27 Турнир Городов - решения задач. Осенний тур, тренировочный вариант, 8-11 классы

8-9 классы

Задача 1.

Достаточно проверить выполнения неравенства треугольника для отрезков H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1. Рассмотрим прямоугольный треугольник CH_1B. H_1M_2 — медиана к его гипотенузе, следовательно $H_1M_2 = 1/2BC$. Аналогично $H_2M_3 = 1/2AC$, $H_3M_1 = 1/2AB$. Из неравенства треугольника для треугольника ABC: $AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$, $AC + AB > BC$. Поделив все неравенства на 2 получим (учитывая только что доказанные равенства), что $H_3M_1 + H_1M_2 > H_2M_3$, $H_1M_2 + H_2M_3 > H_3M_1$ и $H_2M_3 + H_3M_1 > H_1M_2$, что и требовалось.

Задача2. Ответ: нет.

Решение.

Рассмотрим пример: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В вершины A, C, B_1, D_1 запишем 0; в вершины B, D, A_1, C_1 запишем 1. Нетрудно убедиться, что после двух операций в каждой вершине окажется исходное число (а значит и после 10 операций тоже).

Задача3. Ответ: $1/11 \leq a < 1/10$.

Решение.

Пусть $a_1, \dots, a_{11}$ — длины получившихся отрезков. Тогда $1 = a_1 + \cdots + a_{11} \leq 11a$, откуда $a \geq 1/11$.

Покажем сначала, что если $a \geq 1/10$, то существует такое разбиение, в котором найдутся 3 отрезка, из которых треугольник составить нельзя.

Положим $a_1 = \cdots = a_9 = 1/10$, $a_{10} = a_{11} = 1/20$. Тогда условие задачи выполняется, но из отрезков a_9, a_{10}, a_{11} треугольник составить нельзя.

Осталось доказать, что для всякого a, такого что $1/11 \leq a < 1/10$ условие задачи выполняется. Докажем от противного. Пусть найдутся 3 отрезка, без потери общности — a_1, a_2, a_3, из которых треугольник составить нельзя. Тогда нарушается одно из условий неравенства треугольника, к примеру $a_1 \geq a_2 + a_3$. Но $a \geq a_1 \geq a_2 + a_3 = 1 - a_1 - a_4 - a_5 - \cdots - a_{11}$, откуда $9a \geq a_1 + a_4 + a_5 + ... + a_{11} \geq 1 - a$, а значит $a \geq 1/10$ — противоречие.

Задача4. Ответ: 196.

Решение.

Поставим каждой клетке в соответствие пару чисел (i, j), $i, j = 1, \dots, 15$, начиная с левого верхнего угла; первое число — координата по вертикали (сверху вниз), второе — координата по горизонтали (слева направо).

Приведем пример обхода. Начнем обход с клетки (9,7). Рассмотрим 2 случая:

1) с клетки верхней половины доски ходим либо на 8 клеток вправо либо на 9 клеток влево, пока хотя бы одна из этих операций возможна (так как $9 + 8 > 15$, то возможна только одна из них!). Если ни то, ни другое невозможно, ходим на 9 клеток вниз.

2) с клетки нижней половины доски ходим либо на 9 клеток вправо либо на 8 клеток влево, пока хотя бы одна из этих операций возможна. Если ни то, ни другое невозможно, ходим на 8 клеток вверх.

Легко проверить, что при таком способе обхода мы обойдем все клетки доски, кроме клеток вида $(i, 8)$ и $(8, j)$ ("креста"), то есть 196 клеток.

Пусть при обходе мы на некотором шаге оказались на клетке "креста". Ясно, что и на предыдущем и на следующем мы были на клетках "креста". То есть мы обошли не больше 29 клеток. Таким образом, мы доказали, что 196 — максимальное количество клеток при любом обходе.

Задача 5.

Первое решение. Обозначим наши монеты: a, b, c, d, e, f.

1 взвешивание: $X = a + b$; 2 взвешивание: $Y = c + d$.

Если $X = Y$, то взвешиваем e. Если $e = X/2$, то f — фальшивая, иначе e фальшивая.

Если $X > Y$, то e и f — настоящие. Взвешиваем $Z = a + c + e$.

1) $Z = X \cdot 1,5$, тогда в X и в Z — настоящие, b — фальшивая.

2) $Z = Y \cdot 1,5$ — аналогично.

3) если фальшивая в Z (a или c), тогда или $Z = X + 1/2Y$ (и тогда фальшивая a), или $Z = 1/2X + Y$ (и тогда фальшивая c).

Если $X < Y$ — аналогично.

Второе решение. В предыдущем решении третье взвешивание зависело от результата двух предыдущих. В настоящем решении все три взвешивания делаются независимо от результатов предыдущих.

Занумеруем монеты: 1,2,3,4,5,6. Взвесим их так: 1,2,3 — 1-е взвешивание; 1,4,5 — 2-е взвешивание; 2,4 — 3-е взвешивание.

Пусть получились результаты измерений $3a$, $3b$ и $2c$ соответственно.

Обозначим вес настоящей монеты x, а фальшивой — y (x не равно y).

