Некоторые свойства конструкций Микеля.

Решения

Часть 1

1° Очевидно.

2° Пусть в один момент времени точки находятся в положениях A_1 и C_1, а в другой — в положениях X и Y соответственно. Окружности (BC_1A_1) и (BXY) могут касаться или пересекаться вторично в точке $G \neq B$.

В первом случае существует гомотетия с центром B, переводящая окружность (BC_1A_1) в окружность (BXY). Она переводит A_1 в X, а C_1 в Y. Следовательно, $C_1A_1 \parallel XY$. Рассмотрим третий момент, когда точки A_1 и C_1 находятся в положениях P и Q соответственно. Тогда $\dfrac{A_1X}{A_1P} = \dfrac{C_1Y}{C_1Q}$, значит, $PQ \parallel A_1C_1$. Следовательно, окружность (BPQ) касается окружности (BA_1C_1), т.е. все окружности (BA_1C_1) касаются друг друга в точке B.

Во втором случае треугольники GXA_1 и GYC_1 подобны, поэтому $\angle(GA_1, A_1B) = \angle(GC_1, C_1B)$ и $\angle(GX, XB) = \angle(GY, YB)$. Тогда существует поворотная гомотетия ϕ с центром G, переводящая A_1 в C_1, а X в Y. Вновь рассмотрим момент, когда точки A_1 и C_1 занимают положения P и Q соответственно. Тогда $\phi(P) = Q$ и, значит, $\angle(GP, PB) = \angle(GQ, QB)$, т.е. G лежит на окружности (BPQ).

3-4° Известные факты.

5° Обозначим точку пересечения прямых ℓ_i и ℓ_j через X_{ij}, а точку Микеля всех прямых, кроме ℓ_i, через A_i. Достаточно доказать, что A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности. Рассматривая окружности $(A_1A_2X_{35}X_{45})$, $(A_2A_3X_{15}X_{45})$, $(A_3A_4X_{15}X_{25})$ и $(A_4A_1X_{25}X_{35})$, получаем:

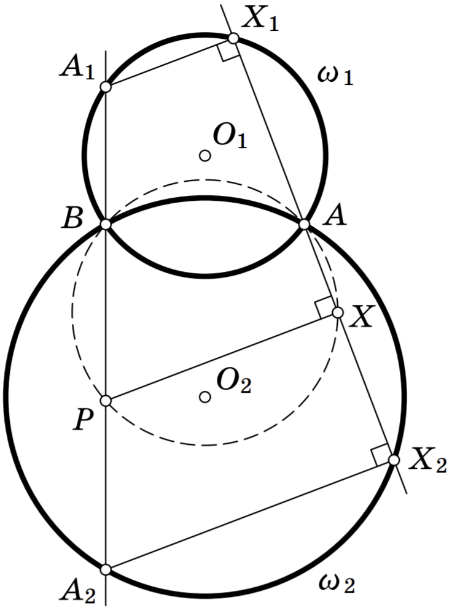
$$\begin{aligned}\angle(A_1A_2, A_2A_3) &= \angle(A_1A_2, A_2X_{45}) + \angle(X_{45}A_2, A_2A_3) = \angle(A_1X_{35}, X_{35}X_{45}) + \angle(X_{45}X_{15}, X_{15}A_3) = \\ &= \angle(A_1X_{35}, X_{35}X_{25}) + \angle(X_{25}X_{15}, X_{15}A_3) = \angle(A_1A_4, A_4X_{25}) + \angle(X_{25}A_4, A_4A_3) = \angle(A_1A_4, A_4A_3).\end{aligned}$$

6° Приведем алгебраическое решение, годящееся для обоих пунктов. Геометрическое решение, в котором пункт a) проще пункта b), мы приведем после алгебраического.

Пусть $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ — уравнения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно в декартовых координатах, где $f(x, y) = x^2 + y^2 + a_1x + a_2y + a_3$ и $g(x, y) = x^2 + y^2 + b_1x + b_2y + b_3$. Заметим, что степени точки (x, y) относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны $f(x, y)$ и $g(x, y)$ соответственно. Поэтому искомое ГМТ задается уравнением $f(x, y) = cg(x, y)$ для некоторой константы c. Легко видеть, что это уравнение задает прямую при $c = 1$ и окружность $\mathcal{C}$ при $c \neq 1$.

Пусть $c \neq 1$. Окружность $\mathcal{C}$ задается уравнением $\dfrac{f(x, y) - cg(x, y)}{1 - c} = 0$. Пусть (p, q) — произвольная точка на радикальной оси окружностей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т.е. $f(p, q) = g(p, q)$. Тогда степень точки (p, q) относительно окружности $\mathcal{C}$ равна $\dfrac{f(p, q) - cg(p, q)}{1 - c} = f(p, q) = g(p, q)$. Следовательно, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соосны.

Геометрическое решение, взятое из [1]: Предположим, что окружности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пересекаются в точках A и B. Обозначим центры этих окружностей через O_1 и O_2 а их радиусы — через r_1 и r_2 соответственно. Точки, симметричные точке A относительно O_1 и O_2, обозначим через A_1 и A_2. Покажем, что множество таких точек X, что отношение их степеней относительно ω_1 и ω_2 равно k, — это окружность. Проведем прямую XA. Пусть она пересечет ω_1 и ω_2 в точках X_1 и X_2 соответственно. Тогда k будет равно $\dfrac{XX_1}{XX_2}$ (взятому с нужным знаком). Поскольку AA_1 и AA_2 — диаметры соответствуюших окружностей, углы AX_1A_1 и AX_2A_2 прямые, а значит, X_1 и X_2 — это проекции точек A_1 и A_2 на прямую AX. Возьмем на прямой A_1A_2 такую точку P, что $\dfrac{PA_1}{PA_2} = k$ (таких точек, что это отношение равно $|k|$, будет две, надо выбрать ту, у которой «знак» соответствующий). Тогда по теореме Фалеса точка X будет проекцией точки P на прямую AX, а значит, она будет лежать на окружности с диаметром AP. Обратными рассуждениями легко показать, что для любой точки на этой окружности отношение степеней точек относительно ω_1 и ω_2 равно k.



