

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 14 марта 2013 г.

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график ещё какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

2. В квадратной таблице 10×10 записано сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.

3. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC , CA и AB в точках X , Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K . Середины перпендикуляры к отрезкам KX , KY и KZ пересекают прямые BC , CA и AB в точках X_1 , Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1 , Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

4. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?

5. У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо чёрная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)

6. Даны 1 000 000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой.