Если первая монета фальшивая, имеем: $3a = 2x + y$, $3b = 2x + y$, $2c = 2x$; $a = 2/3x + 1/3y$, $b = 2/3x + 1/3y$, $c = x$, то есть $a = b$ и не равно c.

Если вторая монета фальшивая, имеем: $3a = 2x + y$, $3b = 3x$, $2c = x + y$; $a = 2/3x + 1/3y$, $b = x$, $c = 1/2x + 1/2y$, то есть $b < a < c$ ($x < y$) или $c < a < b$ ($x > y$).

Если третья монета фальшивая, имеем: $3a = 2x+y$, $3b = 3x$, $2c = 2x$); $a = 2/3x+1/3y$, $b = x$, $c = x$, то есть $c = b$ и не равно a.

Если четвертая монета фальшивая, имеем: $3a = 3x$, $3b = 2x + y$, $2c = x + y$; $a = x$, $b = 2/3x + 1/3y$, $c = 1/2x + 1/2y$, то есть $a < b < c$ ($x < y$) или $c < b < a$ ($x > y$).

Если пятая монета фальшивая, имеем: $3a = 3x$, $3b = 2x + y$, $2c = 2x$, $a = x$, $b = 2/3x + 1/3y$, $c = x$, то есть $c = a$ и не равно b.

Если шестая монета фальшивая, имеем: $3a = 3x$, $3b = 3x$, $2c = 2x$; $a = x$, $b = x$, $c = x$, то есть $c = b = a$.

Все полученные отношения для a, b и c взаимоисключающие, а значит, сравнив a, b и c, мы можем однозначно определить фальшивую монету.

10-11 классы

Задача 1. Ответ: нельзя.

Решение.

Пусть существуют натуральные a, b, n, для которых верно $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$. Заметим что $a < a+1 \leq b$. Имеем: $n^2 < a^3 < (a+1)^3 <= b^3 < (n+1)^2$. Из этого следует, что $(n+1)^2 - n^2 > (a+1)^2 - a^2$, то есть $2n+1 > 3a^2+3a+1$, откуда $2n > 3a^2+3a$. Возводя в квадрат, получаем $4n^2 > 9a^4+18a^3+9a^2 > 4a^3$, откуда $n^2 > a^3$. Но $n^2 < a^3$ — противоречие. Значит, таких чисел нет.

Задача 2. Ответ: можно.

Решение.

Возьмем какой-нибудь отрезок длины a. Построим отрезок AB длины $a(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ (для этого построим отрезок длины $a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной a, далее $a\sqrt{3}$ как диагональ прямоугольника $a \times a\sqrt{2}$, затем $a\sqrt{5}$ как диагональ прямоугольника $a\sqrt{2} \times a\sqrt{3}$).

Возьмем отрезок AC такой, что его длина равна $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, и C не лежит на прямой AB. На отрезке AB отметим точку D такую, что $AD = a$. Проведем прямую DE, параллельную BC (E лежит на AC). Из подобия треугольников ABC и ADE: $AE/AD = AC/AB$, то есть $AE = AC \cdot AD/AB = 1$, а значит AE — искомый отрезок.

Задача 3. Смотрите решение задачи 5 младших классов.

Задача 4.

Докажем сразу пункт б) (тогда решение пункта а) получится автоматически).

б) Пусть угол A прямой, F — центр квадрата со стороной BC. Докажем что AF — биссектриса угла BAC. По теореме синусов: $\sin BAF/\sin ABF = BF/AF = CF/AF = \sin CAF/\sin ACF$. Но $\angle ABF + \angle ACF = 180°$, следовательно $\sin ABF = \sin ACF$. Отсюда $\sin BAF = \sin CAF$, $\angle BAF = \angle CAF = 45°$. Значит, AF — перпендикуляр к DE. $S_{DEF} = DE \cdot AF/2$. Пусть K — точка пересечения AF и BC, $AC = a$, $AB = b$. Тогда $DE = (a+b)/\sqrt{2}$; $S_{ABC} = S_{AKC} + S_{ABK} = (a+b)/2\sqrt{2} \cdot AK$. $S_{DEF}/S_{ABC} = AF/AK$. Надо доказать: $AF \geq 2AK$, то есть $KF \geq AK$. Расстояние от A до BC равно $ab/\sqrt{a^2+b^2}$ Расстояние от F до BC равно $\sqrt{a^2+b^2}/2$, $ab/\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}/2$, следовательно $AK \leq KF$, значит S_{DEF}/S_{ABC}, что и требовалось.

Задача 5. Ответ: нет.

Решение.

Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим тетраэдр ACB_1D_1. При повороте через ребро этот тетраэдр переходит в тетраэдр, получаемый из BDA_1C_1 параллельным переносом, и наоборот, BDA_1C_1 переходит в тетраэдр, получаемый параллельным переносом из ACB_1D_1. Чтобы вернуть куб на первоначальное место, его надо перекатить четное количество раз. (представим, что куб перекатывается по шахматной доске. на каждом шаге цвет клетки меняется) Значит тетраэдр ACB_1D_1 перейдет в себя. При повороте на 90 градусов AC переходит в BD, но этот отрезок не принадлежит ACB_1D_1, значит поворот верхней грани не мог произойти.