Решение задач 23-го Турнира Городов
(Весенний тур, 10 - 11 классы, основной вариант.)

Задача 1. Тангенсы углов треугольника — целые числа. Чему они могут быть равны?

Ответ. 1, 2 и 3.

Решение. Во-первых, заметим, что меньший из углов треугольника заключен между 0 и $\frac{\pi}{3}$, то есть его тангенс в силу монотонности функции лежит между 0 и $\sqrt{3}$. Поскольку это целое число, то оно равно 1.

Во-вторых, исходя из формулы тангенса суммы, имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)} \text{ для } \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}(\pi) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta+\gamma)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)+\operatorname{tg}(\gamma)-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\gamma)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)-\operatorname{tg}(\gamma)\operatorname{tg}(\beta)-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\gamma)}$$

То есть $\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)+\operatorname{tg}(\gamma) = \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\gamma)$.

Так как один из тангенсов равен 1 (пусть, для определенности $tg(\gamma) = 1$), то

$$\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) - 1 = 0$$

$$(\operatorname{tg}(\alpha)-1)(\operatorname{tg}(\beta)-1) = 2 = 2\cdot 1$$

То есть (так как два тангенса не могут быть одновременно отрицательны — два тупых угла в треугольнике) один из тангенсов равен 2, а второй 3.

Итак тангенсы равны 1, 2 и 3.

Проверим, что такой треугольник существует. Возьмём углы между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$ с такими тангенсами. Сумма этих углов будет лежать между $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{2}$ и её тангенс равен 0, то есть она равна π.

Задача 2. Докажите, что на графике функции $y = x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$ — такую точку B, что расстояние AB не превысит $1/100$.

Решение. Положим $t = 100$. Точка B с координатами $(t; c)$, где $c = t^3 + t + 1$, очевидно, лежит на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$.

Рассмотрим положительное число $r = \sqrt[3]{c} - t$. Тогда $(t+r)^3 = t^3+t+1 = c$, следовательно, точка A с координатами $(t+r; c)$ лежит на графике функции $y = x^3$.

Расстояние между точками A и B равно r. Но из равенства $(t+r)^3 = t^3+t+1$ следует: $3t^2r+3tr^2+r^3 = t+1$, $3t^2r < t+1$, $r < \frac{t+1}{3t^2} = \frac{101}{300\cdot 100} < \frac{1}{100}$.

Задача 3. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдется некоторое число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих.

Решение #1. Обозначим за $a_1, a_2, \ldots$ данную последовательность. Пусть $a_1+a_2+\cdots+a_{2001} = k_{2002}a_{2002}$, $a_1+a_2+\cdots+a_{2002} = k_{2003}a_{2003}$, и т.д., здесь $k_{2002}, k_{2003}, \ldots$ — некоторые натуральные числа.

Рассмотрим два равенства $a_1+a_2+\cdots+a_{m-1} = k_m a_m$, $a_1+a_2+\cdots+a_m = k_{m+1}a_{m+1}$ для некоторого $m \geq 2002$. Из этих равенств следует, что $(k_m+1)a_m = k_{m+1}a_{m+1}$. Поскольку $a_m < a_{m+1}$, можем записать $k_m+1 > k_{m+1}$, или $k_m \geq k_{m+1}$. Таким образом, последовательность чисел $k_{2002}, k_{2003}, \ldots$ является невозрастающей. Среди чисел $k_{2002}, k_{2003}, \ldots$ найдется наименьшее число k_n. Тогда начиная с номера n последовательность $k_{2002}, k_{2003}, \ldots$ стабилизируется, т.е. $k_n = k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = k$.

Если $k = 1$, то требуемое в задаче получено.

