Некоторые свойства конструкций Микеля.

Проект представляет Константин Иванов при деятельном участии Ивана Фролова. Идея: Павел Долгирев. Отдельная благодарность Александру Скутину за формулировку задач 20-23.
При поддержке Алексея и Олега Заславских, а также Павла Кожевникова.

Значком $^\circ$ обозначены некоторые общеизвестные факты, без которых, однако, решение дальнейших задач будет затруднительно. Звёздочкой * обозначены предположительно сложные задачи.

Часть 1

1° *(Теорема Микеля)* В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, CA взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что окружности, описанные около $\triangle AB_1C_1, \triangle A_1BC_1, \triangle A_1B_1C$, имеют общую точку.

2° *(Лемма о воробьях)* Дан угол ABC. По прямым AB, BC перемещаются с постоянными (необязательно равными) скоростями точки C_1, A_1 соответственно. Докажите, что все окружности BC_1A_1 проходят через другую точку, отличную от B. В каком случае это неверно?

3° *(Теорема Чевы в форме синусов)* В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, CA взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или все три параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle\overrightarrow{ABB_1}\cdot\sin\angle\overrightarrow{BCC_1}\cdot\sin\angle\overrightarrow{CAA_1}}{\sin\angle\overrightarrow{B_1BC}\cdot\sin\angle\overrightarrow{C_1CA}\cdot\sin\angle\overrightarrow{A_1AB}}=1$$

4° *(Точка Микеля)* Пусть даны четыре прямые общего положения. Исключением одной прямой можно получить три прямые, образующие треугольник, всего четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих четырёх треугольников пересекаются в одной точке.

5° *(Окружность Микеля)* Пусть даны 5 прямых общего положения. Докажите, что точки Микеля всех пяти возможных четвёрок прямых лежат на одной окружности.

6° Даны две окружности $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Докажите, что ГМТ точек X таких, что

$$\frac{\text{степень X относительно } \mathcal{A}}{\text{степень X относительно } \mathcal{B}} = const$$

является окружностью, в случае

a) когда $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ пересекаются

b) для произвольного положения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

7° В треугольнике ABC педальные окружности двух точек совпадают. Докажите, что точки изогонально сопряжены в $\triangle ABC$.

8. Внутри треугольника ABC выбрана точка M, а на сторонах AB, BC, CA взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C в точках M_a, M_b, M_c соответственно. Докажите, что точки M, M_a, M_b, M_c лежат на одной окружности (в дальнейшем будем называть её окружностью $\mathcal{M}$).

9. Пусть в обозначениях предыдущей задачи P – точка пересечения окружностей AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C. Пусть прямая PA_1 пересекает $\mathcal{M}$ в точке A'. Докажите, что $MA' \parallel BC$.

10. Докажите, что прямые M_aA', M_bB', M_cC' пересекаются в одной точке или параллельны.

11⋆ Докажите, что окружности, описанные около треугольников AM_aA', BM_bB', CM_cC', соосны.

12⋆ Пусть есть четыре прямые a, b, c, d общего положения и их точки пересечения X_{ab}, X_{ac}, X_{ad}, X_{bc}, X_{bd}, X_{cd}. Есть окружность $\mathcal{K}$ с выделенной точкой K на ней. Пусть Y_i – точка пересечения X_iK с $\mathcal{K}$. Докажите, что прямые $Y_{ab}Y_{cd}, Y_{ac}Y_{bd}, Y_{ad}Y_{bc}$ пересекаются в одной точке или параллельны.

13. В треугольнике ABC выбираются произвольно точки C_1, C_2 на стороне AB, точки A_1, A_2 на стороне BC, точки B_1, B_2 на стороне CA. Пара прямых A_1B_1 и A_2B_2 пересекается в точке L_c, точки L_a, L_b определяются аналогично. Окружности, описанные около $\triangle A_1A_2L_c$ и $\triangle B_1B_2L_c$ пересекаются в точках L_c и N_c, точки N_b, и N_a определяются аналогично.

a) Докажите, что прямые AN_a, BN_b, CN_c пересекаются в одной точке (назовём её N).

b) Докажите, что N, N_a, N_b, N_c лежат на одной окружности (назовём её $\mathcal{N}$).

Пусть окружности AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C пересекаются в точке P, а окружности AB_2C_2, A_2BC_2, A_2B_2C пересекаются в точке Q.

c) Докажите, что P и Q лежат на $\mathcal{N}$.

d) Докажите, что точка A' пересечения прямых PA_1 и QA_2 лежит на $\mathcal{N}$.

Часть 2

В этом разделе значком гиперболы $)($ обозначены задачи, в которых Вашей целью будет доказать исходное утверждение, а затем сформулировать и доказать аналогичное утверждение для гиперболы.

14. Даны две неподвижные точки A, B и точка X, двигающаяся по прямой. Исследуйте на промежутки монотонности функцию f. Постройте циркулем и линейкой точку экстремума, если

a) $f(X) = XA + XB$

b) $f(X) = XA - XB$

15° *(Задача Фаньяно)* В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, CA взяты точки C', A', B' соответственно, не совпадающие с вершинами $\triangle ABC$. Известно, что треугольник $A'B'C'$ имеет минимальный возможный периметр из всех треугольников, вписанных в $\triangle ABC$. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты $\triangle ABC$.

