ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2015 г.

Решения задач

1. *График квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках X, Z, а ось ординат в точке Y (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла XYZ.*

Б. Френкин

Ответ. $90°$.

Решение. *Пример.* Трёхчлен $x^2 - 1$.

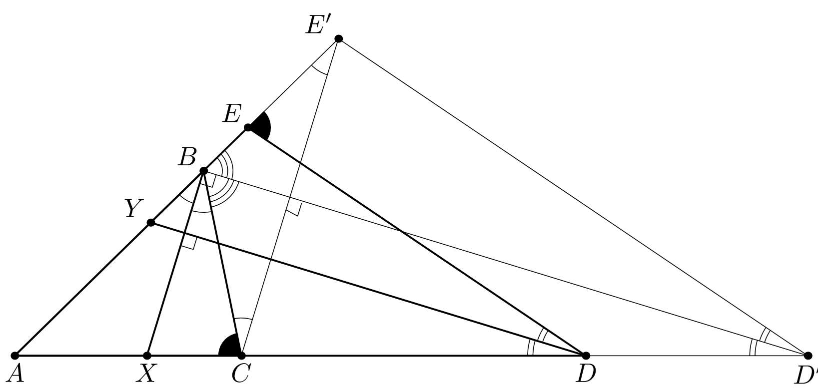
Оценка. Пусть O — начало координат, трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, а его корни равны r и s. Предположим, что угол XYZ тупой. Тогда $|OY|^2 < |OX||OZ|$, поскольку при прямом угле XYZ было бы равенство. Значит, $c^2 < |rs| = |c/a|$, но тогда $0 < |ac| < 1$, что противоречит целочисленности a и c.

Комментарий. Целочисленность b на самом деле не требуется.

2. *Треугольники ABC и ADE таковы, что E лежит на луче AB, а D лежит на луче AC. Оказалось, что биссектрисы BX и DY этих треугольников перпендикулярны. Докажите, что XY параллельно EC.*

В. Мокин

Решение 1. Выберем на лучах AC и AB точки D' и E' соответственно так, что $D'B \parallel DY$ и $D'E' \parallel DE$. Тогда $D'B \perp BX$, так что BD' — внешняя биссектриса в треугольнике ABC, то есть $\angle CBD' = \angle D'BE'$. Поскольку треугольники ADE и $AD'E'$ гомотетичны, прямая $D'B$ является биссектрисой последнего, так что $\angle BD'C = \angle BD'E'$. Значит, треугольники BCD' и $BE'D'$ симметричны относительно BD', откуда $BC = BE'$. Поэтому $\angle BCE' = \angle BE'C = \angle ABC/2 = \angle XBC$, то есть $BX \parallel CE'$. Значит, $\dfrac{AX}{AC} = \dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AY}{AE}$, откуда и следует требуемое.



Решение 2. Из данной перпендикулярности имеем $\angle ABX + \angle ADY + \angle BAD = \pi/2$; отсюда $\angle ABC + \angle ADE = 2(\angle ABX + \angle ADY) = \pi - 2\angle BAD$. Значит, $\angle ACB + \angle AED = (\pi - \angle ABC - \angle BAD) + (\pi - \angle ADE - \angle BAD) = \pi$. По теореме синусов получаем $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin ACB}{\sin BAD} = \dfrac{\sin AED}{\sin BAD} = \dfrac{AD}{DE}$. Значит, $\dfrac{AX}{XC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AY}{YE}$, откуда и следует требуемое.

3. *Изначально в бизнес-центре базировались 2^n фирм, каждая занимала некоторую площадь, все площади были различны. Каждый год фирмы объединялись в пары, и в каждой паре фирма с меньшей площадью присоединилась к фирме с большей. При этом ни в какой момент времени не* *было двух фирм с одинаковой площадью. Через n лет осталась одна фирма. Какое наименьшее место по площади (считая от меньшей к большей) эта фирма могла занимать вначале?*

Б. Френкин

Ответ: $n+1$.

Решение. Занумеруем фирмы в порядке возрастания капиталов. Пусть фирма A из условия задачи получила номер $m < n+1$. Так как она сохранилась на первом шаге, то к ней присоединилась некоторая фирма B с номером $k < m$. Было ещё не больше $m-2$ пар, в которые вошли фирмы с номерами меньше m. В остальных парах обе фирмы были больше, чем A и B, поэтому у оставшихся фирм капитал получился больше, чем у A. Занумеруем фирмы снова, в порядке возрастания образовавшихся капиталов. Тогда фирма A получит номер не больше $m-1$. Аналогично на каждом следующем шаге её номер убывает. Так как всего шагов $n \geq m$, то не позже чем на предпоследнем шаге A получит номер 1 и присоединится к другой фирме — противоречие.

