Решения задач 23-го Турнира Городов
(основной вариант, 10-11 класс, осень 2001 года)

ЗАДАЧА 1.

Предположим, что нам удалось разместить все красные и все синие точки на одной окружности. Пусть M центр этой окружности; проведем прямую OM. В точке O восстановим перпендикуляр к OM, получим прямую m. Обозначим за K и L точки пересечения окружности с прямой m. Луч MO пересекает окружность в точке N, а луч OM - в точке V.

Так как точка O лежит внутри треугольника с синими вершинами, то на каждой из дуг KNL и KVL есть хотя бы одна синяя точка. То же верно про красные точки. (*)

Докажем теперь, что расстояние от точки O до любой точки на дуге KNL меньше, чем расстояние до любой точки на дуге KVL. Для доказательства достаточно рассматривать только половины этих дуг - в силу симметрии. Пусть точка A лежит на дуге KN, а точка B на дуге KV. Тогда по теореме косинусов получаем :

$$OA^2 = MA^2 + MO^2 - 2 * MA * MO * \cos(\angle AMO)$$

$$OB^2 = MB^2 + MO^2 - 2 * MB * MO * \cos(\angle BMO)$$

Заметим: $MB = MA = r$ как радиусы. Тогда, вычитая из второго равенства первое, получим:

$$OB^2 - OA^2 = 2 * r * MO * (\cos(\angle AMO) - \cos(\angle BMO)) > 0,$$

так как косинус при увеличении угла уменьшается(на отрезке от 0 до π). То есть $OB > OA$. (**)

А теперь посмотрев на (*) и (**) находим, что в случае нашего предположения найдется синяя точка (на дуге KNL), расстояние до которой меньше чем до какой-то красной точки(на дуге KVL). Противоречие.

ЗАДАЧА 2.

Ответ: существуют.

Проведем доказательство индукцией по количеству чисел.

База индукции : $k = 2$. Очевидно существуют.

Пусть имеется k чисел: $a_1 < \ldots < a_k$, для которых выполнено условие задачи.

Возьмем $q > p > a_k$, где q и p - простые числа. Рассмотрим набор из $k+1$ числа: $b_1 = p,\ b_2 = q * a_1,\ b_3 = q * a_2, \ldots, b_{k+1} = q * a_k$. Тогда $b_1 < b_2 < \ldots < b_{k+1}$, так как $q * a_1 > p$ и $q * a_{n+1} > q * a_n$.

При этом НОК$(b_{m+2}, b_{m+1}) = q*$НОК(a_{m+1}, a_m), т.е. для НОК пар $(b_2, b_3), \ldots, (b_k, b_{k+1})$ все выполняется (неравенства умножаются на q, а q взаимнопросто с a_i).

Далее: НОК$(b_1, b_2) = p * q * a_1$

НОК$(b_2, b_3) = q*$НОК(a_1, a_2)

$p * q * a_1 > a_2 * q * a_1 \geq q*$НОК$(a_1, a_2) =$ НОК(b_2, b_3)

т.к. $p > a_i$. То есть НОК(b_1, b_2) >НОК(b_2, b_3).

По методу полной математической индукции получаем, что сущечтвует любое, наперед заданое, количество таких чисел, в том числе 100.

ЗАДАЧА 3.

Ответ: 88.

Рассмотрим числа на диагонали $a_1, a_2, ..., a_8$; индексы проставлены в том порядке, в котором числа появляются на диагонали. Например раположение может быть таким (а не обязательно по порядку):

$a_2 a_3 a_1 \dots a_8 a_7$(в направлении из одного угла в противоположный)

Тогда $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 5, \dots, a_7 \geq 13$. Утверждается, что $_8 \geq 39$. Действительно, в тот момент, когда мы проходим через последнее поле на диагонали (последнее из тех, на которых мы еще не были), в покидаемой нами половине доски (доска разбивается диагональю на две половины) к этому моменту все поля должны быть уже заставлены числами, так как в противном случае мы уже не сможем на эти поля поставить числа. В итоге получаем $a_8 \geq 36$, т.е. общая сумма≥ 85.

Докажем, что оценку для восьмого поля можно улучшить до 39. Пусть наша диагональ белого цвета. Рассмотрим змейку, которая получится при прохождении второй половины доски. Она состоит из строго чередующихся белых и черных клеток. Белых клеток в этой половине доски 12. Так как клетки разного цвета чередуются, то черных клеток в этой змейке может быть не более 13. Черных же клеток здесь у нас 16! Т.е. $16 - 13 = 3$ клетки черного цвета должны быть пройдены змейкой еще до того, как она попала во вторйю половину. Вот и получаем $3+36 = 39$, т.е. $a_8 \geq 39$, и вся сумма ≥ 88.

