Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.

Сложный вариант, младшие классы.

1. Доска состоит из четырех угловых квадратов 50×50: левого верхнего, левого нижнего, правого верхнего и правого нижнего. Предположим, что в одном из угловых квадратов, скажем, в левом верхнем, нет ферзей. Пусть в правом нижнем квадрате всего x ферзей. В левом нижнем квадрате тогда находится не более $50-x$ ферзей (так как ферзи левого и правого нижних квадратов находятся в 50 строчках прямоугольника 50×100). Аналогично, в правом верхнем угловом квадрате находится не более $50-x$ ферзей. Общее количество ферзей на доске не превосходит тогда $x+50-x+50-x=100-x$. Но ферзей всего 100, а x неотрицательно — это возможно лишь при $x=0$. Значит, в правом нижнем квадрате ферзей тоже нет, то есть все ферзи находятся в левом нижнем и правом верхнем квадратах.

Рассмотрим у нашей доски клетчатую диагональ, соединяющую левую нижнюю и правую верхнюю клетки, а так же все диагонали, параллельные этой и пересекающие левый нижний и правый верхний квадраты. Их будет ровно 99, и все 100 ферзей находятся на этих диагоналях. Тогда какие-то два ферзя находятся на одной диагонали и значит бьют друг друга — противоречие.

2. Ответ: можно.

Пусть гири весят a, b, c, d грамм.

Первое решение.

Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири a, b, на другой — c, d;

2) на одной чаше гири a, c, на другой — b, d;

3) на одной чаше гири a, d, на другой — b, c;

4) одна чаша пустая, на другой — a, b, c, d.

Пусть $b=a+x$, $c=a+y$, $d=a+z$. Из первых трех взвешиваний (сложив результаты), мы знаем разность между $3a+(b+c+d)$ и $2(b+c+d)$, то есть $x+y+z$, либо точно, либо с ошибкой в 1. Из последнего взвешивания мы знаем $a+b+c+d=4a+(x+y+z)$ либо точно, либо с ошибкой в 1. Причем ошибка на 1 может быть только ровно в одном из этих случаев. Значит мы знаем разность $(x+y+z)$ и $4a+(x+y+z)$, то есть $4a$, с точностью до 1. Тогда легко найдем a из делимости на 4. Аналогично найдем b, c, d.

Второе решение.

Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири a, b, c, на другой — d;

2) на одной чаше гири a, b, d, на другой — c;

3) на одной чаше гири a, c, d, на другой — b;

4) на одной чаше гири b, c, d, на другой — a;

Из показаний весов мы получаем следующие числа (одно, возможно, с ошибкой):

$x=a+b+c-d$, $y=a+b-c+d$, $z=a-b+c+d$, $t=-a+b+c+d$.

Решаем эту систему: например, чтобы найти a, складываем три первых уравнения и вычитаем из результата четвертое, получаем: $4a=(x+y+z-t)$, откуда $a=(x+y+z-t)/4$. Аналогично находим b, c и d. Одно из чисел x, y, z, t мы знаем, возможно, с ошибкой в 1 грамм. Поэтому в выражениях для чисел a, b, c, d числители могут не делиться на 4. Но легко однозначно восстановить их истинные значения (добавляя или вычитая 1 так, чтобы числитель делился на 4). Откуда находим массы камней.

3. Ответ: 1/2.

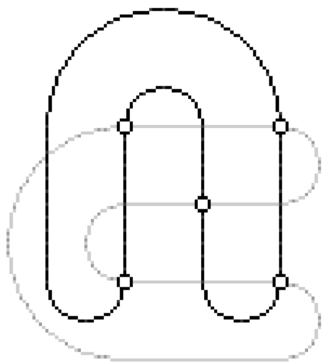
Немного переформулируем задачу. Продлим медиану AD на ее длину за точку D, получим точку D'. Тогда $CABD'$ — параллелограмм (так как диагонали этого четырехугольника делятся пополам их точкой пересечения), откуда угол DAB равен углу $DD'C$. Поскольку углы CAB и ACD' параллелограмма в сумме дают 180°, условие того, что угол CAB тупой, означает, что угол ACD' острый. В итоге имеем: Илья, зная только длину стороны AD' (она равна удвоенной длине AD), смог доказать, что в треугольнике CAD' углы при стороне CD' острые. При каком сотношении сторон AC и AD' это возможно?