Для того чтобы доказать это утверждение для непересекаюшихся окружностей, применим идею «выхода» в трехмерное пространство. Пусть даны две пересекающиеся сферы, пересекающие нашу плоскость по этим двум окружностям. Проводя аналогичные рассуждения, показываем, что геометрическим местом таких точек, что отношение их степеней относительно этих двух сфер равно k, есть сфера из этого пучка, то есть сфера, содержащая окружность пересечения этих двух сфер. Пересечение этой сферы с нашей плоскостью есть окружность из пучка, образованного окружностями ω_1 и ω_2, а это и требовалось доказать.

7° Пусть X_b и Y_b — проекции X и Y соответсвенно на AC, а X_c и Y_c — проекции X и Y соответственно на AB. Так как X_b, Y_b, X_c и Y_c лежат на одной окружности,

$$\angle(BA, AX) = \angle(X_cA, AX) = \angle(X_cX_b, X_bX) = \angle(X_cX_b, X_bY_b) + 90^\circ =$$
$$= \angle(X_cY_c, Y_cY_b) + 90^\circ = \angle(YY_c, Y_cY_b) = \angle(YA, AY_b) = \angle(YA, AC)$$

Аналогично $\angle(AB, BX) = \angle(YB, BC)$. Значит, X и Y изогонально сопряжены относительно $\triangle ABC$.

8. Пусть P – точка пересечения окружностей (AB_1C_1), (A_1BC_1), (A_1B_1C). Заметим, что

$$\angle(MM_a, M_aP) = \angle(AM_a, M_aP) = \angle(AB_1, B_1P) = \angle(CB_1, B_1P) =$$
$$= \angle(CA_1, A_1P) = \angle(CM_c, M_cP) = \angle(MM_c, M_cP).$$

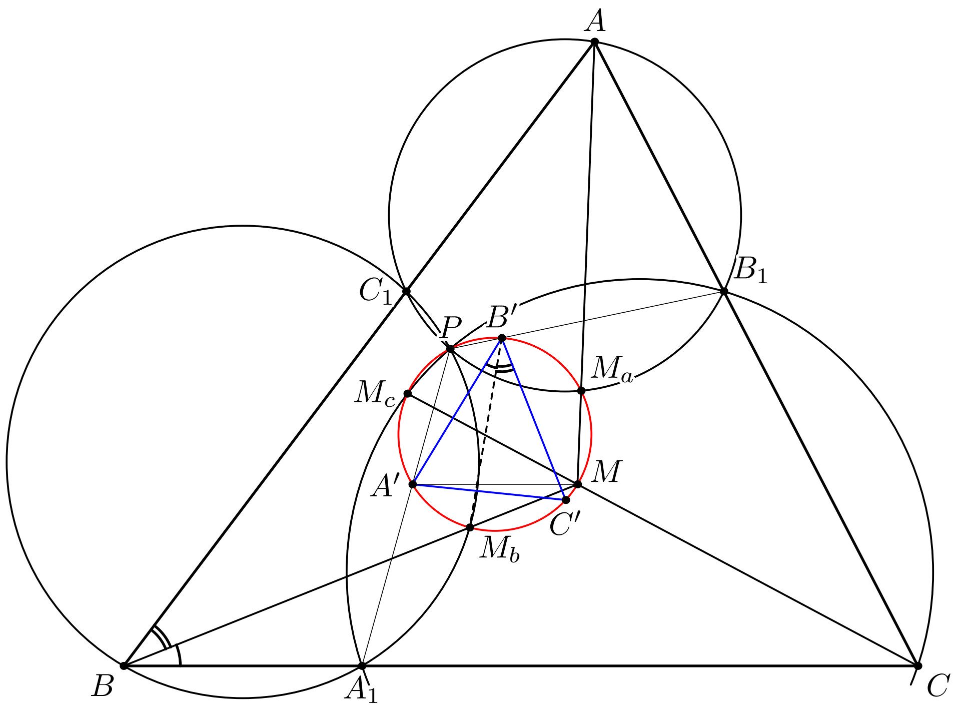
Значит, M_c лежит на окружности (MPM_a). Аналогично получаем, что M_b лежит на этой окружности.

9. Из следующих равенств получаем, что $MA' \parallel BC$.

$$\angle(MA', A'P) = \angle(MM_c, M_cP) = \angle(CM_c, M_cP) = \angle(CA_1, A_1P) = \angle(BC, A'P),$$

