Дистанционные графы и теорема Турана

А. М. Райгородский

Задачу представляют Л. Неустроева, А.М. Райгородский, О. В. Бурсиан, К. П. Кохась

1 Базовые определения

Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель, кратных ребер и ориентации. Назовем *кликой* в этом графе любой его полный подграф. Одна вершина и одно ребро — это тоже клики. Назовем, далее, *кликовым числом* графа G величину $\omega(G)$, равную максимальному такому k, что в графе G есть клика на k вершинах. В то же время назовем *независимым множеством* такое множество вершин графа G, что ни одна пара вершин в нем не образует ребра. В своем роде это "антиклика". Одна вершина является не только кликой, но и независимым множеством вершин. Соответственно, *число независимости* графа G — это максимальное k, при котором в G есть независимое множество вершин мощности k. Обозначается это число $\alpha(G)$. Наконец, *хроматическое число* графа G — это минимальное число $\chi(G)$ цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы каждого ребра имели разные цвета.

2 Задачи до промежуточного финиша

2.1 Простые упражнения

Задача 1. Докажите, что $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

Задача 2. Докажите, что $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Задача 3. Пусть $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G. Докажите, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G)+1$.

Теорема Брукса (без доказательства). *Если граф G связен и не является ни полным графом, ни простым (несамопересекающимся) циклом нечетной длины, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

2.2 Теорема Турана

Задача 4. Пусть $G = (V, E)$ и $|V| = n$. Докажите, что если $\omega(G) < 3$ (или, иначе говоря, в графе нет треугольников), то число ребер в G не больше, чем $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Докажите также, что эта оценка неулучшаема.

Задача 5. Докажите, что утверждение задачи 4 равносильно следующему: пусть $G = (V, E)$ и $|V| = n$; если $\alpha(G) < 3$, то число ребер в G не меньше, чем

$$C_n^2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

и эта оценка неулучшаема.

Задача 6 (теорема Турана). Пусть $G = (V, E)$ и $|V| = n$. Докажите, что если $\alpha(G) \leqslant k$, то число ребер в G не меньше, чем

$$n \cdot \left[\frac{n}{k}\right] - k \cdot \frac{\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)}{2},$$

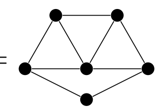
и эта оценка неулучшаема.

2.3 Дистанционные графы на плоскости

Назовем *дистанционным графом на плоскости* (или *графом расстояний на плоскости*) такой граф, вершины которого — это точки плоскости, а ребра — все пары точек, расстояние между которыми равно 1.

Задача 7. Докажите, что в дистанционном графе нет подграфов K_4 (полных графов на 4-х вершинах).

Задача 8. Докажите, что в дистанционном графе нет подграфов $K_{2,3}$ (полных двудольных графов с долями размера 2 и 3).

Задача 9. Докажите, что в дистанционном графе нет подграфов $W =$  .

Задача 10. Дистанционный граф не стоит путать с планарным графом (графом, который можно так изобразить на плоскости, чтобы ребра на рисунке пересекались только по вершинам). Приведите пример непланарного графа расстояний и планарного графа, не являющегося дистанционным. (Критерий Куратовского можно использовать без доказательства. Я его напомню.)

2.4 Теорема Турана для дистанционных графов на плоскости

Задача 11. Пусть в дистанционном графе $G = (V, E)$ на плоскости $4n$ вершин, а $\alpha(G) \leqslant n$. Согласно теореме Турана $|E| \geqslant 6n$. Докажите, что в текущем случае (когда граф G дистанционный) имеет место более сильная оценка $|E| \geqslant 7n$. Воспользуйтесь результатом задачи 7.

Дальнейшая серия задач посвящена уточнению результата задачи 11. При этом по-прежнему мы используем только задачу 7.

Задача 12. Докажите, что если у графа $G = (V, E)$ (не обязательно дистанционного!) $4n$ вершин, $\alpha(G) \leqslant n$, $\omega(G) \leqslant 3$ (граф не содержит K_4) и *минимальная* степень вершины G не больше трех, то из графа можно так удалить не более четырех вершин со всеми примыкающими к ним ребрами, чтобы в новом графе $G' = (V', E')$ было $\alpha(G') \leqslant \alpha(G) - 1$, $|E'| \leqslant |E| - 8$ (удалив не более четырех вершин, избавимся от не менее восьми ребер).

