ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2012 г.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. *Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.*

И. И. Богданов

Достаточно даже трех ходов.

Если дано число вида $3k+1$ (где $k \geq 2$), то за ход получаем из него число $k \cdot (2k+1)$, которое есть сумма $1+2+3+\dots+2k$. Так как единичные слагаемые запрещены, вместо $1+2+3$ берем одно слагаемое 6 и за ход заменяем $6+4+\dots+(2k+1)$ на факториал $(2k+1)!$.

Аналогично, из числа вида $3k-1$ (где $k \geq 2$) за ход получаем число $k \cdot (2k-1)$ — либо сразу 3! (для $k=2$), либо сумму $1+2+3+\dots+(2k-1)$, которую снова за ход превращаем в факториал $(2k-1)!$.

Если изначально дано число вида $3k$ (где $k \geq 2$), то за ход делаем из него $2 \cdot (3k-2)$, из которого за два хода делаем факториал.

2. *В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причём ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещённой и неосвещённой областей колодца лежит в одной плоскости.*

А. С. Бердников

Введём прямоугольные координаты следующим образом: ось Oy параллельна оси симметрии колодца, а ось Ox лежит в одной плоскости с осью Oy и направлением света. Пусть также центр верхнего основания колодца имеет координаты $(0; 0; z)$, а свет направлен вдоль вектора $(1; -1; 0)$. Очевидно, граница тени — проекция границы колодца на его поверхность вдоль вектора $(1; -1; 0)$.

Решение 1. Посмотрим, как изменятся координаты точки этой проекции при увеличении x-координаты исходной точки на x_1. Так как колодец симметричен относительно плоскости $x = 0$, y-координата проекции уменьшится на x_1. Расстояние между точками по x уменьшилось на $2x_1$, а значит, на столько же увеличилась y-координата (проекция получается прибавлением $(-a; a; 0)$, сумма расстояний до неё по x и по y равна нулю). Для точки проекции не изменилась величина $y + 2x$, значит, она постоянна, и граница тени лежит в плоскости $y + 2x = const$ (несложно видеть, что $const = 0$).

Решение 2. Пусть координаты исходной точки $(-x_1; 0; z_1)$, тогда координаты его проекции $(a - x_1; -a; z_1)$. Так как колодец симметричен относительно плоскости $x = 0$, $-x_1 + (a - x_1) = 0$, откуда $a = 2x_1$, и координаты проекции $(x_1; -2x_1; z_1)$, все такие точки лежат в плоскости $y + 2x = 0$.

3. *В стране Флатландии двое близоруких полицейских ловят преступника. Все люди являются кругами диаметра 1 м на плоскости. Максимальная скорость полицейского равна 1 м/с, а преступник умеет двигаться со сколь угодно большой скоростью. Полицейский не видит преступника, пока не коснётся его, а как только касается — сразу ловит. Преступник всё видит. Дело происходит в круге диаметра D м, за который никто не может выйти. При каком наибольшем D полицейские могут действовать так, чтобы гарантированно поймать преступника?*

В. Б. Мокин

Ответ: $D = 5$.

Если $D = 5$, то полицейские располагаются так, чтобы их центры лежали, скажем, на горизонтальном диаметре круга на расстоянии 0,5 от центра круга. Тогда на этом диаметре есть три «дырки» ширины 1, через которые преступник проскочить не может. Далее полицейские синхронно поднимаются вверх, пока не коснутся границы круга, далее синхронно сближаются, касаясь этой границы. В какой-то момент либо преступник будет пойман, либо полицейские коснутся друг друга. Во втором случае они совершают обратное движение и, двигаясь аналогично в «нижней» части круга, ловят преступника.

Если $D < 5$, то стратегия такая же, либо проще.

Пусть $D > 5$. Докажем, что преступник сможет убежать.

В каждый момент времени будем рассматривать хорду, проходящую через центры полицейских. Эта хорда делит круг на две части. Пусть вначале преступник находился в большей из них. Пусть h — расстояние от хорды до центра круга. Найдем какое-нибудь $1 > a > 0$, что если $h \leq a$, то длина хорды больше 5. Ясно, что такое a найдется.

Теперь мы можем описать стратегию преступника. Пока он находится в большей части, он должен касаться граничной дуги этой части в ее середине (назовем это стандартным положением). Если часть становится меньшей, преступник должен придерживаться той же стратегии до момента, пока h не станет равным a. При этом расстояние от центра преступника до хорды будет все время больше 1, так что он не коснется ни одного полицейского.

В момент, когда h станет равным a, преступник должен «мгновенно» переместиться в большую часть, заняв в ней стандартное положение. Такое перемещение будет возможно, поскольку проекции полицейских на хорду — один или два отрезка суммарной длины не больше 2, а значит, на хорде найдется отрезок длины больше 1 со свойством: полоса, края которой проходят через концы этого отрезка перпендикулярно хорде, не задевает никакого полицейского. Преступник сможет проскочить в большую часть через эту полосу.

