

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 20 марта 2016 г.

1. На доске написано произведение $\log_{\square} \square \cdot \dots \cdot \log_{\square} \square$, всего 50 множителей. У Васи есть 100 карточек: $\boxed{2}$, \dots , $\boxed{51}$ и $\textcircled{52}$, \dots , $\textcircled{101}$. Вася выкладывает круглые карточки на места кружочков и квадратные — на места квадратиков. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может получить Вася.

Георгий Жуков

2. На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K , затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM , полученные таким образом, касаются одной окружности.

Егор Бакаев

3. Прямоугольник $p \times q$, где p, q — натуральные взаимно простые числа, $p < q$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратов. Найдите суммарный периметр всех этих треугольников.

Алексей Толтыго

4. На сборах теннисистов было 30 мастеров и 30 юниоров. Каждый мастер сыграл с одним мастером и пятнадцатью юниорами, а каждый юниор — с одним юниором и пятнадцатью мастерами. Докажите, что найдутся такие два мастера и два юниора, что эти мастера сыграли между собой, юниоры — между собой, каждый из двух мастеров — хотя бы с одним из двух юниоров, а каждый из двух юниоров — хотя бы с одним из двух мастеров.

Александр Грибалко

5. В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?

Михаил Евдокимов

6. На доске написано N чисел: все они различны, и одно из них равно 0. Можно взять любой ненулевой многочлен, каждый коэффициент которого равен одному из написанных чисел (среди коэффициентов могут быть равные), и дописать на доску все корни этого многочлена. За несколько таких операций на доске оказались все целые числа от -2016 по 2016 (и возможно ещё какие-то числа). Найдите наименьшее возможное значение N .

Георгий Жуков