Предположим, что $k \geq 2$. Запишем $a_1+a_2+\cdots+a_{m-1} = ka_m$, $a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m = ka_{m+1}$ для некоторого $m \geq n$. Вычитая из второго равенства первое, получаем: $a_m = k(a_{m+1}-a_m)$, следовательно для любого $m \geq n$ число a_m делится на k. Положим $a'_m = a_m/k$, $m \geq n$. Запишем $a_1+a_2+\cdots+a_{m-1} = k^2a'_m$, $a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m = k^2a'_{m+1}$, где $m \geq n$. Отсюда $a_m = k^2(a'_{m+1}-a'_m)$, следовательно для любого $m \geq n$ число a_m делится на k^2. Далее положим $a''_m = a_m/k^2$, $m \geq n$. Путем рассуждений, аналогичных предыдущим, будем последовательно доказывать, что числа $a_n, a_{n+1}, \ldots$ делятся на $k^3, k^4, \ldots$. В частности, отсюда следует, что число a_n делится на сколь угодно большую степень натурального числа k, большего двух. Противоречие. Таким образом, случай $k > 1$ невозможен, что завершает решение.

Решение #2. Рассмотрим последовательность частных k_n, $n \geq 2002$. Пусть частное от деления суммы предыдущих членов S_{n-1} на очередной член a_n равно k_n, то есть $S_{n-1} = a_nk_n$. Так как следующий член a_{n+1} делит сумму $S_{n-1}+a_n$ и $a_{n+1} > a_n$, то $(S_{n-1}+a_n)/a_{n+1} < (S_{n-1}+a_n)/a_n = k_n+1$. То есть частные не возрастают: $k_{n+1} \leq k_n$. Поэтому, начиная с некоторого места (при $n \geq N$), $k_n = k$. Но тогда при $n \geq N$ имеем $a_{n+1} = (S_{n-1}+a_n)/k = a_n + a_n/k$, то есть с этого места получаем геометрическую прогрессию $a_{n+1} = a_n(k+1)/k = a_N(k+1)^{n-N}/k^{n-N}$. Получаем, что a_N делится на сколь угодно большую степень k. Значит, $k = 1$, что и требовалось доказать.

Задача 4. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?

Решение. Занумеруем всех зрителей номерами их билетов $1, \ldots, n$. Будем решать задачу индукцией по количеству зрителей. Пересадив зрителя n на свое место так, чтобы все оставшиеся сидели не на своих местах, мы сведем задачу к меньшему числу зрителей.

Если билетер всегда может пересадить зрителя n ближе к своему месту, при этом не нарушив условия задачи (все сидят не на своих местах), то рано или поздно он посадит этого зрителя на свое место. "Научим"билетера этой процедуре. Пусть самое правое место имеет номер n, а самое левое 1.

Зрителя n не получится пересадить на одно место правее с места k, если правее него сидит зритель k (последний сядет в этом случае на свое место). Тогда пересадим на одно место вправо зрителя k, а затем и зрителя n.

Если же на $(k+2)$-м месте сидит зритель $k+1$, то это не получится. В этом случае пересадим уже тройку зрителей n, k, $k+1$ на одно место правее.

И так далее.

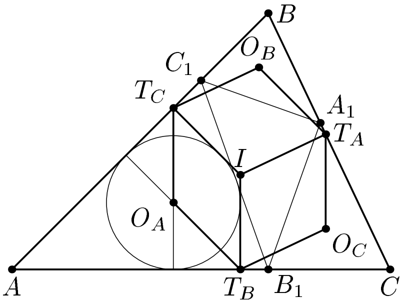
В результате возможны два исхода:

1) на месте $k+m+1$, сидит зритель не $k+m$. Тогда пересаживаем зрителей n, k, $k+1, \ldots, k+m-1$ правее на одно место.

2) такая цепочка дошла до места n и на нем сидит зритель $n-1$. В этом случае после пересаживания зрителей n, k, $k+1, \ldots, n-1$ мы получим рассадку, в которой эти зрители сидят на своих местах, то есть уменьшили число зрителей (остальные не на своих местах) — далее по индукции.

Итог — зрителя n можно пересадить на свое место, при этом либо все оставшиеся зрителя сидят не на своих местах, либо еще несколько зрителей k, $k+1, \ldots, n-1$ — и только они сидят на своих местах. К тем зрителям, что сидят не на своих местах, применим те же методы пересаживания.