10. Имеем
$$\angle(A'B', B'M_b) = \angle(A'M, MM_b) = \angle(CB, BM).$$

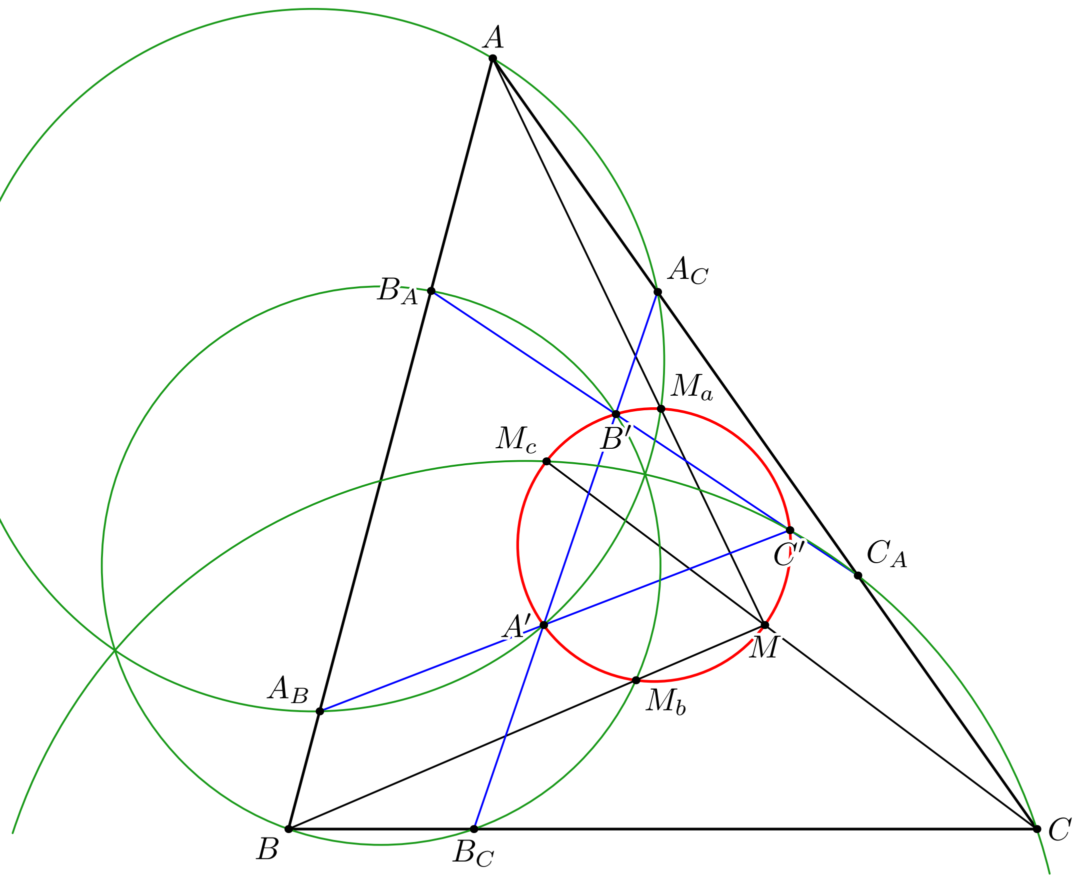
Аналогично $\angle(C'B', B'M_b) = \angle(AB, BM)$ и т.д.. Поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны и противоположно ориентированы. Кроме того, $A'M_a$, $B'M_b$ и $C'M_c$ проходят через точку, соответствующую изогонально сопряженной к M в $\triangle ABC$.



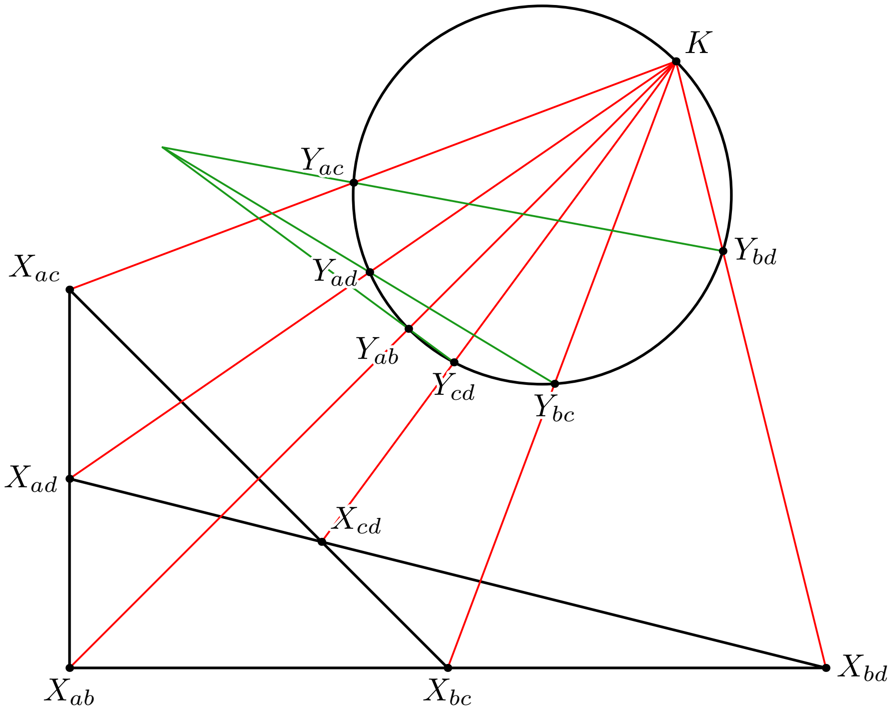
11* Обозначим окружности (AM_aA'), (BM_bB') и (CM_cC') через ω_a, ω_b и ω_c соответственно. Пусть $A_B = AB \cap A'C'$, $B_A = BA \cap B'C'$, $A_C = AC \cap A'B'$, $C_A = CA \cap C'B'$, $B_C = BC \cap B'A'$, $C_B = CB \cap C'A'$. Подсчетом углов получаем, что ω_a проходит через A_B и A_C. Аналогично $B_A, B_C \in \omega_b$ и $C_A, C_B \in \omega_c$. Тогда

$$\frac{AB \cdot AB_A}{AC \cdot AC_A} = \frac{\sin \angle ACB \cdot \sin \angle AC_AB_A}{\sin \angle ABC \cdot \sin \angle AB_AC_A} = \frac{\sin \angle A_CCB_C \cdot \sin \angle A_CC_AB'}{\sin \angle A_CB'C_A \cdot \sin \angle A_CB_CC} = \frac{A_CB_C \cdot A_CB'}{A_CC_A \cdot A_CC},$$

значит, отношение степеней точки A относительно ω_b и ω_c равно отношению степеней точки A_C относительно этих окружностей. Такое же отношение степеней поучаем для точки A_B. Осталось применить утверждение задачи 6.



