ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
11 класс, очный тур, 8 мая 2010 г.

Задача 1.

а) Ответ: не обязательно. Пусть $SA_1 = SA_3 = A_1A_2$. Тогда все боковые грани — равнобедренные треугольники. Точку S можно выбрать так, чтобы пирамида была неправильная.

б) Ответ: пирамида обязана быть правильной. Заметим, что в каждой треугольной грани либо расстояния от S до других двух вершин одинаковые, либо одно из этих двух расстояний равно стороне правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды. Если есть две соседние треугольные грани, в которых вершина S лежит напротив основания равнобедренного треугольника, то пирамида правильная. Если таких граней одна или нет, то вершина S удалена на сторону n-угольника как минимум от трех вершин, и снова пирамида правильная.

Задача 2. Предположим противное — таких школьников нет.

Пусть в одном из залов больше рядов, чем в другом. Тогда школьники, сидящие на первых местах этого зала, не смогут рассесться в разные ряды второго зала — противоречие. Значит, общее число рядов в каждом зале одинаково.

Пусть в одном из залов (скажем, в первом) длина самого короткого ряда больше, чем в другом, и равна m. Тогда школьники с местами 1, 2, …, m из первого зала не смогут рассесться в разные ряды второго зала. В самом деле, школьники с первыми местами из первого зала садятся в разные ряды второго зала, и поскольку всего рядов поровну, одно место каждого кратчайшего ряда второго зала будет кем-то из них занято; школьники со вторыми местами аналогично займут еще по одному месту каждого кратчайшего ряда второго зала, и так далее, то есть мест в кратчайшем ряду второго зала не может оказаться меньше m.

Если же длины кратчайших рядов равны, то аналогично равны и количества кратчайших рядов.

Рассуждая далее точно так же, получим, что одинаковы длины следующих по величине рядов и их количества, и так далее (строгое доказательство можно оформить по индукции). В результате получим, что набор длин рядов и их количеств в обоих залах одинаков, что противоречит условию.

Задача 3.

Ответ: 1001.

Первое решение. Докажем по индукции, что наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_N, равно $\sqrt{N}$. База для $N = 1$ очевидна. Покажем, что из верности нашего утверждения для N следует его верность для $N+1$. Для начала найдем наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, при условии, что хорда, на которой построена окружность ω_2, стягивает дугу величины 2φ. Радиус ω_2 при этом равен $\sin\varphi$. По предположению индукции, наибольшее возможное расстояние между центром ω_2 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\sin\varphi\sqrt{N}$. Расстояние между центрами ω_1 и ω_2 равно $\cos\varphi$. Отсюда наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{N}$. Осталось подобрать угол φ таким образом, чтобы значение $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{N}$ было максимальным. Заметим, что

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{N} = \sqrt{N+1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{N+1}} + \frac{\sin\varphi\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}}\right) = \sqrt{N+1}\cos\left(\varphi - \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) \leqslant \sqrt{N+1},$$

причем при $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}$ достигается равенство. Шаг индукции доказан. Радиус первой окружности равен 1. Поэтому наибольшее возможное расстояние между двумя точками, принадлежащими ω_1 и ω_N, равно $1+\sqrt{N}$. Подставляя $N = 1000000$, находим ответ.

Второе решение. Решим задачу для N окружностей. Пусть точки A и B принадлежат ω_1 и ω_N соответственно. Обозначим за O_i центр окружности ω_i. Очевидно, что $AB \leqslant AO_1 + O_1O_2 + \ldots + O_{N-1}O_N + O_NB$. Заметим, что окружности можно было построить и так, чтобы отрезки AO_1, O_1O_2, …, O_NB имели те же длины и лежали на одной прямой. Значит, наибольшее возможное расстояние AB совпадает с наибольшей возможной суммой $AO_1+O_1O_2+\ldots+O_{N-1}O_N+O_NB$. Введем обозначения: r_i — радиус ω_i, $d_i = O_iO_{i+1}$. Так как O_{i+1} — центр хорды длины $2r_{i+1}$ окружности ω_i, то $r_i^2 = d_i^2+r_{i+1}^2$. Поэтому $r_1^2 = d_1^2+r_2^2 = d_1^2+d_2^2+r_3^2 = \ldots = d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{n-1}^2+r_N^2$, откуда

$$AO_1+O_1O_2+\ldots+O_{N-1}O_N+O_NB = r_1+d_1+\ldots+d_{N-1}+r_N \leqslant r_1+N\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{n-1}^2+r_N^2}{N}} = r_1(1+\sqrt{N}).$$

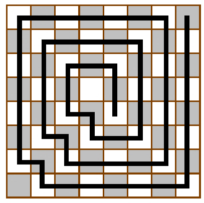
Здесь было использовано неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим. Равенство в нем может достигаться при $d_1 = d_2 = \ldots = d_{N-1} = r_N$, что равносильно $d_1^2 = d_2^2 = \ldots = d_{n-1}^2 = r_N^2 = \frac{r_1^2}{N}$. Значит, наибольшее возможное расстояние AB равно $r_1(1+\sqrt{N})$. Подставляя $r_1 = 1$, $N = 1000000$, находим ответ.

Задача 4. Ответ: Все кроме двух.