4. *В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.*

А. Шень

Пусть есть две разные последовательности ходов. Они различаются в каком-то месте: в первой последовательности был сделан ход, перемещающий шарик из коробки a в коробку $a+1$, а во второй — из коробки b в коробку $b+1$. Докажем, что

1) ход $b \to b+1$ будет обязательно сделан и в первой последовательности ходов;

2) этот ход можно сделать прямо перед ходом $a \to a+1$, сохранив все остальные ходы (и итоговое расположение шариков в коробках).

1) В самом деле, если этот ход можно было сделать во второй последовательности, то сейчас в коробке b хотя бы на 1 шарик больше, чем в коробке $b+1$. Любые другие ходы, кроме $b \to b+1$, не уменьшают число шариков в коробке b и не увеличивают число шариков в коробке $b+1$ — значит процесс не закончится, если ход $b \to b+1$ не будет сделан.

2) сделаем ход $b \to b+1$ перед ходом $a \to a+1$ (это возможно). Любой другой ход кроме $b \to b+1$ тоже можно будет сделать, так как этот другой ход будет либо не затрагивать коробок b, $b+1$, либо будет осуществлять перекладывание в коробку b (и это будет возможно, так как в этой коробке шариков только на 1 меньше), либо будет осуществлять перекладывание из коробки $b+1$ (и это будет возможно, так как в этой коробке шариков только на 1 больше). Так мы дойдем до того момента, когда должен был быть сделан ход $b \to b+1$, после чего раскладывание будет ровно таким же, как и раньше. Итоговое распределение шариков при этом не изменится.

Так можно постепенно преобразовать одну последовательность в другую, не меняя итогового распределения шариков. Значит результат не зависит от последовательности ходов.

5. *Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Вневписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Через середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 провели прямую l_1, а через середины отрезков A_1C_1, A_2C_2 провели прямую l_2. Докажите, что l_1 и l_2 пересекаются на высоте AH треугольника ABC.*

А. А. Полянский

Пусть K_1, K_2 — середины A_1C_1 и A_2C_2, L_1, L_2 — середины A_1B_1 и A_2B_2, I, I_A — центры вписанной и вневписанной окружностей, а A_1', A_2' — диаметрально противоположные точки для A_1, A_2 на этих окружностях.

Заметим, что прямые BI параллельна C_2A_2 (они перпендикулярны BI_A), прямая CI параллельна B_2A_2 (они перпендикулярны CI_A), прямая K_1L_1 параллельна K_2L_2 (каждая из них параллельна

B_1C_1 и B_2C_2 соответственно как средние линии, а последние прямые в силу равнобедренности параллельны). Значит треугольники (K_1L_1I и $K_2L_2A_2$), образованный данными прямыми, являются гомотетичными. То есть прямые K_1K_2, L_1L_2 и IA_2 пересекаются в одной точке.

Аналогичным образом получаем, что треугольники $K_1L_1A_1$ и $K_2L_2I_A$ являются гомотетичными. То есть прямые K_1K_2, L_1L_2 и A_1I_A пересекаются в одной точке.

Значит все четыре прямые K_1K_2, L_1L_2, IA_2 и A_1I_A пересекаются в одной точке, то есть достаточно рассмотреть точку пересечения последних двух прямых.

Поскольку вписанная и вневписанная окружности гомотетичны с центром в A, то при этой гомотетии точка A_1' переходит в A_2, а точка A_1 — в A_2'. Значит так как A_2I является медианой в треугольнике $A_2A_1A_1'$, то она является и медианой в подобном треугольнике A_2HA. Отсюда получаем, что A_2I проходит через середину высоты AH.

Аналогично, рассматривая медиану A_1I_A в треугольнике $A_1A_2A_2'$, получаем, что она тоже проходит через середину AH.

6. *Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех x. Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.*

Г. К. Жуков

Заметим, что если $x = a$ является осью симметрии многочлена $R(x)$, то $x = a$ является осью симметрии и многочлена $Q(R(x))$, а, значит, и многочлена $P(Q(R(x)))$.

Далее *осью симметрии* многочлена будем называть ось симметрии его графика, параллельную оси ординат. Поскольку f и g — приведенные квадратные трехчлены с пересекающимися графиками, у них разные оси симметрии. Значит, у многочлена $T(x) = f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ есть две различные оси симметрии. Но этого, очевидно, не может быть, так как иначе график T имел бы пересечение с какой-то горизонтальной прямой в бесконечном числе точек, и значит совпадал бы с этой прямой, но степень T больше нуля.