцией по n такое утверждение: для любого набора положительных чисел a_1, ..., a_n с суммой 1 найдётся колесо такой длины S, что разделив его на дуги длин a_1S, ..., a_nS (именно в таком порядке) и запустив из 0 (поставив в 0 началом первой дуги), мы обязательно получим строго внутри каждой из дуг след какой-то отмеченной точки.

Для наглядности покрасим каждую дугу в свой цвет и прокатим колесо по прямой, считая, что каждая точка прямой окрашивается в цвет дуги, которая по точке проезжает. Тогда прямая разобьётся на отрезки n разных цветов, соответствующих дугам. Нам надо найти такую длину колеса, чтобы для каждого цвета нашлась отмеченная точка, попавшая внутрь отрезка этого цвета.

Сначала заметим, что если для данного набора нужное S найдено, то подойдёт также любое колесо чуть меньшей или чуть большей длины. В самом деле, колесо длины S соберёт по отметке на каждую дугу, пройдя определённое расстояние. Это соответствует тому, что некоторые отмеченные точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ лежат на прямой каждая строго внутри отрезка своего цвета (цвета все различны). Небольшое изменение длины колеса соответствует гомотетии прямой с центром в 0 и коэффициентом, близким к 1. Ясно, что можно выбрать коэффициент гомотетии настолько близким к 1, что картина не изменится: все точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ останутся внутри своих «растянутых» отрезков.

Перейдём к доказательству.

База $n = 1$ очевидна: можно взять колесо иррациональной или просто достаточно большой длины.

Шаг индукции. Пусть для всех наборов из n чисел утверждение доказано. Докажем его для набора a_1, ..., a_n, a_{n+1}. Рассмотрим набор a_1, ..., a_{n-1}, $a_n + a_{n+1}$. Для него нужное S найдётся. Рассмотрим момент, когда в каждой из дуг для этого набора образуется след от отмеченной точки.

Это соответствует тому, что отмеченные точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ лежат на прямой строго внутри отрезков n разных цветов, точка t_{i_n} лежит на отрезке длины $(a_n + a_{n+1})S$. Если точка t_{i_n} делит свой отрезок как раз в отношении $a_n : a_{n+1}$, увеличим немного S, чтобы все точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ попали на свои же «растянутые» отрезки, но точка t_{i_n} уже делила бы свой отрезок в другом отношении.

Теперь вернёмся к набору a_1, ..., a_n, a_{n+1}, прокатим колесо найденной длины S по прямой.

Точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ попадут в отрезки разных цветов, и только отрезки одного, скажем, зелёного цвета (соответствующие одной из дуг a_nS, $a_{n+1}S$, пусть дуге $a_{n+1}S$), возможно, не содержат ни одной отмеченной точки.

Заметим, что есть сколь угодно большие отмеченные точки, на расстоянии не более чем S слева от которых есть зелёный отрезок. Пусть мы можем делать гомотетию с коэффициентом, не большим $1+\varepsilon$ так, чтобы точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ остались внутри своих «растянутых» отрезков.

Проедем колесом настолько большое расстояние K, чтобы колесо сделало целое число оборотов (последний окрашеный отрезок Z зелёный), уже собрало отметки на все дуги, кроме последней, чтобы $K\varepsilon$ было больше S, и чтобы на расстоянии не более S после точки K нашлась отмеченная точка $t_{i_{n+1}}$.

Увеличим длину колеса, сделав гомотетию с коэффициентом $1 + x$, где $x < \varepsilon$. Тогда зелёный отрезок Z растянется, его новыми концами будут точки $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ и $K + xK$ соответственно. Очевидно, можно подобрать $x < \varepsilon$ так, чтобы $K + Kx$ стало больше $t_{i_{n+1}}$ (ведь $K\varepsilon > S$), но при этом больше на величину, меньшую Sa_{n+1}. Тогда $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ будет меньше $t_{i_{n+1}}$, то есть точка $t_{i_{n+1}}$ попадёт на «растянутый» зелёный отрезок Z.

7. *Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе*

а) [10] *ровно 2n жителей;*

б) [4] *ровно $2n - 1$ житель.* (*Г. Погудин*)

Пусть k – количество жителей в городе. Будем изображать ситуацию в игре таблицей с n строками и k столбцами: в i-й строке будут перечислены благосостояния $a_{i1}, ..., a_{ik}$ всех жителей i-го города в порядке неубывания. Пусть S_j – сумма чисел в j-м столбце.

а) *Стратегия Рокфеллера*. Если $S_j = S_{j+1}$, выбрать всех жителей из j-го столбца.

Предположим, что $S_j = S_{j+1}$; тогда $a_{ij} = a_{i,j+1}$ при всех i. После марксова перераспределения числа $S_{j+1}, ..., S_k$ не уменьшатся. С другой стороны, у одного из выбранных жителей (пусть он в i-м городе) благосостояние станет больше чем a_{ij}. Это значит, что одна из сумм S_k при $k \geq j + 1$ увеличится (та, в которую попало новое число). Поэтому последовательность $S_k, S_{k-1}, ..., S_1$ лексикографически увеличится. Это не может продолжаться бесконечно долго (ибо наборов из k чисел с фиксированной суммой конечное количество), так что в некоторый момент все числа $S_1, ..., S_k$ окажутся различными.

Пусть $S_1 \geq 1$. Тогда $S_i \geq i$ при всех i, откуда $nk = S_1 + ... + S_k \geq 1 + 2 + ... + k = ½\, k(k + 1)$, то есть $k \leq 2n - 1$. Противоречие.

Значит, $S_1 = 0$, и Рокфеллер победил..

б) Пусть $k = 2n - 1$. Применяя стратегию из пункта **а**), Рокфеллер либо выиграет, либо добьётся состояния $S_i = i$ при всех $i = 1, ..., k$. Покажем, как ему выиграть, начиная с такой позиции.

Скажем, что игра находится в *i-й ситуации* $(1 \leq i \leq n + 1)$, если (возможно, после перенумерации строк) выполнены следующие условия:

1) при $j = 1, 2, ..., i - 1$ в j-м столбце стоят j единиц в верхних клетках, а остальные числа – нули;

2) в i-м столбце нижние $n + 1 - i$ элементов – нули.

Покажем, что в рассматриваемый момент игра находится в i-й ситуации при некотором i. Переставим строки так, чтобы количества нулей в них не убывали сверху вниз. Пусть при некотором $i \leq n$ в i-м столбце не стоит i единиц; выберем наименьшее такое i. Тогда (из условия на нули в строках) в предыдущих столбцах единицы стоят «треугольником», а в i-м столбце есть $n + 1 - i$ нулей, то есть игра в i-й ситуации. Если же такого i нет, то в первых n столбцах единицы стоят «треугольником», и игра в $(n$+1)-й ситуации.

Покажем, что при $i > 1$, если игра в i-й ситуации, Рокфеллер может уменьшить номер ситуации одним ходом. Так он рано или поздно добьётся 1-й ситуации, то есть своего выигрыша.

Действительно, Рокфеллер выбирает (i–1)-й столбец. Пусть j – наименьший индекс, при котором число в j-й строке уменьшится (т.е. превратится в 0) в результате действия Маркса. Поскольку $j \leq i-1$, то после этого хода (и упорядочивания строк, при котором этот 0 переместится в начало строки) будет наблюдаться j-я ситуация (здесь мы уже не требуем равенств $S_k = k$), что и требовалось.