Ясно, что если треугольник CAD' равнобедренный ($AC = AD' = 2AD$), то углы при основании острые (ведь они равны и их сумма меньше 180°). Значит, ответ $AD/AC = 1/2$ подходит (и мы доказали для этого случая утверждение Ильи).

Если треугольник CAD' неравнобедренный ($AC \neq AD'$), то например возьмем большую из сторон AC и AD' за гипотенузу, а меньшую — за катет, и построим треугольник CAD', в котором один из углов ACD' или $AD'C$ будет прямым. Достроим теперь параллелограмм $CABD'$ и получим треугольник CAB, который вполне мог оказаться у Сережи, и в этом треугольнике один из углов DAB или CAB будет прямым. Значит Илья не смог бы доказать свое утверждение для $AD/AC \neq 1/2$.

4. Ответ: могут.

Пример изображен на рисунке:



5. *Первое решение.* Раскроем в произведении $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$ скобки. Получим сумму $1+(a_1+\cdots+a_n)+(a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n)+(a_1a_2a_3+\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_n)+\cdots+a_1a_2\ldots a_n$. В первой скобке стоит просто сумма чисел $a_1, \ldots, a_n$, слагаемые во второй скобке получаются так — выбираем пару чисел из $a_1, \ldots, a_n$ и записываем их произведение, слагаемые в третьей скобке получаются так — выбираем тройку чисел из $a_1, \ldots, a_n$ и записываем их произведение, и так далее. Ясно, что сумма чисел во второй скобке не превосходит $(a_1+\cdots+a_n)^2$, сумма чисел в третьей скобке не превосходит $(a_1+\cdots+a_n)^3$, и так далее. Значит, наше произведение не превосходит $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n} < 2$.

Второе решение. Докажем по индукции, что для всех k от 1 до n верно утверждение: $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k) < 1+2(a_1+\cdots+a_k)$.

Для $k=1$ утверждение очевидно ($1+a_1 < 1+2a_1$, так как a_1 положительно).

Сделаем шаг индукции.

Пусть для некоторого k, где $k<n$, верно $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k) < 1+2(a_1+\cdots+a_k)$. Домножим это неравенство на $(1+a_{k+1})$. Получим:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{k+1}) < (1+2(a_1+\cdots+a_k))(1+a_{k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant 1+2(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}(1+2\cdot\frac{1}{2}) = 1+2(a_1+\cdots+a_{k+1}).$$

Утверждение доказано.

Взяв $k=n$, получим, что $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < 1+2(a_1+\cdots+a_n) < 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2$, что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. На самом деле выполнено более точное неравенство. Можно доказать, что при постоянной сумме $a_1+\cdots+a_n$ выражение $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$ принимает наибольшее значение, когда числа $a_1, \ldots, a_n$ равны. Значит

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Как известно из курса математического анализа, выражение под корнем не превосходит числа Эйлера $e = 2,71828..$, откуда $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < \sqrt{e} = 1,64...$

Кстати, неравенство $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \leq 2$ равносильно неравенству $\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n \geq \frac{1}{2}$, которое сразу следует из неравенства Бернулли.

6. Обозначим точку пересечения CC_1 с $A'B'$ за C', середину AC — M_B, а середину BC— M_A. Заметим, что $CB'M_BC'$ — вписанный, так как $\angle CC'B' = \angle CM_BB'$. Аналогично вписанный $CA'M_AC'$. Поэтому углы $\angle CC'M_B$, $\angle CC'M_A$ равны по $90° + \varphi$. Проведем через вершины A и B прямые параллельные M_BC', M_AC' соответственно. Пусть они пересеклись в точке C''. Из подобия получим, что точка C'' лежит на прямой CC'. При этом CC' является бисcктрисой в треугольнике $AC''B$. По известному свойству, что биссектриса проходит через середину дуги описанной окружности, получаем, что $\angle AC_1B = 180° - 2(90° - \varphi) = 2\varphi$.

7.