Построим пример для 88:

	a	b	c	d	e	f	g	h
1 |	1	2	27	28	29	30	31	32
2 |	64	3	26	25	24	23	22	33
3 |	63	4	5	6	19	20	21	34
4 |	62	61	60	7	18	17	16	35
5 |	57	58	59	8	9	10	15	36
6 |	56	55	54	53	52	11	14	37
7 |	47	48	49	50	51	12	13	38
8 |	46	45	44	43	42	41	40	39

Сумма на диагонали $a1 \dots h8$ равна $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 39 = 88$.

Задача 4.

Пусть изначально дан 4-угольник ABCD. Отметим в нем сторону AB и поставим на ней стрелку от B к A (далее говорим просто «стрелка», подразумевая именно эту стрелку).

На нулевом шаге совместим сторону AB с заранее нарисованным на плоскости горизонтальным отрезком длины равной |AB|. При этом стрелка, без ограничения общности, будет направлена справа налево.

После каждого шага нашего процесса будем поворачивать наш 4-угольник так, чтобы отмеченная сторона AB совпадала с нарисованным отрезком. При этом стрелка может «смотреть» в любую из двух сторон.

Рассмотрим получающиеся 4-угольники, для которых стрелка направлена справа налево. Для любых 7 таких 4-угольников хотя бы 2 будут иметь одинаковый порядок оставшихся сторон (т.к. 3!=6). Проделывая нашу процедуру, мы не меняем сумму углов 4-угольника у конца стрелки и противоположного ему (то, что угол у конца стрелки - важно!). А если у двух выпуклых 4-угольников стороны идут в одинаковом порядке, и суммы углов между соответствующими сторонами равны, то сами 4-угольники равны. В нашем случае это равенство будет иметь место, так как стрелка направлена в одну и ту же сторону. Более того, 4-угольники просто совпадут, так как отмеченные стороны совпадут и «смотрят» справо налево.

Таким образом, среди 4-угольников, отмеченная сторона которых «смотрит» в одну и ту же сторону, не более шести 4-угольников, которые нельзя совместить поворотом. Направлений для стрелки два, следовательно всего 4-угольников может получиться не более 12.

Предъявим 4-угольник, из которого нашими операциями можно получить 12 различных. Возьмем 4 точки на окружности так, чтобы длины сторон получившегося 4-угольника были бы различны. Затем пошевелим немного вершины так, чтобы суммы противоположных углов стали различными, но 4-угольник оставался выпуклым при достаточно большом количестве операций. Ставим стрелку на стороне AB и сразу считаем, что она совмещена с нарисованным отрезком. Сначала получим шесть 4-угольников не трогая AB. Затем один раз повернем треугольник со стороной AB и изменим, тем самым, сумму углов у конца стрелки. После чего получим еще шесть 4-угольников.

Ни один 4-угольник из первой шестерки не может быть получен поворотом из какого-либо 4-угольника второй шестерки, так как при совмещении их стороной AB получается несовпадение углов, а переворачивать (брать зеркальное отражение) нельзя.

Ответ: 12

ЗАДАЧА 5.

Пусть $A_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_m}$ - первое число арифметической прогресии (такая запись означает, что число A_1 состоит из m цифр и его цифры $a_1, a_2, \ldots, a_m$). А разность прогресии $\overline{D = d_1 d_2 \ldots d_k}$.

Пусть $n = 1000 * \max(m, k)$. В i-ом члене прогресии оказалось подчеркнуто число i. Пусть $i = 1 + 10^n$, тогда $a_i = a_1 + d * 10^n$, следовательно $\overline{a_i = d_1 d_2 \ldots d_k 00 \ldots 00 a_1 \ldots a_k}$ (количество нулей равно n-m). Здесь подчеркнуто число 100...001 (n-1 ноль). Следовательно, так как $a_1 \neq 0$ и перед ним стоят (n-m) нулей, то единственым возможным способом подчеркивания числа $1 + 10^n$ является ситуация, когда $a_1 = 1$ (в силу $n \gg k$,$n \gg m$),иначе все это число должно быть среди $\overline{d_1 \ldots d_k}$ или $\overline{a_1 \ldots a_m}$, но это невозможно; т.е. $a_1 = 1$. Тогда D оканчивается на число $100 \ldots 00$ ($m - 1$ нулей), следовательно $k \geq m$ и D имеет вид $\overline{d_1 \ldots d_{k-m} 10 \ldots 0}$.

