Теория определимости:
Логика. Геометрия. Алгебра

Алексей Львович Семенов, Сергей Федорович Сопрунов
Илья Иванов-Погодаев, Роман Исаев, Владимир Кондратьев,
Борис Рафаилович Френкин

Летняя конференция Турнира Городов
2 августа 2021

Пример задачи по теории определимости

Задача: определить одноместное свойство «быть степенью 6» через отношения сложения и умножения на множестве натуральных чисел. Эта проблема может быть решена (и была решена участниками проекта) с помощью «техники арифметизации», аналогичной доказательству Гёделя его теоремы о неполноте. Участник проекта Валерий Кожуркин предложил другое короткое решение:

Пусть $6^k = 2^a 3^b$. Найдём 2^a and 3^b как максимальные степени 2 и 3 которые делят 6^k.
Пусть p – простое число, такое что $p > 6^k$.
Минимальные решения сравнений
$p^m + 2^a \equiv 0 \mod (p+2)$
and $p^n + 3^b \equiv 0 \mod (p+3)$
для нечётных k это $m = a$ и $n = b$.
Если a и b чётные, мы можем умножить на 6 чтобы работать с нечётными показателями.

В нашем проекте под проблемой определимости мы понимаем описание решетки определимости данной структуры. Решение проблемы можно разделить на 4 этапа.

1. Найти как можно больше неэквивалентных отношений. В какой-то момент возникает предположение, что ничего нового получить нельзя.
2. Для каждого отношения описать группу преобразований, которые его сохраняют. Рассмотрение этих групп позволяет нам объяснить, почему одни отношения не могут быть определены через другие.
3. Доказать, что других неэквивалентных отношений нет. Это самая сложная часть проекта. До сих пор у нас нет общего способа сделать это, поэтому мы должны изобретать что-то конкретное для каждого случая. В большинстве случаев полезно групповое обсуждение.
4. Для каждой пары отношений указать их супремум (сокр. sup) наименьшая верхняя граница и infimum (сокр. inf) их наибольшая нижняя граница. Это решеточные операции над замыканиями отношений.

Рациональные числа с порядком (1 этап)

1. $(x < y)$
2. $B(x, y, z) \leftrightharpoons (x < y < z) \vee (z < y < x)$
3. $C(x, y, z) \leftrightharpoons (x < y < z) \vee (y < z < x) \vee (z < x < y)$
4. $S(x, y, z, u)$: интервалы (x, y) и (z, u) пересекаются, но не содержатся друг в друге (зацепляются).
5. $(x = y)$

Рациональные числа с порядком (2 этап)

Определим группы преобразований в каждом случае

1. Γ состоит из монотонно возрастающих непрерывных преобразований. Все группы ниже содержат подобные преобразованя, так что мы не будем упоминать их далее.
2. Γ_B содержит монотонно убывающих непрерывных преобразований.
3. Γ_C содержит **транспозиции**. Это такие преобразования с двумя иррациональными параметрами s, t, которые отображают интервалы $(-\infty, s)$ и $(s, +\infty)$ в $(t, +\infty)$ и $(-\infty, t)$ соответственно, при этом сохраняя отношение порядка на каждом из них.
4. Γ_S содержит все преобразования из Γ_B и Γ_C и их композиции.
5. $Sym(\mathbb{Q})$ – группа всех преобразований рациональных чисел. Они сохраняют отношение равенства.

Рациональные числа с порядком (3 этап)

Опишем идею доказательства отсутствия других неэквивалентных соотношений. Для этого нам потребуется теоретико-групповое понятие k -**транзитивности**.

Группа G называется k-транзитивной, если для любых двух k-наборов $(a_1, \ldots, a_k); (b_1, \ldots, b_k); a_i \neq a_j; b_i \neq b_j$ существует преобразование $g \in G$ такое, что $\forall (i \leqslant k) (g(a_i) = b_i)$.

Например, группа Γ 1-транзитивна, но не 2-транзитивна. А Γ_B 2-транзитивна, но не 3-транзитивна.

Опишем все группы, включающие Γ. Для этого мы будем рассматривать все k-транзитивные, но не $(k+1)$ - транзитивные группы для каждого натурального k. Оказывается, мы не получим никаких групп, кроме пяти групп, описанных выше. Это решающий шаг в доказательстве отсутствия других отношений. Доказательство сложное, но прямолинейное. Некоторым участникам проекта удалось его придумать.

Рациональные числа с порядком (4 этап)

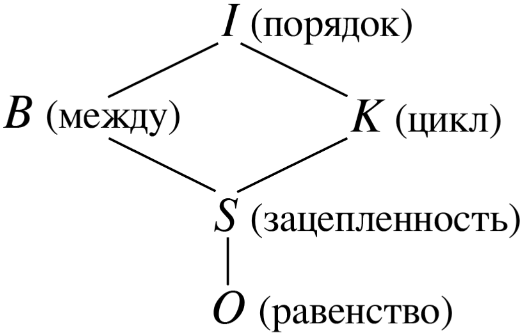
Представим полученные ранее результаты в виде ориентированного графа. Его вершинами будут символы отношений, а направление рёбер будет указывать на определимость одних отношений через другие. Также вспомним два определения, о которых говорили ранее.

Точной верхней гранью (твг, sup) семейств свойств A и B называется семейство свойств, определимых через свойства из объединения семейств A и B.

Точной нижней гранью (тнг, inf) семейств свойств A и B называется семейство свойств, определимых и через свойства из семейства A, и через свойства из семейства B.

Точные верхнюю и нижнюю грани двух семейств можно определить благодаря построенному графу.

Граф отношений



Помимо графа отношений мы можем представить наши результаты в виде графа групп, где вместо отношений мы пишем их группы преобразований. Направление рёбер означать отношение включения между группами.

Целые со следованием (1 этап)

1. $A_n(x, y) \leftrightharpoons y = x + n$
2. $B_n(x, y, z, u) \leftrightharpoons (|x - y| = n) \wedge (x - y = z - u)$
3. $C_n(x, y) \leftrightharpoons |x - y| = n$

Целые со следованием (2 этап)

Определим основные типы преобразований. Для начала, разобьём целые числа на n классов в зависимости от их остатков при делении на n: $r + n\mathbb{Z}$, $0 \le r < n$. Множество, состоящее из таких классов будет обозначать за $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- **Сдвиг** класса $r + n\mathbb{Z}$ на величину k – это преобразование σ вида $\sigma(r + n \cdot S) = r + n \cdot (S + k)$.
- **Перестановка** $\sigma \in S_n$ классов – это преобразование σ, действующее следующим образом $\sigma(r + n \cdot S) = \sigma(r) + n \cdot S$.
- **Разворот** класса $r + n\mathbb{Z}$ – преобразование вида $\sigma(r + n \cdot S) = r + n \cdot (-S)$.

Тогда

1. Γ_{A_n} состоит из сдвигов и перестановок классов из $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Γ_{B_n} состоит из сдвигов, перестановок и разворотов классов из $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Γ_{C_n} состоит из сдвигов, перестановок классов и одновременного разворотов всех классов из $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Открытые проблемы

Отношения/множества	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
$(x < y)$	решена	не решена	не решена
$(y = x + 1)$	были попытки	решена	были попытки
$(z = x + y)$	В процессе	тяжёлая	тяжёлая

И ещё две проблемы, которые также в процессе решения:
1. Бесконечный неориентированный граф без циклов (бесконечное дерево), где каждая вершина имеет степень три; свойство "быть соседними вершинами". ("Ветвящиеся целые".)
2. Порядок на неотрицательных рациональных числах.