Задача 5. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C — центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны.



Решение. Обозначим за I центр описанной окружности треугольника ABC, а за r — ее радиус. Пусть $\alpha = \angle BAC$.

Докажем, что $T_BO_A \perp AB$. Находим $AB_1 = AB\cos\alpha$, $AC_1 = AC\cos\alpha$. В треугольниках BAC и B_1AC_1 угол BAC общий, и $AB_1/AB = AC_1/AC = \cos\alpha$. Таким образом, треугольники B_1AC_1 и BA подобны с коэффициентом подобия, равным $\cos\alpha$. Пусть X — проекция точки O_A на AB. Отрезки AX и AT_B — отрезки от вершины A до точек касания соответствующих сторон в подобных треугольниках B_1AC_1 и BA, т.е. AX и AT_B — соответственные элементы в подобных треугольниках. Поэтому $AX = AT_B\cos\alpha$. Но если Y — проекция точки T_B на AB, то $AY = AT_B\cos\alpha$. Это означает, что $AX = AY$, т.е. точки X и Y совпадают. Отсюда следует, что $T_BO_A \perp AB$.

Аналогично приведенному выше рассуждению, докажем, что $T_AO_B \perp AB$, $T_CO_B \perp BC$, $T_BO_C \perp BC$, $T_AO_C \perp CA$, $T_CO_A \perp CA$. Очевидно, $IT_C \perp AB$, $IT_A \perp BC$, $IT_B \perp CA$, а также $IT_A = IT_A = IT_A = r$. В четырехугольнике $T_BO_AT_CI$: $T_BO_A \| IT_C$, $T_CO_A \| IT_B$, следовательно $T_BO_AT_CI$ — параллелограмм, в котором $IT_B = IT_C = T_BO_A = T_CO_A = r$. Аналогично получаем, что $T_CO_B = T_AO_B = T_AO_C = T_BO_C = r$, таким образом, все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны r.

Задача 6. Колоду из 52 карт разложили в виде прямоугольника 13x4. Известно, что если две карты лежат рядом по вертикали или горизонтали, то они одной масти либо одного достоинства. Докажите, что в каждом горизонтальном ряду (из 13 карт) все карты одной масти.

Решение.

Для удобства изложения представим себе, что карты одной масти покрашены своим цветом, к примеру: пики - синие, трефы - зеленые, черви - красные и бубны - желтые. Тогда все выложенные карты (будем считать, что прямоугольник вытянут в горизонтальном направлении) будут выглядеть как картина, составленная из цветных пятен. Весь прямоугольник назовем пасьянсом.

«Пятно» - это связная часть пасьянса, то есть такая, в которой от одной карты к другой карте того же цвета можно пройти по картам этого же цвета, переходя от соседа к соседу (соседними считаются две карты, имеющие общую сторону), причем к пятну уже нельзя добавить карты, не нарушив связности.

Заметим следующие свойства пятен.

1. Каждое пятно есть прямоугольник.

Действительно, из того, что пятно составлено из прямоугольных карт, следует, что все углы пятна либо прямые, либо равны трем прямым. Но второй случай невозможен. Допустим противное, и пусть четыре карты расположены вот так:

a b

x c

где a, b, c - карты одной масти, а x - другой. Тогда x, a и c должны быть одного достоинства, но a и c - одной масти, а среди карт одной масти не может быть двух карт одного достоинства. Получено противоречие. Итак, указанное расположение невозможно.

Но если все углы в пятне прямые, то это есть прямоугольник.

2. Два пятна одного цвета не могут иметь общую вершину. Действительно, пусть четыре карты расположены так:

a y

x b

где a и b - карты одной масти, а x - другой. Тогда опять получается, что a и b - одного достоинства, что невозможно.

3. На стороне пятна не может находиться граничная точка двух других пятен.

