ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 17 марта 2011 г.

1. В ряд выложено n монет. Два игрока по очереди выбирают монету и переворачивают её. Расположение орлов и решек не должно повторяться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Б. Р. Френкин

2. На доске написаны 49 натуральных чисел. Все их попарные суммы различны. Докажите, что наибольшее из чисел больше 600.

Б. Р. Френкин

3. Даны три попарно пересекающихся луча. В некий момент времени по каждому лучу из его начала начинает двигаться точка с постоянной скоростью. Известно, что эти три точки в любой момент времени образуют треугольник, причем центр описанной окружности этого треугольника тоже движется равномерно и прямолинейно. Верно ли, что все эти треугольники подобны друг другу?

Ф. К. Нилов

4. Подмножество студенческой группы назовём *идеальной компанией*, если

1) в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам;

2) в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив условие 1.

В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста группы составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

А. А. Клячко, Б. Ф. Мельников

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a^{1000}+1$ делится на b^{619} и $b^{1000}+1$ делится на a^{619}.

М. В. Мурашкин

6. На плоскости расположен центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади 1 и две его копии (каждая получена из многоугольника некоторым параллельным переносом). Известно, что никакая точка плоскости не покрыта тремя многоугольниками сразу. Докажите, что общая площадь, покрытая многоугольниками, не меньше 2.

И. И. Богданов