12* *Первое решение:* По теореме Дезарга об инволюции существует инволюция пучка прямых, проходящих через K, которая переставляет KY_{ab} с KY_{cd}, KY_{ac} с KY_{bd} и KY_{ad} с KY_{bc}. Значит, существует инволюция на $\mathcal{K}$, переставляющая Y_{ab} с Y_{cd}, Y_{ac} с Y_{bd} и Y_{ad} с Y_{bc}. Эта инволюция переводит каждую точку $P \in \mathcal{K}$ во вторую точку пересечения прямой PU с $\mathcal{K}$, где $U = Y_{ab}Y_{cd} \cap Y_{ac}Y_{bd}$. Следовательно, $Y_{ab}Y_{cd}$, $Y_{ac}Y_{bd}$, $Y_{ad}Y_{bc}$ пересекаются в одной точке.



Второе решение: (Мы игнорируем трудности, связанные с расположением точек.) Имеем

$$\frac{Y_{ab}Y_{ad}}{Y_{ad}Y_{ac}} \cdot \frac{Y_{ac}Y_{cd}}{Y_{cd}Y_{bc}} \cdot \frac{Y_{bc}Y_{bd}}{Y_{bd}Y_{ab}} = \frac{\sin\angle Y_{ab}KY_{ad}}{\sin\angle Y_{ad}KY_{ac}} \cdot \frac{\sin\angle Y_{ac}KY_{cd}}{\sin\angle Y_{cd}KY_{bc}} \cdot \frac{\sin\angle Y_{bc}KY_{bd}}{\sin\angle Y_{bd}KY_{ab}} =$$

$$= \frac{\sin\angle X_{ab}KX_{ad}}{\sin\angle X_{ad}KX_{ac}} \cdot \frac{\sin\angle X_{ac}KX_{cd}}{\sin\angle X_{cd}KX_{bc}} \cdot \frac{\sin\angle X_{bc}KX_{bd}}{\sin\angle X_{bd}KX_{ab}} = \frac{X_{ab}X_{ad}/KX_{ab}}{X_{ad}X_{ac}/KX_{ac}} \cdot \frac{X_{ac}X_{cd}/KX_{ac}}{X_{cd}X_{bc}/KX_{bc}} \cdot \frac{X_{bc}X_{bd}/KX_{bc}}{X_{bd}X_{ab}/KX_{ab}} =$$

$$= \frac{X_{ab}X_{ad}}{X_{ad}X_{ac}} \cdot \frac{X_{ac}X_{cd}}{X_{cd}X_{bc}} \cdot \frac{X_{bc}X_{bd}}{X_{bd}X_{ab}} = 1$$

Утверждение задачи теперь следует из тригонометрической теоремы Чевы для треугольника $Y_{ab}Y_{ac}Y_{ac}$.

13. Заметим, что N_c является точкой Микеля для AC, BC, A_1B_1 и A_2B_2, а значит является второй точкой пересечения окружностей (A_1B_1C) и (A_2B_2C).

a) Следует из тригонометрической теоремы Чевы для треугольника ABC, поскольку

$$\frac{\sin\angle BCN_c}{\sin\angle ACN_c} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}, \qquad \frac{\sin\angle CAN_a}{\sin\angle BAN_a} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2}, \qquad \frac{\sin\angle ABN_b}{\sin\angle CBN_b} = \frac{C_1C_2}{A_1A_2}.$$

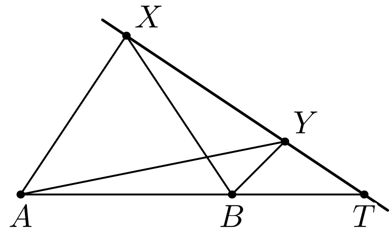
b) Следует из задачи 8 для треугольника ABC, точек A_1, B_1, C_1 на сторонах и точки N.

c) В решении задачи 8 доказано, что точка P пересечения трёх окружностей также лежит на окружности $\mathcal{N}$. Отсюда следует утверждение задачи.

d) Пусть A' — точка на $\mathcal{N}$, такая что $NA' \parallel BC$. Из задачи 9 следует, что PA_1 и QA_2 пересекаются в A'.

Часть 2

14. **a)** Можно считать, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой (в противном случае отразим точку B относительно прямой). Теперь очевидно, что минимум достигается когда X, A и B лежат на одной прямой. А на двух лучах функция f монотонно возрастает, что следует из неравенства треугольника.



b) Можно считать, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой (в противном случае отразим точку B относительно прямой). Из неравенства треугольника следует, что экстремум достигается когда точки A, B и X лежат на одной прямой (это положение точки X обозначим через T). Чтобы доказать, что на двух лучах функция монотонно убывает, сделаем следующее. Пусть точка A дальше от прямой чем B. Рассмотрим две разных точки X и Y на прямой (см. рис.). Для того, чтобы доказать монотонность функции f, надо доказать, что $XA - XB < YA - YB$. Перепишем это как $XA + YB < XB + YA$, а это верно, потому что сумма диагоналей в четырехугольнике больше чем сумма двух противоположных сторон.

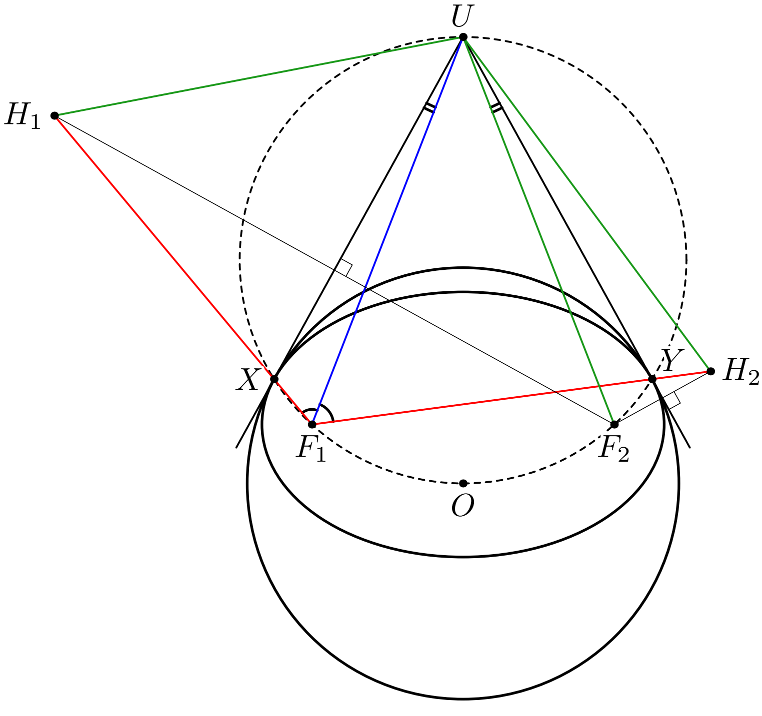
15° Зафиксируем B', C' и будем двигать A'. Так как сумма $B'A' + A'C'$ минимальна, BC — внешняя биссектриса угла $B'A'C'$. Аналогично AC и AB — внешние биссектрисы углов $A'B'C'$ и $A'C'B'$ соответственно. Поэтому A, B и C — центры вневписанных окружностей треугольника $A'B'C'$, а AA', BB', CC' — высоты треугольника ABC.