Действительно, пусть четыре карты расположены так:

a b

x y

где a и b - карты одной масти, а x и y - двух других мастей. Тогда пары карт: (a,x), (x,y) и (y,b) - это пары карт, совпадающих по достоинству, и получается, что a и b - одного достоинства, что невозможно.

Пусть k пятен имеют сторону на левой стороне пасьянса (k равно 1, 2, 3 или 4). Если все эти пятна дотягиваются до правой стороны пасьянса, то их должно быть 4, и все они разного цвета, то есть получилось то, что требуется в задаче. Дальше рассматриваем случай, что это не так.

Если же какое-то из этих пятен имеет ширину меньше 13, то и все эти пятна имеют такую же ширину (это следует из свойства 3); в пасьянсе возникает вертикальный разрез, справа от которого начинаются новые пятна. Если к разрезу слева подходит пятно какой-то высоты, то справа к этому пятну примыкает пятно другого цвета, но той же высоты. Это верно и для других вертикальных разрезов, так что число k, которое определилось на левой стороне пасьянса, сохраняется для всего пасьянса.

Заметим, что если одно из пятен имеет высоту 1, то оно примыкает либо к верхней, либо к нижней стороне пасьянса. Действительно, в противном случае на правом конце этого пятна возникает картина:

a b

x c
e d

где x - правая карта нашего пятна, а в последовательности карт: x, a, b, c, d и e все карты должны иметь одинаковое достоинство, но в колоде только 4 карты имеют одинаковое достоинство.

Не может быть, что все пятна, имеющие сторону на левой стороне пасьянса, имеют четную высоту. Действительно, тогда и все пятна в пасьянсе имеют четную высоту, что противоречит тому, что в каждой масти 13 карт.

Итак, остается всего два случая:

Случай 1. Три пятна имеют общую сторону с левой стороной пасьянса, причем сверху и снизу находятся пятна высоты 1, а в середине - пятно высоты 2.

Случай 2. Два пятна имеют общую сторону с левой стороной пасьянса, причем их высоты равны 1 и 3.

Рассмотрим случай 1. Пусть эти три масти, считая сверху вниз, суть A, B, C. Рассмотрим самый левый вертикальный разрез. Справа от него масть B отсутствует, значит появляется D. Масть A должна присутствовать, причем она может находиться только внизу, а масть C - только вверху, а D примыкает справа к B. Итак, от разреза к разрезу B и D чередуются, отсюда следует, что число карт каждой из этих двух мастей четное, что неверно, так как их должно быть 13.

Рассмотрим случай 2. Пусть эти масти A и B. После вертикального разреза появятся C и D, после следующего вертикального разреза - опять A и B, и т.д.. Так что весь пасьянс разбивается на вертикальные полосы - в одних масти A и B, в других - C и D (назовем их AB-полосы и CD-полосы соответственно).

Рассмотрим AB-полосы. Число тех из них, ширина которых нечетна, должно быть нечетно, так как иначе число карт в каждой из мастей A и B оказалось бы четным.

Аналогично, число тех CD-полос, ширина которых нечетна, должно быть четным.

Но тогда общее число полос, ширина которых нечетна, четно, а из этого следует, что общая ширина пасьянса не может быть равна 13.

Задача 7. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что $a > 1$, $b > 1$, и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных числах m и n? ($[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x.)

Решение. Пусть $\alpha = 2+\sqrt{3}$ и $\beta = 3\cdot(2+\sqrt{3})$. Тогда число $a = (2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m$ целое и не делится на 3. Очевидно, $[(2+\sqrt{3})^m] = a - 1$. Далее, число $b = 3^n(2+\sqrt{3})^n + 3^n(2-\sqrt{3})^n$ целое и делится на 3. Поскольку $3(2-\sqrt{3}) = \frac{3}{2+\sqrt{3}} < 1$, то $[3^n(2+\sqrt{3})^n] = b - 1$. Но равенство $a = b$ невозможно, поскольку

a не делится на 3, а b — делится.