Для решения задачи 12 можно действовать так. Пусть A — вершина минимальной степени в G. Рассмотрите по отдельности все 4 случая значения степени от 0 до 3. В первых трех случаях удаляйте вершину A со всеми соседями и используйте задачу 2 в сочетании с теоремой Брукса для доказательства существования вершины большой степени в остающемся графе. В последнем случае проведите небольшой перебор возможных ситуаций.

Задача 13. С помощью индукции выведите из задачи 12 оценку $|E| \geqslant 8n$ в условиях задачи 11.

Задача 14. Докажите, что для графов (не обязательно дистанционных!), у которых $4n$ вершин, $\alpha(G) \leqslant n$ и $\omega(G) \leqslant 3$, оценка $|E| \geqslant 8n$ неулучшаема.

И еще большие усиления за счет дополнительных “запрещенных” подграфов.

Задача 15*. С помощью результатов задач 7, 8 и 9 докажите, что если у дистанционного графа на плоскости $4n$ вершин и $\alpha(G) \leqslant n$, то $|E| \geqslant \frac{26}{3}n$.

Задача 16 (открытая проблема). Улучшите оценку задачи 15.

2.5 Дистанционные графы в пространствах большей размерности

Если Вы знаете, что такое n-мерное пространство, обозначаемое традиционно $\mathbb{R}^n$, то Вы молодец, но прямо сейчас это знание не является обязательным. Позже мы дадим определения, достаточные для решения соответствующих задач. Однако пока можно обойтись без слова "пространство". Рассмотрим граф $G(n,3,1)$. Его вершинами служат все возможные C_n^3 трехэлементные подмножества множества $\{1,2,\ldots,n\}$. А ребрами в нем соединяются те и только те вершины, которым отвечают трехэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по одному элементу. На рисунке 2 изображен пример графа $G(5,3,1)$.

Задача 17. Найдите число ребер в графе $G(n,3,1)$.

Задача 18. Найдите число треугольников в графе $G(n,3,1)$.

Задача 19. Докажите, что $\alpha(G(n,3,1)) = n, n-1$ или $n-2$ в зависимости от величины остатка от деления числа n на 4.

Задача 20. Найдите $\omega(G(n,3,1))$.

Задача 21*. Докажите, что если $n = 2^k$, то $\chi(G) = \frac{|V|}{\alpha(G)} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Напомним, что две функции f и g натурального аргумента n, не принимающие нулевых значений, называются *асимптотически равными* (или *эквивалентными*), если $\frac{f(n)}{g(n)} \to 1$ при $n \to \infty$. Например, асимптотически равны функции n^4 и $n^4 + 100n^2$. Пишут $f \sim g$. Далее, функция f *бесконечно мала* по сравнению с g, если $\frac{f(n)}{g(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае пишут $f = o(g)$. Например, $n^3 = o(n^4)$.

Задача 22. Пусть W_n — произвольное подмножество множества вершин графа $G(n,3,1)$ (для каждого n рассматриваем свое множество W_n). Обозначим $r(W_n)$ число ребер, оба конца которых принадлежат W_n. Пусть $n = o(|W_n|)$ при $n \to \infty$. Докажите, что обычная теорема Турана гарантирует тогда, что $r(W_n) \geqslant f(n)$, где f — некоторая функция, асимптотически равная величине $\frac{|W_n|^2}{2\alpha(G(n,3,1))} \sim \frac{|W_n|^2}{2n}$.

Вот теперь дадим формальное определение пространства $\mathbb{R}^n$. Это просто множество всех "точек" $\mathbf{x}$, каждая из которых есть последовательность, состоящая из n действительных чисел: $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$. При этом между любыми двумя точками $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ можно померить расстояние по формуле

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}.$$

В частности, при $n = 1$ получаем обычную прямую, при $n = 2$ — обычную плоскость, при $n = 3$ — обычное пространство.

