

## ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИМОСТИ

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**В4.** Все свойства, определяемые через сумму и произведение, называются арифметическими. Как вы думаете, бывают ли не арифметические свойства натуральных чисел? Как можно было бы такое свойство построить?

**С5.** Правда ли, что если свойство  $R$  определимо через свойство  $Q$ , то множество преобразований  $\Gamma_Q$ , сохраняющих свойство  $Q$  является подмножеством множества преобразований (сохраняющих)  $\Gamma_R$ ?

**В5.** Рассмотрим множество точек на плоскости. Определимо ли свойство  $C(x, y, z)$  -- точки  $x, y, z$  лежат на одной прямой, через свойство  $D(x, y, z, v) \Leftrightarrow d(x, y) = d(z, v)$ ?

**С6.** На целых числах:  $\mathbb{Z}$ , задано свойство  $R(x, y, z) \Leftrightarrow z = x + y$ ; Опишите группу преобразований этого свойства. Определимы ли через  $R$  одноместные свойства  $x = 0; x = 1$ , двухместное свойство  $x < y$ ?

**D2.** Напишите формулу, означающую, что отношение  $<$  не имеет наименьшего и наибольшего элемента и формулу, означающую, что между любыми двумя различными элементами найдется отличный от них третий. Выполнены ли эти утверждения для рациональных, целых, действительных чисел?

Попробуйте доказать, что существует взаимно однозначное, сохраняющее порядок соответствие между любым таким счетным множеством и рациональными числами.

### НОВАЯ СТРУКТУРА: СЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ

**В6.** Даны рациональные числа  $\mathbb{Q}$  со свойством суммы

$$S(x, y, z) \Leftrightarrow (z = x + y).$$

Следующие задачи относятся к указанному множеству и свойству.

(а) Опишите группу преобразований данного свойства.

(б) Определимо ли через  $S$  двухместное свойство

$$M(x, y) \Leftrightarrow (y = 3 * x)?$$

Верно ли обратное? Опишите группу преобразований свойства  $M$ .

(в) Попытайтесь найти максимальную систему попарно не эквивалентных семейств свойств.

### ЦИКЛ Е: ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цикл Е содержит основные исследовательские задачи проекта, они представлены в таблице ниже. Большинство из них представляет собой открытые (пока никем не решенные) проблемы. Те из них, которые не удастся до конца решить в ближайшие дни, мы продолжим вместе решить в последующие месяцы и результаты опубликуем .

Отношения/множества	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
$(x < y)$	E1	E2	E3
$(y = x + 1)$	E4	E5	E6
$(z = x + y)$	E7	E8	E9

Помимо числовых структур из таблицы мы предлагаем исследовать еще одну.

**E10.** Бесконечный неориентированный граф без циклов (дерево), где каждая вершина имеет степень три; свойство "быть соседними вершинами". "Ветвящиеся целые".

Кого-то может заинтересовать и такая структура:

**E11.** Порядок неотрицательных рациональных чисел.

Мы выделяем в исследовании проблемы определимости для каждой структуры (множества с исходным семейством свойств на нем) следующие основные ступени (которые могут перемешиваться в наших исследованиях):

I. Поиск свойств (семейств свойств, часто семейств из одного элемента), определимых через заданное исходное семейство. Выдвижение гипотезы, что мы нашли максимальную систему свойств, и что найденные свойства (семейства) не эквивалентны.

II. Построение для каждого свойства его группы преобразований. Возможно, для этого нам придется построить расширение исходного множества и определить свойства на расширении. Доказательство с помощью групп того, что найденные свойства не эквивалентны.

III. Доказательство того, что мы нашли максимальное семейство не эквивалентных свойств.

IV. Для всех найденных свойств (семейств свойств) найти их твг и тнг. Определение

**Точной верхней гранью (твг, sup)** семейств свойств  $A$  и  $B$  называется семейство свойств, определимых через свойства из объединения семейств  $A$  и  $B$ .

**Точной нижней гранью (тнг, inf)** семейств свойств  $A$  и  $B$  называется семейство свойств, определимых и через свойства из семейства  $A$  и через свойства из семейства  $B$ .