Решения задач.

1. Ответ: первый игрок.

Пусть первый игрок всегда перекладывает одну и ту же монету. Тогда он всегда сможет сделать ход и, значит, выиграет. Действительно, назовём расположение (орлов и решек) чётным или нечётным в зависимости от того, в скольких позициях оно отличается от начального. Первый игрок всегда переходит от чётного расположения к нечётному, второй — наоборот. Если первый игрок переходит к расположению, которое уже появлялось, то получить его раньше мог только он сам, причём переворачивая ту же монету. Значит, уже появлялось и расположение, из которого он делает ход, — противоречие.

2. Все 49 чисел различны, иначе суммы двух из них с третьим одинаковы вопреки условию. Пусть $a_1, \ldots, a_{49}$ — числа на доске, занумерованные в порядке возрастания. Если $a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$ при каких-то $i < j$, то $a_{i+1} + a_j = a_{j+1} + a_i$, что возможно лишь в случае $j = i + 1$ (тогда сумма слева не является попарной суммой). Таким образом, среди разностей соседних по величине чисел на доске одинаковыми могут быть лишь две соседних. Значит, сумма всех этих разностей (т.е. разность между наибольшим и наименьшим числом) не меньше $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 24) = 600$. Так как наименьшее из чисел на доске не меньше 1, то наибольшее не меньше 601.

3. Ответ: верно.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с центром O описанной окружности треугольника ABC. В этой системе точки A, B, C также движутся прямолинейно и равномерно; значит, если одна из них покоится, то и все три покоятся (иначе расстояния до них от O не будут всё время равны), и задача решена. Итак, можно считать, что все три точки движутся по прямым a, b, c.

Квадрат расстояния от точки, движущейся со скоростью v по прямой, находящейся на расстоянии d от O, в момент времени t равен $v^2(t+m)^2 + d^2$ (где m — некая константа). Так как расстояния от точек A, B, C до O одинаковы в каждый момент времени, соответствующие квадратные трехчлены для них равны в бесконечном числе точек — а значит, равны покоэффицентно. Приравнивая последовательно коэффициенты при t^2, t и 1, получаем, что величины v, m и d для всех трёх точек равны. Тогда, если «продолжить» движение точек на отрицательное время, то опять же расстояния от O до всех трёх точек будут равны.

Поскольку значения d и m для всех точек равны, все точки одновременно оказываются в основания перпендикуляров из O на прямые a, b, c одновременно. Ели затем все лучи, проведённые из O в наши три точки, вращаются в одном направлении, то все треугольники поворотно-гомотетичны, а значит, подобны. Иначе, скажем, лучи в точки A и B вращаются в одну сторону, а луч в точку C — в другую.

Пусть одна из прямых a, b (скажем, a) пересекает прямую c; из симметрии, точки A и C одновременно приходят в точку пересечения a и c. Но это значит, что в исходной системе отсчёта они тоже должны были встретиться; поскольку лучи, по которым они двигались, пересекаются (а дополнительные к ним — нет), то это произошло в положительный момент времени. Но это противоречит условию. Наконец, если прямые a, b, c параллельны, то две из них совпадают. Тогда точки, двигавшиеся по ним, встречались в основании перпендикуляра из точки O, что невозможно по тем же причинам.

4. Заметим сначала, что идеальных компаний не больше, чем количество различных подмножеств девушек — каждое такое подмножество если и дает идеальную компанию (вместе с какими-то парнями), то только одну (надо просто добавить всех парней, которым нравятся все эти девушки). Значит, компаний не больше $2^9 = 512$.

Приведем пример, когда компаний ровно 512. Пусть шести юношам из пятнадцати не нравится ни одна девушка. Оставшихся девять юношей занумеруем числами от 1 до 9, и девушек тоже. Пусть юноше с номером i нравятся все девушки, кроме i-й. Тогда любой непустой набор девушек дает идеальную из девяти человек (надо добавить юношей с номерами, отличными от номеров девушек), в частности все девушки образуют идеальную компанию; пустой набор девушек тоже дает идеальную компанию — это все 15 юношей.

5. Если $a = 1$, то, очевидно, $b = 1$; при этом пара $(1, 1)$ подходит. Осталось разобрать случай $a, b > 1$. Заметим сразу, что a и b взаимно просты; пусть $a > b$.

Число $A = a^{1000} + b^{1000} + 1 = a^{1000} + (b^{1000} + 1)$ делится на a^{619}; аналогично, A делится на b^{619}, а из взаимной простоты — и на их произведение. Итак, $a^{1000} + b^{1000} + 1 \geq a^{619}b^{619}$, а значит, $a^{1001} \geq 2a^{1000} \geq a^{619}b^{619}$, или $a^{382} \geq b^{619}$. С другой стороны, $b^{1001} > b^{1000} + 1 \geq a^{619}$. Итак, $b^{1001\cdot 382} > a^{619\cdot 382} \geq b^{619\cdot 619}$. Но $1001 \cdot 382 < 619^2$ — противоречие.

Примечание. Можно было рассуждать немного по-другому. Получив неравенство $a^{619}b^{619} \leq a^{1000} + b^{1000} + 1$, замечаем, что $a^{619}b^{619} < 2a^{1000}$ (так как при натуральных $a > b$, очевидно, b^{1000} меньше a^{1000} хотя бы на 2). Пусть $a = b^{\alpha}$. Тогда $b^{619(\alpha+1)} < 2b^{1000\alpha}$. Логарифмируя, получаем $619(\alpha + 1) < \log_b 2 + 1000\alpha$. Так как $b \geq 2$, то $\log_b 2 \leq 1$, и из предыдущего неравенства $618 < 381\alpha$, т. е. $\alpha > \frac{618}{381}$. Но тогда $a^{619} > b^{\frac{619\cdot 618}{381}} > b^{1004} > b^{1000} + 1$. Противоречие. Значит, либо a, либо b равно 1. Легко видеть, что подходит только пара (1, 1).

6. Обозначим данные многоугольники M_1, M_2, M_3, их центры — O_1, O_2, O_3; также обозначим через T_{ij} пересечение многоугольников M_i и M_j (ясно, что многоугольники T_{ij} попарно не пересекаются). Тогда середина O_{12} отрезка O_1O_2 является центром симметрии, переводящей M_1 в M_2; значит, эта точка — центр симметрии многоугольника T_{12}.

Утверждение задачи равносильно тому, что сумма площадей многоугольников T_{ij} не превосходит 1. Если один из них (скажем, T_{23}) пуст, то утверждение очевидно, ибо T_{13} и T_{12} расположены внутри M_1 и не пересекаются.

В противном случае рассмотрим многоугольник T'_{23}, полученный из T_{23} симметрией относительно O_{12}. Поскольку эта симметрия переводит M_2 в M_1, а T_{12} — в себя, многоугольник T'_{23} лежит в M_1 и не пересекается с T_{12}.

Заметим, что многоугольник M_3 не пересекается с многоугольником M'_3, симметричным ему относительно O_{12}; иначе этому пересечению принадлежали бы две симметричные точки A и A', а значит, и середина отрезка между ними, то есть

O_{12}. Но O_{12} лежит в T_{12} и, значит, не лежит в M_3. Итак, M_3 и M_3' не пересекаются, а значит, не пересекаются и лежащие в них многоугольники T_{13} и T_{23}'.

Итак, все три непересекающихся многоугольника T_{12}, T_{13}, T_{23}' лежат в M_1, поэтому сумма их площадей не превосходит 1, что и требовалось доказать.