16)(См. [1], Теорема 1.1 и обсуждение после ее доказательства.

17)(См. [1], Теорема 1.3 и обсуждение после ее доказательства.

18)(Пусть $\mathcal{K}$ — эллипс, G — его второй фокус, а M — середина FG. Пусть точка A симметрична F относительно ℓ, а $B = \ell \cap \mathcal{K}$. Тогда $MP = GA/2 = (FB + BG)/2$ постоянно, т.е. P движется по окружности с центром M, касающейся $\mathcal{K}$.

19. **a) b)** Проведем касательные к эллипсу в точках X и Y. Пусть они пересеклись в точке U.



Давайте докажем вспомогательный факт — биссектриса угла XF_1Y проходит через точку U. Для этого отражаем точку F_2 относительно обеих касательных и получаем точки H_1 и H_2. Тогда треугольники UH_1F_1 и UH_2F_1 равны по трем сторонам. Отсюда $\angle XF_1U = \angle YF_1U$.

Мы получаем, что через точку U проходит и биссектриса угла XF_1Y (и аналогично угла XF_2Y), а также серединный перпендикуляр к XY (т.к. касательные равны). Тогда точки X, F_1, F_2, Y и U лежат на одной окружности. Так как $XOYU$ вписан, то точка O тоже лежит на этой окружности. XO является биссектриссой угла F_1XF_2 (так как это перпендикуляр к касательной к эллипсу), а значит $F_1O = OF_2$.

c))(По задаче 18 ГМТ проекций фокуса F_1 на касательные к эллипсу — окружность. Применяя поворотную гомотетию с центром F_1, углом поворота $\pi/2 - \alpha$ и коэффициентом $1/\sin\alpha$, получаем, что ГМТ P таких, что направленный угол между PF_1 и касательной к эллипсу из P равен α, тоже будет окружностью. При $\alpha = \angle YXU$ это ГМТ будет окружностью ω.

d) В соответствии с предыдущим пунктом ω можно определить как ГМТ P таких, что направленный угол между PF_1 и касательной к эллипсу из P равен данному углу α.

Примечание. Если окружности OF_1F_2 и ω не пересекаются, точки касания $\mathcal{K}$ и ω не будут существовать на обычной плоскости (при желании можно рассмотреть комплексные точки касания).

e) Пусть перпендикуляр к OF_1 в точке F_1 пересекает ω в точке U_1, Z' — проекция U_1 на прямую OZ. Тогда точки F_1 и Z' лежат на окружности с диаметром OU_1, касающейся ω. При этом $\angle(F_1U_1, U_1Z') = \angle(F_1O, OU) = \angle(F_1X, XU)$, поскольку $U_1Z'OF_1$ и F_1XOU вписаны. Следовательно, U_1Z касается $\mathcal{K}$ (так как окружность ω — геометрическое место точек, таких что угол между касательной и отрезком в фокус постоянен) и Z' совпадает с Z.

f) Вытекает из следующей леммы, обобщающей утверждение предыдущего пункта (с помощью поворотной гомотетии с центром в точке F_1).

Лемма. Пусть P — произвольная точка эллипса $\mathcal{K}$, касательная к $\mathcal{K}$ в точке P пересекает ω в точках A и B. Тогда окружность APF_1 касается ω.

g)* Из п. e) следует, что точки Z и T являются проекциями на прямую AB концов хорды ω с серединой F_1. Поэтому можно в двойных отношениях заменить Z и T на концы этой хорды, а A и B на точки пересечения касательных в этих точках с прямой UF_1. Если U лежит вне окружности, сделаем проективное преобразование, сохраняющее окружность переводящее U в бесконечную точку. Если же U внутри окружности, сделаем проективное преобразование, переводящее U в центр. В обоих случаях утверждение задачи станет очевидно.

h) Непосредственно следует из предыдущего. (Про модели плоскости Лобачевского можно прочитать в [2].)

20)(Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, причем F_1 ближе к Y, чем F_2. Из задачи 19c следует, что треугольники $F_1A_1B_1$ и $F_2A_2B_2$ подобны по двум углам. Пусть $S = A_1B_1 \cap A_2B_2$. Из оптического свойства эллипса $\angle A_1SF_1 = \angle A_2SF_2$. Поэтому существует композиция гомотетии с центром S и симметрии относительно биссектрисы угла A_1SA_2, переводящая треугольник $A_1F_1B_1$ в треугольник $A_2F_2B_2$. Значит, $\dfrac{A_1S}{A_2S} = \dfrac{B_1S}{B_2S}$, откуда $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

21* Пусть O — центр поворотной гомотетии, при которой одна из данных окружностей переходит в другую, а точка N в M. Так как все треугольники ONM подобны друг другу, проекция H точки O на прямую MN будет двигаться по некоторой окружности ω. Таким образом задачу можно переформулировать так: даны окружность ω и точка O, найти огибающую прямых, проходящих через произвольную точку $H \in \omega$ и перпендикулярных OH.

