

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 апреля 2021 г.

1. Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?

Д. Э. Шноль

2. Петя и Вася по очереди красят рёбра N -угольной пирамиды: Петя — в красный цвет, а Вася — в зелёный (ребро нельзя красить дважды). Начинает Петя. Выигрывает Вася, если после того, как все рёбра окрашены, из любой вершины пирамиды в любую другую вершину ведёт ломаная, состоящая из зелёных рёбер. В противном случае выигрывает Петя. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

А. Н. Глебов

3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , а T — точка касания этой окружности со стороной AC . Пусть P и Q — ортоцентры треугольников BAI и BCI соответственно. Докажите, что точки T , P , Q лежат на одной прямой.

Л. А. Емельянов

4. Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots$ такова, что при каждом целом $n > 100$ число a_n равно наименьшему натуральному числу, большему чем a_{n-1} и не делящемуся ни на одно из чисел a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Докажите, что в такой последовательности лишь конечное количество составных чисел.

П. А. Кожеевников

5. Полиция задержала 50 человек, из которых 35 — преступники, которые говорят, что захотят, а 15 — свидетели, которые всегда говорят правду. Все задержанные знают, кто преступники. Какое наименьшее число человек достаточно выбрать, чтобы, спросив потом у каждого, кто именно преступники, по ответам вычислить хотя бы одного преступника?

А. И. Аржанцев

6. Существует ли описанный 2021-угольник, все вершины и центр вписанной окружности которого имеют целочисленные координаты?

М. А. Евдокимов