

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы задачи

- 4 1. На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
- 4 2. Двадцать детей — десять мальчиков и десять девочек — встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка — сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.
- 5 3. Можно ли в клетках таблицы 19×19 отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах 10×10 было разное количество отмеченных клеток?
- 5 4. По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел?
- 6 5. Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
- 8 6. Пусть I — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC , касающейся катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_0 на прямую AI , и перпендикуляр, опущенный из B_0 на прямую BI , пересекаются в точке P . Докажите, что прямые CP и AB перпендикулярны.
- 9 7. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из m человек, команда математиков — из n , причем $m \neq n$, а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | | |
|---|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3 | 1. | На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске? |
| 4 | 2. | На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — отважным, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке? |
| 6 | 3. | Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон. |
| 6 | 4. | Числа $1, 2, \dots, 100$ стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50? |
| 7 | 5. | На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну — в красный цвет, другую — в синий, третью — в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке «красный, синий, желтый» (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов.) Докажите, что сколько бы ходов ни было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой. |
| 4 | 6. | Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений. |
| 5 | а) | Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника. |
| 5 | б) | Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми). |
| 5 | 7. | Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. |
| 7 | а) | Могут ли они гарантировать результат более 500? |
| 7 | б) | Могут ли они гарантировать результат не менее 999? |