а) Пусть b_n равно 1, если наибольший нечетный делитель числа n имеет остаток 1 при делении на 4, и -1 в противном случае. Тогда $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Разобьем последовательность чисел b_n на строчки таким образом, чтобы длина первой строчки равнялась 1, длина второй – 2, ..., длина k-ой – 2^{k-1}:

$b_1,$

$b_2, b_3,$

$b_4, b_5, b_6, b_7,$

$\dots,$

$b_{2^{k-1}}, \dots, b_{2^k-1},$

$\dots$

Первые пять строк выглядят так:

$1,$

$\mathbf{1}, -1,$

$\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

$\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

$\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, \mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

Заметим, что каждая строка, начиная с третьей, получается “втасовыванием” в предыдущую строку последовательности $1, -1, 1, -1, \dots$ такой же длины. (Для наглядности, числа, взятые из предыдущей строки, выделены жирным шрифтом.) Действительно, $b_{2m} = b_m$ для любого m; при этом $(k+1)$-ая строка имеет вид:

$b_{2^k}, b_{2^k+1}, b_{2^k+2}, b_{2^k+3}, b_{2^k+4}, b_{2^k+5}, \dots$

что сводится к

$b_{2^{k-1}}, 1, b_{2^{k-1}+1}, -1, b_{2^{k-1}+2}, 1, \dots$

Мы воспользовались тем, что 2^k делится на 4 при $k > 1$.

Докажем, что сумма всех чисел в k-й строке равна нулю при $k > 1$. Воспользуемся индукцией по k. База индукции $b_2 + b_3 = 0$ очевидна.

Предположим, что сумма всех чисел в k-й строке равна нулю. Поскольку элементы $(k+1)$-й строки — это элементы k-й строки плюс еще четное количество чередующихся 1 и -1, то и сумма всех чисел в $(k+1)$-й строке равна нулю.

Отсюда легко следует (вновь по индукции), что $a_{2^k-1} = 1$ для любого $k > 0$, то есть число 1 встречается в последовательности (a_n) бесконечно много раз.

б) Докажем теперь, что при $k > 1$ у k-й строки есть начальный участок, сумма чисел в котором равна $k-1$. Воспользуемся индукцией. База вновь очевидна.

Пусть длина начального участка с суммой $k-1$ в k-й строке равна m_k. При четном m_k положим $m_{k+1} = 2m_k - 1$, а при нечетном m_k положим $m_{k+1} = 2m_k$. Рассмотрим первые m_{k+1} чисел в $(k+1)$-й строке Легко понять, что в любом случае начальный участок $(k+1)$-й строки длины m_{k+1} получается вставлением между числами начального участка k-й строки нечетного количества чередующихся 1 и -1. Поэтому сумма увеличивается на 1, что и требовалось.

По доказанному в пункте а), $a_{2^{k-1}-1} = 1$, что соответствует концу $(k-1)$-й строки. Поэтому $a_{2^{k-1}-1+m_k} = k$. Так как при увеличении n на единицу a_n изменяется (в ту или другую сторону) на единицу, мы видим, что a_n обязательно принимает все значения от 1 до k при n пробегающем натуральные числа от $2^{k-1}-1$ до $2^{k-1}-1+m_k$. Отсюда следует, что каждое натуральное число встречается в последовательности (a_n) бесконечно много раз.

Критерии проверки

Как всегда, «+» ставится за любое правильное решение, «±» за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, «∓» — за неверное решение, однако с существенным продвижением, «−» за неверное решение. «0» ставится, если задача не записана. Оценки «+.» «−». (варианты «+» и «−») ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем «±» и «∓». Оценка «+/2» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком «+!».

При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

Базовый вариант, младшие классы.

Задача 1.

∓ Коробки располагаются по возрастанию числа карандашей в них и карандаши выбираются последовательно. Но нет ключевого утверждения, что в очередной коробке карандашей больше, чем выбрано из предыдущих коробок. Например, написано только, что в очередной коробке есть карандаши другого цвета, чем в предыдущей коробке.

Задача 2.

± За ошибку в вычислениях, приведшую к неверному ответу, если после её исправления получается верное решение.

∓ *и выше* есть идея разбить на пары чисел с разностью 50, из каждой пары взято ровно одно число

−. Только верный ответ 2525 или ответ и частные случаи выбора чисел

Задача 3.