Если O лежит на ω, то все такие прямые проходят через диаметрально противоположную точку. В противном случае огибающая будет коникой с фокусом O — эллипсом, если O лежит внутри ω, и гиперболой, если вне. (Это несложно вывести из задачи 18 обратным ходом.)

22* **Ответ:** Парабола, касающаяся данных прямых.

Доказательство. Пусть A и B — точки, двигающиеся линейно по двум данным прямым, а эти две прямые пересекаются в точке X. Рассмотрим точку F, отличную от X, через которую проходят все окружности (ABX) (такая существует по лемме о воробьях, если A и B в разные моменты времени проезжают через X. Если в одинаковые, то AB остаётся параллельна сама себе и огибающей не существует). Точка Микеля четырёх прямых является фокусом параболы, касающейся этих четырёх прямых (см. [1], Теорема 4.10). Поэтому искомая огибающая — парабола с фокусом F, касающаяся двух данных прямых.

23)(**Ответ:** Окружность, проходящая через точки пересечения данных, являющаяся окружностью Аполлония для их центров.

Часть 3

24° Оба условия эквивалентны равенству $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = BA_1^2 + AC_1^2 + CB_1^2$.

25* По условию существует точка P, такая что $\angle(AP, B_1C_1) = \angle(BP, A_1C_1) = \angle(CP, A_1B_1) = \alpha$. Пусть $A_2B_2C_2$ — образ треугольника ABC при повороте вокруг P на угол $\alpha - 90°$. Тогда $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ ортологичны, значит существует точка Q такая, что $A_1Q \perp B_2C_2$, $B_1Q \perp A_2C_2$ и $C_1Q \perp A_2B_2$. Так как $\angle(BC, B_2C_2) = \alpha - 90°$, получаем $\angle(A_1Q, BC) = \angle(A_1Q, B_2C_2) - \angle(BC, B_2C_2) = -\alpha$. Аналогично $\angle(B_1Q, AC) = \angle(C_1Q, AB) = -\alpha$, что и требовалось.

Ниже приводим набросок еще одного решения, не использующего задачу 24.

Скажем, что тройка прямых a', b', c' *гармонична* тройке прямых a, b, c, если в треугольнике со сторонами, параллельными a, b, c, соответствующие чевианы, параллельные a', b', c', конкурентны.

Лемма. Отношение 'быть гармоничным' симметрично, т.е. если тройка a', b', c' гармонична тройке a, b, c, то a, b, c гармонична a', b', c'.

Доказательство. Пусть ℓ — прямая. Через точку O, не лежащую на ℓ, проведем прямые, параллельные a, b, c, a', b', c'. Пусть эти прямые пересекают ℓ в точках A, B, C, A', B', C' соответственно. Используя синусную теорему Чевы, перепишем условие гармоничности тройки a', b', c' тройке a, b, c в виде

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{B'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{A'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{C'A}} = -1.$$

Легко видеть, что это условие сохраняется при замене a, b, c на a', b', c'. Лемма доказана.

Пусть a, b, c и a', b', c' — прямые, содержащие стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Через t_φ обозначаем прямую, получаемую из t поворотом на угол φ. Условие задачи означает, что тройка a, b, c гармонична a'_φ, b'_φ, c'_φ. Выполнив поворот на $-\varphi$, получаем, что $a_{-\varphi}$, $b_{-\varphi}$, $c_{-\varphi}$ гармонична a', b', c', откуда и следует нужное утверждение.

Используем обозначения из задачи 13. Дополнительно предполагаем, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности $\mathcal{R}$ с центром R.

26. *(Косопедальные треугольники)* Пусть P' изогонально сопряжена точке P. Пусть P_a, P_b, P_c — проекции P на BC, CA, AB соответственно; аналогично обозначим проекции точки P'. Мы знаем, что середина R_0 отрезка PP' является центром окружности $(P_aP_bP_c) = (P'_aP'_bP'_c)$. Положим $\angle(PA_1, CA_1) = \angle(PB_1, AB_1) = \angle(PC_1, BC_1) = \varphi$. Пусть R_1 — центр окружности $(A_1B_1C_1)$. Треугольник $P_aP_bP_c$ переходит в $A_1B_1C_1$ при поворотной гомотетии с центром P, отсюда $PP_aA_1 \sim PR_0R_1$, значит R_1 — точка на серединнном перпендикуляре к PP' такая, что $\angle(PR_1, R_1R_0) = \varphi$. Отсюда $\angle(R_1R_0, R_1P') = \varphi$. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром P', переводящую R_0 в R_1. Она переводит $P'_aP'_bP'_c$ в некоторый треугольник $A'_2B'_2C'_2$ такой, что $P'R_0R_1 \sim P'P'_aA'_2 \sim P'P'_bB'_2 \sim P'P'_cC'_2$, таким образом, A'_2, B'_2, C'_2 — точки на прямых BC, CA, AB такие, что $\angle(P'A'_2, CA'_2) = \angle(P'B'_2, AB'_2) = \angle(P'C'_2, BC'_2) = -\varphi$. Так как R_0 — центр окружности $(P'_aP'_bP'_c)$, то R_1 — центр окружности $(A'_2B'_2C'_2)$. Радиусы окружностей $(A_1B_1C_1)$ и $(A'_2B'_2C'_2)$ оба равны $R(P_aP_bP_c)/\sin\varphi$, значит, эти окружности совпадают. Отсюда следует, что $A'_2 = A_2$, $B'_2 = B_2$, $C'_2 = C_2$, $Q = P'$ и $R_1 = R$.

В дополнение, заметим, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяют условию задачи 25, с P и Q в качестве точек пересечения.

27. Из решения предыдущей задачи: $\angle(PR, QR) = 2\varphi = \angle(PA_1, QA_2)$. Из задачи 13 получаем $A' = PA_1 \cap QA_2 \in \mathcal{N}$, откуда $R \in \mathcal{N}$.