Теперь построим один из возможных примеров, когда $(n+1)$-я фирма (обозначим её F) присоединяет все остальные. Представим себе, что после каждого шага объединения общая площадь уменьшается в два раза. Это значит, что большей из двух фирм достаётся не сумма, а среднее арифметическое площадей. Ясно, что на каждом шаге будут оставаться те же фирмы, что и при исходной процедуре. Теперь отметим на числовой прямой положительное число f и будем считать, что это площадь фирмы F по окончании процесса. Отметим два числа g и h, симметричные относительно f. Можно считать, что это площади, занятые фирмой F и другой фирмой G перед последним объединением. Каждая из них есть среднее арифметическое площадей двух фирм перед предыдущим шагом. В качестве этих площадей выберем два числа, симметричных относительно g, и два симметричных относительно h. Одно из них — площадь f' фирмы F перед предпоследним шагом. Можно выбрать эти числа так, что два из них меньше f', а одно — больше. Повторим этот шаг, выбрав 8 чисел в качестве площадей фирм, существовавших перед предыдущим шагом. Можно выбрать их так, что площади трёх фирм будут меньше площади фирмы F, а остальные больше. Продолжая аналогично, получим в качестве исходных площадей фирм 2^n чисел, из которых только n меньше, чем исходная площадь фирмы F. Если все упомянутые числа выбирать достаточно близко друг от друга, то все они окажутся положительными, и мы получаем искомый пример.

4. *Дано натуральное число a. Докажите, что любое натуральное число n можно домножить на какое-то натуральное число, меньшее $10a$, так, чтобы десятичная запись произведения начиналась на a.*

Е. Бакаев

Решение. Пусть k — наименьшее целое число такое, что $n \leq 10^k$, а d — наименьшее натуральное число такое, что $dn \geq 10^k a$ (иначе говоря, $k = \lceil \lg n \rceil$ и $d = \lceil 10^k a/n \rceil$). Тогда $(d-1)n < 10^k a$, то есть $dn < 10^k a + n \leq 10^k(a+1)$; это значит, что число dn начинается на a. Значит, если $d < 10a$, то d — требуемый множитель.

Предположим, что $d > 10a$. Из выбора d получаем, что $10^k a > 10an$, то есть $10^{k-1} > n$, что противоречит выбору k. Наконец, если $d = 10a$, то целое число $dn/10$ также начинается на a, то есть подходит число $d/10 = a < 10a$.

5. *В кубическую коробку поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в точно такую же пустую коробку можно поместить 4 таких же шара.*

М. Евдокимов

Решение. Пусть радиусы шаров равны 1; рассмотрим куб, гомотетичный коробке с центром в её центре, грани которого отстоят от граней коробки на 1. Тогда центры трёх шаров лежат в нём, а попарные расстояния между ними не меньше 2. Если при этом ребро нового куба не короче, чем $\sqrt{2}$, то можно раскрасить его вершины в шахматном порядке и взять 4 шара с центрами в 4 чёрных вершинах. Они обладают всеми необходимыми свойствами.

Осталось показать, что в кубе с ребром, меньшим $\sqrt{2}$, нельзя выбрать три точки с попарными расстояниями хотя бы 2. Пусть такие три точки нашлись. Спроецируем эти точки на ось, параллельную ребру куба; максимальное расстояние между проекциями меньше $\sqrt{2}$ (то есть его квадрат меньше 2), а сумма двух других расстояний равна максимальному (и тогда сумма квадратов этих расстояний также меньше 2). Проделав такие рассуждения для всех трёх осей и применяя теорему Пифагора, получаем, что сумма квадратов попарных расстояний между точками меньше 12, то есть один из этих квадратов меньше 4. Противоречие.

6. *Два дворца спорта набрали школьников в секции. В каждой секции первого дворца не меньше, чем по n детей, а в каждой секции второго — не меньше, чем по k детей. Оказалось, что каждый школьник посещает столько же секций в первом дворце, сколько и во втором. Кроме того, в любых двух секциях из разных дворцов есть не более одного общего школьника. Докажите, что в первый дворец попало не меньше nk детей.*

Н. Верещагин, А. Ромащенко

Решение. Пусть в первом дворце a секций, а во втором — b секций. Пусть общее количество задействованных школьников равно s, и i-й школьник участвует в d_i секций первого дворца (и d_i секций второго). Тогда есть d_i^2 пар секций из разных дворцов таких, что i-й школьник ходит в обе секции пары. Поскольку в каждой из ab пар секций из разных дворцов не более одного общего школьника, получаем

$$ab \geq \sum_{i=1}^{s} d_i^2 \geq \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2.$$

Просуммируем теперь количества школьников во всех секциях первого дворца, а также количества школьников во всех секциях второго дворца; в обоих случаях получится $\sum\limits_{i=1}^{s} d_i$. С другой стороны, в первом случае получается не меньше, чем an, а во втором — не меньше, чем bk. Значит,

$$ab \geq \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2 \geq \frac{an \cdot bk}{s}.$$

Сокращая на ab, получаем $s \geq nk$, что и требовалось.