− За разбор только случая равностороннего треугольника

Задача 5.

− Все встречи только в точке старта

∓ Есть идея, что встреча повторится через тот же промежуток времени

Сложный вариант, младшие классы.

Задача 1.

± Задача решена, но не доказано утверждение, что если в одном из угловых квадратов ферзей нет, то в двух соседних с ним (по стороне) угловых квадратах будет по 50 ферзей

∓ Доказано только, что если в одном из угловых квадратов ферзей нет, то в двух соседних с ним (по стороне) угловых квадратах будет по 50 ферзей

Задача 2.

± Только верный пример взвешиваний без доказательства

Задача 3.

± Сказано, что если отношение больше 1/2, то один угол может быть острым, если меньше 1/2, то другой тупым, если 1/2, то всё получается. Во всех трёх случаях есть попытки доказательства шевелением третей вершины треугольника, но они нестрогие.

$+/2$ Только найдено верное отношение (с доказательством), или только доказано при таком отношении утверждение Ильи

$\mp$ Доказано неравенство в одну сторону (например, что AD/AC не превосходит $1/2$)

$\mp$ Доказана половина утверждения Ильи (например, что $\angle BAC$ острый) при отношении $1/2$.

$-$. Только ответ

Задача 4.

$-$. Доказано, что дороги одного цвета образуют несамопересекающийся цикл

$-$. Доказано, что каждая дорога должна пересекать дорогу другого цвета

Задача 5.

Оценка не снижается, если нет доказательства, что сумма конечной геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$ и начальным членом $1/2$ меньше 1.

$+$ Оценка не снижается, если ссылаются на неравенство Коши или если говорят, что максимум произведения достигается при равных.

$\pm$ Утверждается без доказательства, что задача сводится к случаю $a_1 = \cdots = a_n$, без объяснения или неправильно и задача решается для этого случая

$\mp$ Задача сведена к случаю $a_1 = \cdots = a_n$, дальнейшего продвижения нет

$\mp$ Есть идея, что при раскрытии скобок слагаемые группируются, и что сумма оценивается геометрической прогрессией, но это не доказано

$-$ Рассмотрен только случай $n = 2$

Задача 6.

$-$. Только ответ

Задача 7а).

$-$. Утверждается без доказательства, что если $a_n = 1$, то и $a_{2^n+1} = 1$

$-$. Утверждается без доказательства, что члены последовательности с номерами $2^n - 1$ равны 1

$\mp$ Сказано, что у нечетных чисел остатки от деления на 4 наибольшего нечетного делителя чередуются, а остатки от деления на 4 наибольшего нечетного делителя у четного числа и у его половины совпадают, больше ничего не сделано

$\pm$ То же, что и в предыдущем пункте, но говорится, что отсюда следует, что сумма остатков (по модулю 4) наибольших нечетных делителей нечетных чисел равна 0, для четных чисел проводится аналогичное рассуждение и утверждается без объяснений, что 1 встретится бесконечное число раз.

Задача 7б)

$\mp$ Для некоторого отрезка $[a_k, b_k]$, который строится удвоением предыдущего, школьник пытается доказать утверждение о том, что там есть число k, но для этого отрезка это неверно

Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.

Сложный вариант, старшие классы.

1. Ответ: 5/4.

Рассмотрим среди вертикальных линий 2-ю, 4-ю и 6-ю, и среди горизонтальных тоже 2-ю, 4-ю и 6-ю. Эти линии делят доску на 16 прямоугольников, каждый из которых разделен на 4 клетки, раскрашенные в шахматном порядке. Если в каждом таком прямоугольнике отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных не больше 5/4, то это же будет верно и для большого прямоугольника (в самом деле, если в i-ом прямоугольнике a_i — площадь белых клеток, а b_i — площадь черных, и $a_i \leq (5/4)b_i$, то сложив все эти неравенства получим нужное неравенство для всей доски).