Заметим, что $\angle(PN_c, N_cN) = \angle(PN_c, N_cC) = \angle(PA_1, A_1C) = \varphi$. Аналогично $\angle(QN_b, N_bN) = -\varphi$. Это означает, что дуги NP и NQ окружности $\mathcal{N}$ равны. Равенство $PR = QR$ следует из решения задачи 26. Таким образом, RN — серединный перпендикуляр к PQ, т.е. RN — диаметр окружности $\mathcal{N}$.

28. Пусть Q_a, Q_b и Q_c симметричны Q относительно BC, CA и AB соответственно. Пусть PQ_a, PQ_b, PQ_c пересекают BC, CA, AB в точках A^*, B^*, C^* соответственно. Тогда P является центром окружности $(Q_aQ_bQ_c)$, отсюда $PA^* + QA^* = PB^* + QB^* = PC^* + QC^*$. Таким образом, существует эллипс с фокусами P и Q, прозодящий через A^*, B^*, C^*. Он касается сторон треугольника $\triangle ABC$, согласно задаче 16.

29. Так как $\angle(PA_1, BC) = \angle(BC, QA_2) = \varphi$, и A_1A_2YX вписан в $\mathcal{R}$, то A_1A_2YX симметричен относительно общего серединного перпендикуляра к отрезкам XY и A_1A_2 (в частности, $XY \parallel A_1A_2$). Чтобы доказать, что XY касается $\mathcal{K}$, достаточно показать, что центр $\mathcal{K}$ (т.е. середина PQ) лежит на средней линии трапеции A_1A_2YX или, эквивалентно, показать, что $PA_1 = QY$. Из доказанного ранее мы знаем, что $\angle(PR, QR) = 2\varphi$ и $RP = RQ$. Так как $\angle(A_1R, RY) = 2\angle(A_1A_2, A_2Y) = 2\varphi$, имеем $\angle(PR, A_1R) = \angle(QR, YR)$, и по первому признаку равенства, треугольники PRA_1 и QRY равны. Так, нужное равенство $PA_1 = QY$ доказано.

30. Для окружности $\mathcal{R}$, точки P и угла φ рассмотрим *эллипс Брокара*, т.е. огибающую образов прямых PZ после поворота на φ вокруг $Z \in \mathcal{R}$ (см. обратное утверждение к задаче 19c). Для шести положений точки Z (A_1 и X из задачи 29 и три аналогичные пары) соответствующие касательные к эллипсу Брокара также касаются $\mathcal{K}$. Значит, $\mathcal{K}$ совпадает с этим эллипсом Брокара. Теперь нужное нам утверждение следует из утверждения, обратного к задаче 19b.

31. **a)** Сведем задачу к общему случаю, рассмотренному в задачах 26-27 (косопедальные треугольники).

Если P и Q — точки Брокара, то ABC — частный случай косопедального треугольника, для которого $B = A_1$, $C = B_1$, $A = C_1$ и $B = C_2$, $C = A_2$, $A = B_2$. Так, в этом случае $O = R$, значит $PO = OQ$ и $\angle(PO, OQ) = 2\varphi$, где $90° - \varphi$ — угол Брокара.

Пусть L — точка Лемуана. Достаточно доказать, что точка N из задачи 27 лежит на AL, или, эквивалентно, N_a лежит на симедиане $\triangle ABC$ из вершины A. Мы знаем, что окружности (AN_aC) и (AN_aB) касаются AB и AC соответственно. Пусть V изогонально сопряжена N_a в $\triangle ABC$. Легко видеть, что окружности (AVC) и (AVB) касаются BC, откуда V лежит на медиане $\triangle ABC$ из вершины A, что и требовалось.

В решении выше $N = L$ и $R = O$. Ниже мы приведем другое расположение точек, при котором $N = O$ и $R = L$.

Проведем через L прямую B_2C_1 ($B_2 \in AC$, $C_1 \in AB$) так, что B, C, B_2, C_1 лежат на одной окружности.

Из подобия $ABC \sim AB_2C_1$ следует, что AL — медиана в треугольнике AB_2C_1, отсюда $B_2L = C_1L$. Аналогично строим C_2A_1, A_2B_1. Имеем $\angle(LB_2, AC) = \angle(AB, BC) = \angle(AC, LB_1)$. Следовательно $LB_2 = LB_1$. Таим образом, все 6 отрезков LA_1, LA_2, LB_1, LB_2, LC_1, LC_2 равны, и $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности (известной как окружность Тэйлора) с центром $R = L$. Теперь покажем, что точки P и Q (определенные как в общей конструкции задачи 26) являются точками Брокара. (Отметим, что $LP = LQ$). Так как $LA_1 = LA_2 = LC_2$, имеем $A_2C_2 \perp BC$. Аналогично $B_2A_2 \perp CA$ и $C_2B_2 \perp AB$. Далее, из окружностей (AB_2C_2Q), (BC_2A_2Q), (CA_2B_2Q) имеем:

$$y = \angle(C_2A_2, A_2Q) = \angle(C_2B, BQ) = 90° - \angle(QC_2, C_2B) = \angle(B_2C_2, C_2Q) = \angle(B_2A, AQ)$$

и аналогично, $y = \angle(A_2C, CQ)$. Это означает, что Q — точка Брокара (с углом Брокара y), и $(A_2B_2C_2)$ — ее косопедальная окружность, отвечающая углу $\varphi = \angle(QC_2, AB) = 90° - y$. Следовательно $\angle(PL, LQ) = 2\varphi$. Таким образом, P, Q, L, O лежат на окржуности, при этом P и Q симметричны относительно OL.