Рассмотрим $a_{i+1} = a_i + D$. Прибавление числа D дает следующий результат: $\overline{d_1 \ldots d_{k-m} 10 \ldots 0 d_1 \ldots d_{k-m} (2a_2)} a_3 \ldots a_m$. Но расположить в этом числе число $10 \ldots 02$

($n-1$ ноль) можно только если $d_1,\ldots,d_{k-m}$ равны нулю (в силу $n \gg k$, $n \gg m$). Следовательно $D = 100\ldots00 = 10^{m-1}$. Что и требовалось доказать.

Задача 6.

Ответ: можно.

Для начала покажем, как из расположения $(k, k-1, k-2, \ldots, 3, 2, 1)$ получить $(1, k, k-1, \ldots, 3, 2)$ для любого $k \geq 2$. Будем перекладывать шары из 1-ой коробочки во 2-ю, из 2-й в 3-ю, и т.д. до k-ой. Легко проверить, что получится именно второе расположение шариков.

Теперь покажем, как можно получить из исходного расположения произвольное:

1) переставим по циклу нужное число раз (может быть не одного) все коробочки, чтобы коробочка с k шарами ($k = 23$) оказалась на нужном нам месте (т.е. на 23-ем).

2) не трогая коробочку с k шарами, переставим оставшиеся $k-1$ коробочки по циклу так, чтобы коробочка с $k-1$ шариком тоже оказалась на своем - на $(k-1)$-ом месте.

$\ldots$ и так далее, до тех пор, пока не получим требуемую расстановку.

Задача 7.

а) Ответ: может. Например треугольник с вершинами в точках (0,0), (2/3,0) и (-2/3,2). Или такой: (0,0),(4/3,2/3) и (2/3,4/3). Площадь каждого из них 2/3, что больше чем 1/2.

б) Ответ: 2/3.

Лемма1. Если многоугольник можно переносить на целочисленный вектор без самоналожений, то его площадь не больше 1(единыцы).

Док-во: Разрежем плоскость на единичные квадратики линиями координатной сетки. Наш многоугольник разрежется на несколько частей. Передвинем все эти части (сдвигом на целочисленный вектор) в один квадрат, получим некоторое заполнение квадрата; и по условию леммы - без самопере- сечений. Следовательно суммарная площадь кусочков - а следовательно и многоугольника - не превосходит единицы.

(*) Заметим, что если треугольник при переносе на целочисленный вектор не имеет самопересечений, то таким же свойством обладают треугольники, полученные из него переносом на ЛЮБОЙ вектор, а также центральносимметричные ему.

Пусть ABC - искомый треугольник. Предположим мы его нашли. Обозначим за A_1, B_1, C_1 - середины сторон BC, CA, AB соответствено. Построим шестиугольник: $,_1,_1,$ - это четыре его вершины. Еще две получаются центральной симметрией точек $_1$ и $_1$ относительно точки B_1. Получили точки X и Y соответственно. Итак получили 6-угольник AC_1A_1CXY.

Докажем, что этот шестиугольник можно переносить на целочисленный вектор без самопересечений.

Пронумеруем маленькие треугольнички, из которых составлен шестиугольник целыми числами от 1 до 6, считая по часовой стрелке (какой из них первый - не важно). Предположим противное: наш 6-ти угольник при переносе на какой-то целочисленный вектор накладывается на себя. Тогда рассмотрим точку, которая при этом движении переходит в себя. Отметим ее образ при движении и ее саму на шестиугольнике (далее будем называть эти две точки «образ» и «точка»).

Возможны три случая:1) точка и образ попали в соседние треугольнички, например в 3 и 4; 2) они попали в треугольнички, между которыми находится ровно один треугольничек, например в 1 и 3; 3) они попали в противоположные треугольнички, например в 2 и 5.

В случаях 1) и 2), оба маленьких треугольничка, в которых находятся точка и образ, могут быть помещены в один большой треугольник, равный ABC, (или центральносимметричный ему). Учитывая замечание (*) , эти случаи исключаются, так как иначе не выполняется «свойство движения треугольника ABC на целочисленный вектор без самопересечений».

Рассмотрим случай 3): пусть точка лежит в треугольничке $C_1A_1B_1$, а образ в треугольничке B_1XY. Возьмем треугольник ABC и наложим его на трапецию AC_1XY. После чего начнем двигать наложенный треугольник параллельно YX, до тех пор, пока не покроем трапецию A_1CXY. При этом, очевидно, наступит момент, когда мы будем накрывать и точку и ее образ. По вышесказанным соображениям, получаем противоречие.

Следовательно, ни один из случаев 1)-3) не возможен, и получившийся шестиугольник обладает указаным свойством.

По Лемме1 его площадь не больше 1. Остается заметить, что площадь треугольника ABC составляет 2/3 от площади 6-ти угольника. Отсюда вывод: максимальная площадь искомого треугольника 2/3.

Пример построен в пункте а).