Указание. Рассмотрим граф из внутренних границ клеток, которые ладья не пересекала. В нем нет висячих вершин внутри доски, и есть как минимум 2 висячие вершины на границе доски. Если их ровно 2, то они принадлежат противоположным краям доски. Если эти висячие вершины соединяются, то они разделяют доску на 2 части, в одной ладья не была. Если не соединяются, то каждой компоненте связности принадлежит цикл, отгораживающий как минимум одну вершину.

Решение.

На рисунке — пример на 62 клетки (стартуем из середины). Докажем теперь, что в любом случае останутся как минимум две не обойденные клетки. Закрасим внутренние границы клеток, которые ладья не пересекала. Будем считать их ребрами графа. Рассмотрим клетки, примыкающие к правому краю доски, и их границы, идущие от края доски. Если ни одна из этих границ не закрашена, то ладья прошла по правому краю и сделала поворот в угловых клетках. Но это были либо два поворота направо, либо два поворота налево, а клетки — разного цвета. Противоречие.



Значит, среди границ правых клеток есть ребро R с концом на краю доски. Аналогично, такое ребро L есть среди границ левых крайних клеток. Если ребра R и L соединены в графе маршрутом, то маршрут разбивает доску на две части, в каждой есть как минимум 6 клеток (по одной с каждой не крайней горизонтали). В одной из этих частей ладья не побывала, значит, она обошла не более 58 клеток. Пусть R и L не соединены. Пойдем от края по ребру R и будем идти по графу, не поворачивая назад. Есть три возможности: а) попадем в вершину, где уже были; б) попадем в вершину на краю доски; в) попадем в вершину v внутри доски, из которой других ребер не входит. На самом деле случай (в) невозможен: тогда бы мы обошли 4 примыкающие к v клетки буквой *П*, сделав два левых или два правых поворота в двух соседних клетках, а они — разного цвета. В случаях (а) и (б) пройденный маршрут разбивает доску на 2 части (в случае (а) есть цикл, в случае (б) маршрут замыкается в цикл краем доски). Аналогично находим такой маршрут, стартуя от края по ребру L. Он добавит еще одну часть. Ладья побывала только в одной из частей, значит, в каждой из оставшихся найдется хотя бы по одной не обойденной клетке.

Задача 5.

Ответ: Люда не может помешать Саше.

Первое решение. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть Люда назвала число, большее $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша берёт на окружности вершины прямоугольника $ABCD$ и делит дугу AB точками на 10 равных частей (это все будут точки касания сторон 13-угольника с окружностью). Тогда 4-я сторона касается в точке A. Уменьшая дугу AB почти до $0°$, Саша может сделать 4-ю сторону сколь угодно длинной. Наоборот, раздвигая дугу до $180°$, Саша делает 4-ю сторону сколь угодно близкой к $\operatorname{tg} 18°$.

Пусть Люда назвала число не больше $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша впишет равнобедренный остроугольный треугольник ABC с основанием AB, и разделит дугу AB на 11 равных частей. Тогда 4-я сторона касается в доп. точке. Сближая A и B, Саша получает все значения меньше $2\operatorname{tg}(180/11)°$.

Набросок второго решения. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть радиус круга равен 1. Если длина 4-й стороны s больше 1, то Саша делает так: описывает ромб, у которого касательная больше 1, но чуть-чуть меньше нашей стороны. Два угла этого ромба будут острые, два — тупые. Далее, берет две соседние точки касания, соединенные меньшей дугой (концы тупого угла), и описывает около нее равнозвенную ломаную из 9 звеньев, концы ее на сторонах ромба лежат так, чтобы как раз две его стороны стали равны нашей длине s.

Если длина 4-й стороны s меньше или равна 1, Саша делает так. Рисует горизонтальную касательную над кругом так, чтобы ее середина была над центром, длина равна s. После этого вправо продолжает девятизвенной ломаной, у которой одно звено чуть больше половины длины s, а остальные звенья очень маленькие, затем проводит еще звено — большое, и влево от исходной стороны звено — большое, их соединяет нижней горизонтальной касательной. Тогда девять звеньев маленькие, а длина трех звеньев очевидно больше 1.

Задача 6. Для доказательства того, что $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$, нам достаточно доказать, что для любого простого p и натурального k среди чисел вида $a_i - a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, чисел, делящихся на p^k, не меньше, чем среди чисел вида $i - j$. В самом деле, для целого числа $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ степень вхождения p в b равна сумме степеней вхождения p в b_i, которая в свою очередь равна сумме по всем натуральным k количества таких b_i, которые кратны p^k.

Для каждого p^k рассмотрим, набор $d_0, d_1, \ldots, d_{p^k-1}$, где d_j — количество таких a_i, которые имеют остаток j при делении на p^k (то есть $d_0 + d_1 + \cdots + d_{p^k-1} = n$). Тогда количество чисел среди $a_i - a_j$, делящихся на p^k, есть $\frac{1}{2}(d_0(d_0-1) + d_1(d_1-1) + \cdots + d_{p^k-1}(d_{p^k-1}-1)) = \frac{1}{2}(d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{p^k-1}^2 - n)$. Осталось доказать, что $d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{p^k-1}^2$ при фиксированной сумме $d_0 + d_1 + \cdots + d_{p^k-1} = n$ принимает наименьшее значение тогда, когда эти остатки распределены достаточно равномерно (то есть все d_i равны или $\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$, или $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] + 1$), например, при $a_i = i$. Это нетрудно сделать например методом "шевелений".