

Теория определимости: Логика. Алгебра. Геометрия

А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов

Жюри проекта: А. Канель-Белов, И. Иванов-Погодаев, Р. Исаев,
В. Кондратьев, А. Семёнов, С. Сопрунов, Б. Френкин.

Введение

К центральным понятиям всей математики относятся истинность и доказуемость. Но наряду с теоремами и гипотезами в математике встречаются также определения одних понятий через другие. Например, через произведение чисел $xy = z$, можно определить делимость $x|y$ и свойство «быть простым числом». Мы будем заниматься *теорией определимости*, в которой сегодня имеется большое количество нерешенных задач с ясными и простыми формулировками, пожалуй, больше, чем в теории доказательств и теории моделей. Такие нерешенные задачи мы будем обсуждать и пытаться решить во второй части проекта. В первой части будут как совсем простые задачи (упражнения), так и задачи посложнее, и совсем сложные, которые могут не получиться, но продвижение в них и обсуждение — полезны. Такие задачи отмечены звездочкой. Некоторые из задач — особенно во второй части — будут больше похожи не на олимпиадные, а на исследовательские, в них потребуется уточнить условие и самостоятельно спланировать свое исследование.

Мы будем изучать *определения свойств* и начнем с нематематического примера. Определение: «Деверь — это брат мужа». Более развернуто, без сокращений русского языка:

«человек A — деверь человека C » по определению означает, что существует такой человек B , что B — муж человека C и A — брат человека B .

Мы определили *двухместное свойство* $D(A, C)$ «быть деверем» через свойство $H(C, B)$ «быть мужем» и свойство $F(A, B)$ «быть братом». Используя язык математики, можно записать:

$$D(A, C) \Leftrightarrow (\exists B)(H(C, B) \wedge F(A, B)).$$

Здесь \Leftrightarrow читается «есть по определению», слева от этого знака мы указываем имя свойства, которое определяем, справа — его определение через заданные свойства; $(\exists B)$ читается «существует B , такое что»; \wedge читается «и».

Вот еще пример: «Точный квадрат — это произведение какого-то целого числа на себя»

Более развернуто: Целое число x — точный квадрат, если существует целое число y такое, что $x = y \cdot y$. Мы определили *одноместное свойство* «быть квадратом» через *трехместное*: « x есть произведение y на z ».

На математическом языке: « x — точный квадрат» $\Leftrightarrow (\exists y)(x = y \cdot y)$

В данном проекте мы ограничиваем возможный вид определений. Все вышеприведенные определения подходят, а вот определение: «человек A — предок человека B , если есть последовательность людей, начинающаяся с A и заканчивающаяся B , где каждый следующий — родитель предыдущего» не подходит. В определениях не разрешается говорить о множествах или последовательностях, а только об элементах, как правило — о числах. Другими словами, нельзя говорить «для любого множества чисел», или «существует множество чисел», но можно говорить «для любого числа», «существует число», «число x равно числу y . Дальше мы всегда будем считать, что *двухместное свойство равенства* $x = y$ можно использовать в определениях всегда.

А. Вводный цикл

A1 Определить через *трехместное свойство* натуральных чисел «произведение» $xy = z$:

- двухместное свойство «делиться на»;
- одноместное свойство «быть единицей»;
- одноместное свойство «быть простым числом».

- A2** Определить через трехместные свойства «произведение» и «сумма» натуральных чисел:
- Одноместные свойства «быть 2», «быть 3»;
 - Одноместные свойства «быть степению 2», «быть степению 4»;
- A3** (*) Определить через трехместные свойства «произведение» и «сумма» натуральных чисел одноместное свойство «быть степению 6»;
- A4** Определить через трехместное свойство «сумма» натуральных чисел и одноместное свойство «быть квадратом натурального числа» трехместное свойство «произведение» натуральных чисел.
- A5** Определить через свойство «меньше» («порядок», $<$) для рациональных чисел:
- Свойство «больше или равно», свойство «больше»;
 - Трехместное свойство «лежать между».

В. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СВОЙСТВ

Два свойства *эквивалентны*, если первое можно определить через второе, и наоборот – второе через первое.

- B1** Найдите наибольшее количество неэквивалентных среди свойств, определяемых через порядок для рациональных чисел. Попробуйте их искать среди одноместных, двухместных, трехместных и т.д. свойств.
- B2** (*) Докажите, что для всякого n существует только конечное количество неэквивалентных n -местных свойств для порядка рациональных чисел.
- B3** Найдите наибольшее количество неэквивалентных среди свойств, определяемых через двухместное свойство «следование» $y = x + 1$ для целых чисел.

С. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНВАРИАНТЫ

Преобразование – это взаимно однозначное отображение какого-то множества S на себя. Будем говорить, что преобразование *сохраняет* свойство, если выполненность свойства для произвольных элементов S равносильна его выполненности для их образов. Также говорят, что свойство — *инвариант* преобразования.

Совокупность всех преобразований, сохраняющих данное свойство, называется *группой преобразований* этого свойства. Аналогично для семейства свойств.

В следующих задачах мы рассматриваем только свойства, определяемые через порядок для рациональных чисел.

- C1** Постройте группу преобразований для каждого из найденных свойств, которые могут оказаться неэквивалентными.
- C2** Найдите для любых двух неэквивалентных свойств преобразование, которое одно из них сохраняет, а другое – нет.
- C3** (*) Докажите, что существует только конечное количество не эквивалентных свойств. Постарайтесь найти их все.

В следующей задаче речь идет о следовании целых чисел

- C4** (*) Попытайтесь создать план поиска не эквивалентных свойств и построения для них групп преобразований.

D. НЕСТАНДАРТНЫЕ МОДЕЛИ

- D1** (*) Пусть S — множество свойств, определяемых через «следование» $y = x + 1$ для целых чисел. Может оказаться, что в S имеются два свойства, про которые мы хотим доказать, что они не эквивалентны, но построить преобразование "их различающее" не удастся. Попробуйте так расширить множество целых чисел (например, добавить еще одну "копию" целых и определить на объединении двух "копий" свойство следования), чтобы в этом расширении нашлось преобразование, различающее эти свойства.