ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2012 г.

---

1. Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.

И. И. Богданов

2. В цилиндрический колодец падает пучок параллельных лучей, причём ни одна точка дна не освещена. Докажите, что граница освещённой и неосвещённой областей колодца лежит в одной плоскости.

А. С. Бердников

3. В стране Флатландии двое близоруких полицейских ловят преступника. Все люди являются кругами диаметра 1 м на плоскости. Максимальная скорость полицейского равна 1 м/с, а преступник умеет двигаться со сколь угодно большой скоростью. Полицейский не видит преступника, пока не коснётся его, а как только касается — сразу ловит. Преступник всё видит. Дело происходит в круге диаметра D м, за который никто не может выйти. При каком наибольшем D полицейские могут действовать так, чтобы гарантированно поймать преступника?

В. Б. Мокин

4. В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.

А. Шень

5. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Вневписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Через середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 провели прямую l_1, а через середины отрезков A_1C_1, A_2C_2 провели прямую l_2. Докажите, что l_1 и l_2 пересекаются на высоте AH треугольника ABC.

А. А. Полянский

6. Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех x. Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.

Г. К. Жуков