16$)($ *(Оптическое свойство)* Пусть A — точка на эллипсе с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что внешняя биссектриса угла F_1AF_2 является касательной к эллипсу (имеет ровно одну общую точку с ним).

17$)($ Эллипс с фокусами F_1 и F_2 касается сторон угла ABC. Докажите, что $\angle ABF_1 = \angle CBF_2$.

18$)($ Фиксирован эллипс с фокусом F, прямая ℓ его касается. Пусть P — проекция F на ℓ. Докажите, что если ℓ движется, то P движется по окружности, касающейся эллипса в двух точках.

19. Дан эллипс $\mathcal{K}$ с фокусами F_1 и F_2. Окружность ω с центром O дважды касается его в точках X и Y (эллипс внутри окружности). Докажите, что

a) $OF_1 = OF_2$.

b) XF_1OF_2Y — вписанный пятиугольник.

c)$)($ Пусть точка P движется по ω. Тогда угол между PF_1 и одной из касательных из P к эллипсу постоянен.

d) Дайте другое определение ω так, чтоб ω необязательно дважды касалась $\mathcal{K}$.

e) Прямая через O и центр $\mathcal{K}$ пересекает $\mathcal{K}$ в точке Z. Докажите, что окружность, описанная около $\triangle OZF_1$, касается ω.

f) Пусть окружности α и β касаются ω внутренним образом, проходят через F_1 и второй раз пересекаются в точке E. Докажите, что из двух точек пересечения α и $\mathcal{K}$ можно выбрать точку I, а из двух точек пересечения β и $\mathcal{K}$ можно выбрать точку J, так, что E будет лежать на прямой IJ.

g)* Прямая через O и центр эллипса пересекает эллипс в точках Z и T, а окружность в точках A и B. На прямой ZT выбрана точка U так, что $\angle UF_1O = 90°$. Докажите, что двойное отношение точек A, Z, U, B равно двойному отношению точек B, T, U, A (в указанном порядке).

h) Покажите, что, если принять ω за абсолют модели Клейна плоскости Лобачевского, то $\mathcal{K}$ будет окружностью или эквидистантой.

20$)($ Даны две окружности α и β, пересекающиеся в точках X и Y, в "дольку"их пересечения вписан эллипс, дважды касающийся каждой из окружностей. Прямая ℓ_X касается эллипса, отделяет от него точку X и пересекает "дольку"в двух точках. Также прямая ℓ_X пересекает окружность α вне дольки в точке A_1, и пересекает окружность β вне дольки в точке B_1. Аналогично выберем прямую ℓ_Y и определим точки A_2 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

21* По двум окружностям с одинаковыми угловыми скоростями движутся две точки N и M. Найдите огибающую (кривую, касающуюся всех) прямых NM.

22* По двум прямым с постоянными скоростями движутся две точки N и M. Найдите огибающую прямых NM.

23$)($ Даны две пересекающиеся окружности. В "дольку"их пересечения вписываются всевозможные эллипсы, дважды касающиеся каждой из окружностей. Найдите ГМТ их фокусов.

Часть 3

24° *(Ортологичные треугольники)* Даны точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 общего положения. Пусть перпендикуляры из точки A на прямую B_1C_1, из B на A_1C_1, из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры из A_1 на прямую BC, из B_1 на AC, из C_1 на AB тоже пересекаются в одной точке.

25⋆ Пусть в условиях предыдущей задачи вместо перпендикуляров из вершин $\triangle ABC$ на стороны $\triangle A_1B_1C_1$ опускаются наклонные под улом α, а из вершин $\triangle A_1B_1C_1$ на стороны $\triangle ABC$ опускаются наклонные под углом $180° - \alpha$.

Будем использовать обозначения задачи 13. Предположим дополнительно, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности $\mathcal{R}$ с центром R.

26. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены в $\triangle ABC$.

27. Докажите, что:

a) $R \in \mathcal{N}$.

b) RN — диаметр $\mathcal{N}$.

c) $PR = QR$.

28. Докажите, что в исходный треугольник можно вписать эллипс $\mathcal{K}$ с фокусами P и Q.

29. Прямые PA' и QA' вторично пересекают $\mathcal{R}$ в точках X и Y. Докажите, что XY касается $\mathcal{K}$.

30. Докажите, что $\mathcal{K}$ касается $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ пересекается с $\mathcal{R}$, причем в этом случае точки касания совпадают с точками пересечения.

31. Докажите, что в треугольнике:

a) Точка Лемуана, две точки Брокара и центр описанной окружности образуют дельтоид с двумя прямыми углами.

b) Эллипс с фокусами в точках Брокара касается сторон в основаниях симедиан.

32⋆ Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке L. Докажите, что L лежит на радикальной оси $\mathcal{N}$ и $\mathcal{R}$.