Рассмотрим теперь отдельный прямоугольник, разбитый на 4 клетки. Пусть длины его сторон — x (по горизонтали) и y (по вертикали). Ясно, что у одной из белых клеток длина горизонтальной стороны не меньше $x/2$. Пусть для определенности эта клетка верхняя левая. Горизонтальную прямую, разделяющий прямоугольник, можно тогда передвигать вниз до тех пор, пока отношение площади левой верхней клетки (белой) к левой нижней (черной) не станет равно 2. При этом условие задачи (о том, что площадь любой белой клетки меньше удвоенной площади любой черной клетки) по-прежнему будет выполнено, а суммарная площадь белых клеток только увеличится (или не изменится). Дальше прямую двигать нельзя (нарушится условие задачи). Аналогично, после этого можно двигать вправо вертикальную прямую (пока площадь верхней левой клети не станет в 2 раза больше площади верхней правой). Стороны верхней левой клетки будут тогда равны $2x/3$ и $2y/3$, и площадь белых клеток будет равна $4xy/9+xy/9 = 5xy/9$, а площадь черных будет равна $xy-5xy/9 = 4xy/9$. Получили, что отношение площади белых клеток к площади черных равно 5/4, и больше быть не может.

Осталось привести пример, когда в каждом из 16 прямоугольников нужное отношение равно 5/4. Разделим доску так, чтобы наши 16 прямоугольников были одинаковыми квадратами, в каждом из них левая верхняя клетка была квадратной, причем ее стороны в 2 раза длиннее сторон правой нижней клетки. Ясно, что так разделить доску можно, и получится искомый пример.

2. Ответ: не обязательно.

Приведем один из примеров, который нетрудно описать. Будем считать, что в пространстве заданы три направления: вверх-вниз, вправо-влево, вперед-назад. Сначала заполним все пространство кубиками обычным образом. Выберем теперь один из кубиков. К нему примыкают такие шесть бесконечных слоев толщиной в один кубик: два параллельных слоя соответственно слева и справа, направленные вверх-вниз, два других — спереди и сзади, направленные влево-вправо, и еще два — снизу и сверху, направленные вперед-назад. Сдвинем каждый слой вдоль его направления на половину длины ребра кубика (первые два сдвинем вверх, следующие два — влево, следующие два — вперед). Все пространство по-прежнему будет заполнено, но выбранный кубик ни с одним другим не будет граничить по целой грани.

3. Всегда может выигрывать второй игрок. Разберем два случая.

Пусть $N > 2$ нечетно.

Докажем, что второй может каждым своим очередным ходом объединять две наибольшие имеющиеся кучки.

Сначала первый обязательно сделает кучку из двух орехов, после чего второй сделает кучку из трех орехов, и ситуация после хода второго будет такая: в наибольшей куче нечетное число орехов, а в каждой из остальных кучек по одному ореху.

В такой ситуации у первого есть две возможности. Либо он сделает кучку из двух орехов — и тогда второй присоединит ее к наибольшей куче. Либо он увеличит наибольшую кучку на один камень — тогда в ней будет четное число орехов, и так как N нечетно, то останется еще хотя бы одна кучка из одного ореха, и второй сможет присоединить один орех к наибольшей кучке. В итоге снова получается описанная ситуация.

Мы видим, что у второго всегда есть ход. Кучи со временем кончатся, и первый проиграет.

Пусть $N > 2$ четно.

Заметим, что после хода любого игрока число куч уменьшается на одну. Пусть второй действует так же, как и в случае нечетного N, до тех пор, пока перед его ходом не останутся две или три кучи

В первом случае он просто объединяет оставшиеся кучи (это возможно, так как в наибольшей четное число орехов, а в другой — два или один).

Во втором случае, если в двух «маленьких» кучах по одному ореху, он просто объединяет «маленькие» кучи и оставляет первому две кучи с четным числом орехов — и тот проиграл; если в «малениких» кучах один и два ореха, то добавляет один орех в наибольшую кучу (и снова первый проиграл).

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$.

Так как четырехугольник A_1BCD вписан в окружность, имеем $BO \cdot OD = A_1O \cdot OC$ (из подобия треугольников BOA_1 и COD). Аналогично, $BO \cdot OD = AO \cdot OC_1$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD_1$ и $AO \cdot OC = B_1O \cdot OD$.

Из первых двух равенств получаем, что $OC/AO = OC_1/A_1O$, из двух других получаем, что $BO/OD = B_1O/OD_1$.