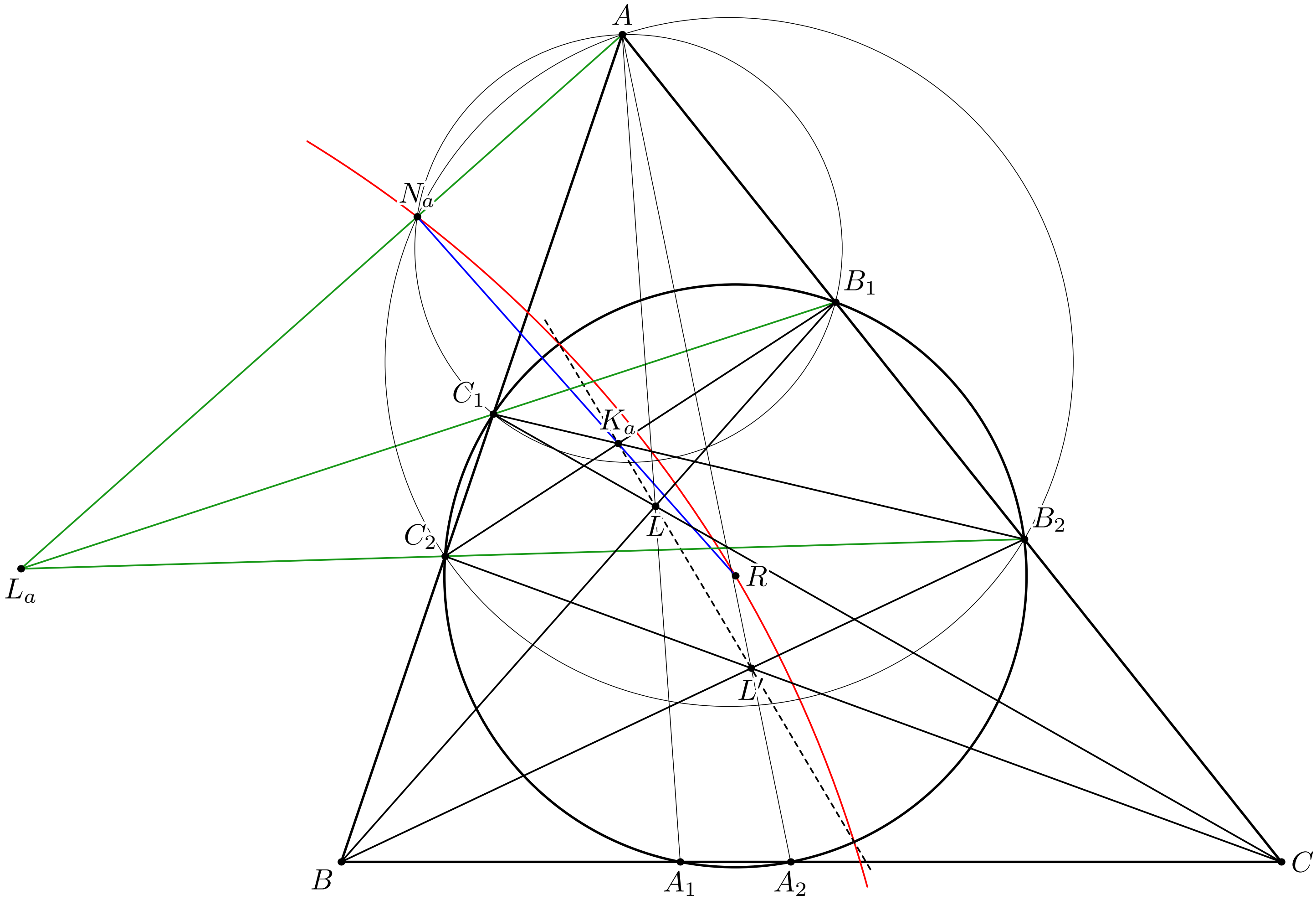
b) Пусть AS — симедиана, так что $BS : CS = c^2 : b^2$. Достаточно доказать, что $\triangle PBS \sim \triangle QCS$, или $PB : QC = c^2 : b^2$; отсюда последует, что $\angle(PS, SB) = \angle(CS, SQ)$.

Из теоремы синусов

$$\frac{PB}{\sin y} = \frac{c}{\sin APB} = \frac{c}{\sin B} \qquad \text{и} \qquad \frac{QC}{\sin y} = \frac{b}{\sin C}.$$

Разделив одно равенство на другое, с учетом теоремы синусов для $\triangle ABC$, получаем нужное соотношение.

32* Несложно видеть, что AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в какой-то точке L'. Пусть $K_a = B_1C_2 \cap B_2C_1$, точки K_b и K_c определим аналогично. По теореме Паппа, точки L, L' и K_a лежат на одной прямой. Достаточно доказать, что K_a лежит на радикальной оси окружностей $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$ (аналогичные рассуждения тогда покажут, что K_b и K_c также лежат на этой радикальной оси). Прямые B_1C_1, B_2C_2 и AN_a конкурентны, поскольку они являются радикальными осями окружностей $(AB_1C_1N_a)$, $(AB_2C_2N_a)$ и $\mathcal{R}$. Так, AN_aL_aN — поляра точки K_a относительно окружности $\mathcal{R}$. Более того, $N_a \in \mathcal{N}$ и NR — диаметр $\mathcal{N}$, следовательно $RN_a \perp AN_a$. Таким образом, инверсия относительно $\mathcal{R}$ переводит K_a к N_a. Эта инверсия переводит прямую $B_2C_1K_a$ в окружность $RB_2C_1N_a$. Следовательно, $K_aC_1 \cdot K_aB_2 = K_aR \cdot K_aN_a$. Отсюда, K_a лежит на радикальной оси окружностей $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$.



Список литературы

[1] А.В.Акопян, А.А.Заславский, *Геометрические свойства кривых второго порядка.* М.: МЦНМО. 2011

[2] В.В.Прасолов, *Геометрия Лобачевского.* М.: МЦНМО. 2004

По всем вопросам, а также по всем опечаткам, недоработкам и неточностям просьба сообщать Иванову К. С. по адресу ponyboss3@gmail.com.