ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 8 мая 2010 г.

---

1. Про пирамиду $SA_1A_2...A_n$ известно, что ее основание $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник, а все боковые грани — равнобедренные треугольники (равные стороны не обязательно с вершиной S). Обязательно ли эта пирамида правильная, если
а) $n = 5$?
б) $n > 5$?

Г.Гальперин

2. В кинотеатре два зала с одинаковым числом мест. В каждом зале несколько рядов (места в любом ряду нумеруются подряд, начиная с единицы). Группа школьников побывала на утреннем сеансе в первом зале, а на дневном сеансе — во втором, оба раза заняв все места. Известно, что в первом зале есть ряд из 10 мест, а во втором — нет. Докажите, что найдутся два школьника, которые на одном из сеансов сидели в одном ряду, а на другом — имели одинаковый номер места.

А.Буфетов

3. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд, как на диаметре, построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2, как на диаметре, построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

М.Мурашкин

4. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

А.Шаповалов

5. Саша и Люда играют в игру. Саша должен построить описанный 13-угольник с одной заданной стороной, а Люда хочет ему помешать. Сначала Саша называет номер стороны — число k от 1 до 13. Затем Люда задает длину этой стороны — действительное положительное число s. Саша выиграет, если опишет теперь вокруг единичного круга 13-угольник, где длина k-й по величине стороны равна s. Может ли Люда ему помешать? (Сторона k-я по величине, если найдутся $k - 1$ сторон не короче нее, и при этом остальные $13 - k$ сторон не длиннее нее).

А.Шаповалов

6. Обозначим через $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ произведение всевозможных попарных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$.

М.Берштейн