Заметим, что условие параллельности сторон BC и AD трапеции $ABCD$ можно записать в виде $BO/OD = OC/AO$ (из подобия треугольников BOC и DOA).

Но тогда (из предыдущего) $BO_1/OD_1 = OC_1/A_1O$, то есть стороны B_1C_1 и A_1D_1 параллельны.

Аналогично проверяем, что непараллельность сторон AB и CD влечет непараллельность сторон A_1B_1 и C_1D_1.

Значит $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция, что и требовалось доказать.

5. Пусть b_n равно 1, если наибольший нечётный делитель числа n имеет остаток один при делении на 4, и равно -1 в другом случае. Тогда $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Докажем по индукции, что $a_{2^k-1} = 1$. База выполнена. Пусть $a_{2^k-1} = 1$. Заметим, что $b_m = b_{2^k+m}$ при $m < 2^k$ и $m \neq 2^{k-1}$. Действительно: если $m = a \cdot 2^l$, где a — нечётно, то $2^k + m = (2^{k-l} + a) \cdot 2^l$, где $l < k$, то есть $2^{k-l} + a$ — наибольший нечётный делитель числа $2^{k-1} + m$. А так как $m \neq 2^{k-1}$, то $k > l + 1$, то есть 2^{k-l} делится на 4.

При $k = l + 1$ имеем $m = 2^{k-1}$ и $m + 2^k = 3 \cdot 2^{k-1}$, то есть $b_{2^{k-1}} = 1$ и $b_{3 \cdot 2^{k-1}} = -1$.

Тогда по предположению индукции и по только что доказанному:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_{2^{k+1}-1} &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{2^k-1}) + b_{2^k} + (b_{2^k+1} + b_{2^k+2} + \dots + b_{2^{k+1}-1}) = \\ &= 2 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{2^k-1}) - 2 + b_{2^k} = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Докажем теперь по индукции, что на отрезке $1 \dots 2^k - 1$ последовательность a_n принимает значение k. Для первых двух отрезков утверждение верно. Пусть $a_x = n - 1$, где $x < 2^{n-1}$, докажем, что $a_{2^n+x} = n + 1$. Тогда по предположению индукции и по доказанному ранее

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_{2^n+x} &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{2^n-1}) + b_{2^n} + (b_{2^n+1} + b_{2^n+2} + \dots + b_{2^n+x)} = \\ &= 1 + 1 + (b_1 + b_2 + \dots + b_x) = n + 1. \end{aligned}$$

Заметим, что на отрезке $2^n - 1 \dots 2^n + x$ встречаются все числа от 1 до $n + 1$. Поэтому каждое число встречается бесконечно много раз.

Замечание: из решения следует, что $a_{2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\dots} = n + 1$.

6. Можно считать, что старший коэффициент $P(x)$ равен 1. Если бы степень многочлена $P(x)$ была четной, то при достаточно больших по модулю x выполнялось бы неравенство

$P(x) > 0$, и могло найтись лишь конечное число пар целых чисел m, n, для которых выполнено равенство $P(m) + P(n) = 0$. Значит, степень $P(x)$ нечетна (будем этим пользоваться в дальнейшем без напоминания).

Заметим теперь, что, начиная с некоторого x, $P(x)$ монотонно увеличивается при увеличении x и стремится к бесконечности при стремлении x к бесконечности. И аналогично, начиная с некоторого x, $P(x)$ монотонно уменьшается при уменьшении x и стремится к минус бесконечности при стремлении x к минус бесконечности.

Кроме того, для данного числа n может найтись лишь конечное число таких чисел m, что $P(m) = -P(n)$ (поскольку многочлен может принимать одно и то же конкретное значение лишь в конечном числе точек, не превышающем его степень).

Учитывая все вышесказанное, получаем, что для любого наперед заданного числа C есть пары чисел m, n, для которых $P(m)+P(n) = 0$, причем числа m и n разных знаков, и модуль каждого из них больше C.

Пусть степень $P(x)$ равна k, и $P(x) = x^k + ax^{k-1} + \ldots$ (здесь и далее троеточием обозначены слагаемые меньших степеней). Легко подобрать такое число d, что многочлен $P(x-d)$ будет иметь вид $x^k+bx^{k-2}+\ldots$, то есть коэффициент при степени $k-1$ будет нулевым. Действительно, $P(x-d) = (x-d)^k + a(x-d)^{k-1} + \cdots = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + \ldots$, и достаточно взять d равным a/k. Докажем, что точка $(d; 0)$ и является центром симметрии графика. Обозначим $P(x-d)$ за $Q(x)$. Достаточно доказать, что $Q(x) = -Q(-x)$ при любом x.

Итак, $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + \ldots$, и нам известно, что уравнение $Q(m) + Q(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в таких числах m и n, что $m-d$ и $n-d$ — целые. Возьмем такие достаточно большие по модулю решения $m > 0$ и $n < 0$. Докажем, что $|m| = |n|$. Пусть $|m| < |n|$, например $n = -m-1$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(m) + Q(n) = Q(m) + Q(-m-1) = \\ = m^k + bm^{k-2} + \cdots + (-m-1)^k + b(-m-1)^{k-2} + \cdots = \\ = -km^{k-1} + R(m), \end{aligned}$$

где $R(x)$ — некий фиксированный многочлен степени $k-2$. Если m достаточно велико, то число km^{k-1} будет много больше, чем $|R(m)|$, и значит сумма $-km^{k-1} + R(m)$ будет меньше нуля. При увеличении модуля n сумма $Q(m) + Q(n)$ будет еще уменьшаться (так как будет уменьшаться $Q(n)$). Поэтому не может быть $|m| < |n|$ при достаточно больших по модулю m и n. Аналогично не может быть и $|m| > |n|$. Значит, есть бесконечно много чисел m таких, что $Q(m) + Q(-m) = 0$, то есть многочлен $Q(x) + Q(-x)$ имеет бесконечно много корней. Это возможно, только если этот многочлен нулевой, то есть выполнено тождество $Q(x) + Q(-x) = 0$, а это как раз и означает, что график многочлена $Q(x)$ симметричен относительно точки $(0; 0)$, и значит график $P(x)$ симметричен относительно точки $(d; 0)$.

7. а) Ответ: сможет.

Пусть при первых 29 попытках Витя отвечает так: в k-ой попытке отвечает «да» на k-ый вопрос и «нет» — на остальные вопросы. Заметим, что любые две попытки из первых 29-ти отличаются ровно в двух ответах. Поэтому количество верных ответов в любых двух этих попытках либо одинаково, либо отличается на 2. Если есть две попытки, скажем i-я и j-я, в которых число верных ответов различается на 2, мы сразу знаем верные ответы на i-й и j-й вопросы. Тогда, сравнивая например i-ю попытку с остальными попытками, узнаем верные ответы на все вопросы с первого по 29-й. Ответ на 30-й вопрос теперь легко узнать из первой попытки: посчитаем, сколько верных ответов было на первые 29 вопросов, и, сравнивая с сообщением о числе верных ответов при первой попытке, найдем ответ на 30-й вопрос.

Остается случай, когда количество верных ответов в любых двух попытках с первой по 29-ю одинаково. Это означает, что ответы на все вопросы с первого по 29-й одинаковы. Но тогда по сообщению о числе верных ответов в первой попытке мы поймем, это ответы «да», или ответы «нет»(в первом случае нам могут сказать, что верных ответов было 1 или 2, во втором случае — что верных ответов было 28 или 29). Затем узнаем ответ на 30-й вопрос (тоже из первой попытки).

Заметим, что этот метод работает, если общее число вопросов в тесте не меньше 5.

б) Разобьем вопросы теста на группы по 5 вопросов (с 1-го по 5-й, с 6-го по 10-й и т.д.) При первой попытке ответим «нет» на все вопросы.

Покажем теперь, как за 4 следующие попытки узнать все ответы на вопросы в первой группе. На вопросы с 6-го по 30-й отвечаем в этих попытках «нет», а в ответах на вопросы с 1-го по 5-й отвечаем так:
при 2-й попытке отвечаем «да» на все пять вопросов;
при 3-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 2-й вопросы (на остальные три — «да»);
при 4-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 3-й вопросы (на остальные три — «да»);
при 5-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 4-й вопросы (на остальные три — «да»).

Заметим, что из сообщений о числе верных ответов в 1-й и 2-й попытках мы знаем, например, сколько было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й в первой попытке.

Если при второй попытке на оба вопроса 1 и 2 мы ответили верно или на оба — неверно, то после третьей попытки мы знаем ответы на вопросы 1 и 2, после четвертой — на вопрос 3, после пятой — на вопрос 4, а значит на 5-й вопрос тоже знаем (так как знаем, сколько было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й при второй попытке). Аналогично с вопросами 1, 3 и 1, 4. Значит остается случай, когда среди ответов при второй попытке на вопросы 1, 2 ровно один верный, среди ответов на вопросы 1, 3 — ровно один верный, и среди ответов на вопросы 1, 4 — ровно один верный. То есть при второй попытке на вопросы 1, 2, 3 наши ответили были либо все верны, либо все неверны.

Но мы уже знаем, каких ответов на вопросы с 1-го по 5-й больше (когда мы отвечаем на их все «нет»): верных или неверных. Значит, мы знаем ответы на вопросы 2, 3, 4, а тогда и на вопрос 1, а значит и на 5-й вопрос.

Аналогично узнаем ответы на вопросы 2-й, 3-й, 4-й и 5-й группы (потратив на каждую 4 попытки). Тогда за $1 + 4 \cdot 5 = 21$ попытку знаем ответы на вопросы 1 — 25. Заметим, что ответы на вопросы последней группы можно узнать за 3 попытки, поскольку мы уже знаем, сколько верных ответов мы сделали на эти вопросы при самой первой попытке. Значит всего хватит 24 вопроса.

Критерии проверки.

Как всегда, «+» ставится за любое правильное решение, «+−» за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, «−+» — за неверное решение, однако с существенным продвижением, «−» за неверное решение. «0» ставится, если задача не записана. Оценки «+.», «−.» (варианты «+» и «−») ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем «+−» и «−+». Оценка «+/2» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком «+!» . При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

Базовый вариант.

Задача 2.

+− Найдены $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ и доказано, что сумма $x_3 + \cdots + x_n = 0$, но ответа нет (решение не закончено)

−+ Доказательство того, что $x_3 + \cdots + x_n = 0$, без дальнейшего продвижения

$-+$ Найдены $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, но дальнейшего продвижения нет (нет идеи, что сумма $x_3 + \dots + x_n = 0$)

Задача 3.

Разбор только случая правильного 30-угольника оценивается не выше, чем $-+$

$+$. Если проведенное рассуждение годится только для случая, когда центр окружности лежит внутри 30-угольника

$-$. Есть нереализованная идея сделать численно равными длину A_1A_2 и площадь OA_1BA_2

Задача 5.

$-$ За раскраски только отдельных конкретных картинок или раскраски небольшой части соседних прямоугольников (локальная конструкция)

Сложный вариант

Задача 1.

$+$. верно разобран случай прямоугольника 2×2 клетки, есть пример для доски 8×8, и утверждается, что если в каждом из 16 прямоугольников 2×2 клетки отношение не больше $5/4$, то и во всем прямоугольнике тоже (доказательство не приводится из-за его очевидности)

$+-$ верно разобран случай прямоугольника 2×2 клетки, есть пример для доски 8×8, но доказательство утверждения, что если в каждом из 16 прямоугольников 2×2 клетки отношение не больше $5/4$, то и во всем прямоугольнике тоже, доказано неверно

$+-$ есть оценка, но нет примера

$-+$ только верно разобран случай прямоугольника 2×2

Задача 2.

$+-$ верный пример без достаточных пояснений (например, не показано, как картинка продолжается на все пространство)

Задача 3.

$+-$ верно разобран только четный случай

$-+$ верно разобран только нечетный случай

Задача 5.

$-+$ за доказательство того, что $a_{2^n-1} = 1$

Задача 7а).

$+-$ верный алгоритм без пояснений.

$+-$ небольшие погрешности в алгоритме (например, устранимая ошибка в разборе какого-нибудь подслучая)

Задача 7б).

$+-$ небольшие погрешности в алгоритме (в этом случае за 7а)б) ставилось $+ +-$)