Далее, скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n), \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ в $\mathbb{R}^n$ — это выражение

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Нетрудно проверить, что всегда

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Задача 23. Докажите, что граф $G(n,3,1)$ изоморфен следующему графу в $\mathbb{R}^n$:

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n): \ x_i \in \{0,1\}, \ x_1 + \ldots + x_n = 3\}, \quad E = \{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}: \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1\}.$$

Таким образом, этот граф дистанционный, т.е. его вершины — точки в пространстве, а ребра — пары точек на заданном наперед расстоянии.

Задача 24. Пусть $K_{l_1,\ldots,l_r}$ — полный r-дольный граф с размерами долей $l_1,\ldots,l_r$. Докажите, что дистанционный граф в $\mathbb{R}^n$ не содержит в качестве подграфа граф $K_{3,\ldots,3}$ с числом долей $[n/2]+1$.

3 Задачи после промежуточного финиша

Задача 25. Докажите, что если в условиях задачи 22 дополнительно потребовать выполнение условия $|W_n| = o(n^2)$, то оценка из задачи 22 (т.е. обычная турановская оценка) асимптотически неулучшаема. Иными словами, для любой функции g, удовлетворяющей условиям $g(n) = o(n^2)$ и $h = o(g(n))$ при $n \to +\infty$, существует последовательность W_n, такая что $|W_n| \sim g(n)$ и $r(W_n) \sim \frac{|W_n|^2}{2n}$.

Задача 26-27. Назовем *вершинами правильного симплекса* в $\mathbb{R}^n$ любой набор из k точек, попарные расстояния между которыми равны 1. Докажите, что такие множества существуют при всех $k \leqslant n+1$ (задача 26) и не существуют ни при каких $k \geqslant n+2$ (задача 27).

Задача 28. Пусть $G_n = (V_n, E_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — дистанционные графы в $\mathbb{R}^n$. Обозначим их числа независимости α_n. Пусть W_n — произвольное подмножество множества вершин графа G_n (как обычно, для каждого n рассматриваем свое множество W_n). Обозначим $r(W_n)$ число ребер, оба конца которых принадлежат W_n. Пусть $n\alpha_n = o(|W_n|)$ при $n \to \infty$. С помощью задачи 26-27 докажите, что $r(W_n) \geqslant f(n)$, где f — некоторая функция, асимптотически равная величине $\frac{|W_n|^2}{\alpha_n}$.

Применив утверждение задачи 28 к последовательности графов $G_n = G(n, 3, 1)$ мы получим оценку примерно в 2 раза лучше, чем в задачах 22 и 25 (вдвое лучшая турановской). Здесь нет противоречия, потому что в этих задачах сформулированы разные (практически противоположные) требования к числу вершин $|W_n|$: $|W_n| = o(n^2)$ в задаче 25 и (проверьте!) $n^2 = o(|W_n|)$ в задаче 28. Оказывается, для графов $G(n, 3, 1)$, как ни странно, можно получить еще более сильные оценки турановского типа, временно отказавшись от использования в них числа независимости. Идея состоит в том, чтобы посмотреть вершины, содержащие тот или иной элемент множества $\{1, \ldots, n\}$, оценить соответствующие количества ребер и воспользоваться некоторыми стандартными неравенствами.

Задача 29. Пусть W_n — произвольное подмножество множества вершин графа $G(n, 3, 1)$. Пусть $n^2 = o(|W_n|)$ при $n \to \infty$. Докажите, что $r(W_n) \geqslant f(n)$, где f — некоторая функция, асимптотически равная величине $4.5 \cdot \frac{|W_n|^2}{n}$. Иными словами, получается примерно в 4.5 раза лучшая оценка, чем в задаче 28!

Задача 30. Докажите, что оценка из задачи 29 в стандартном смысле асимптотически неулучшаема.

Само обозначение "$G(n, 3, 1)$" подсказывает, что у этого графа есть обобщение. Это граф $G(n, r, s)$. У него вершинами служат все r-элементные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, а ребрами семиняются две вершины, если и только если соответствующие множества пересекаются ровно по s элементам. Иными словами, вершины — n-мерные точки с "координатами" 0 или 1, причем в каждой точке ровно r единиц. Ребро проводится тогда и только тогда, когда скалярное произведение вершин равно s. Графы $G(n, r, s)$ называются *графами Джонсона*, а их частный случай — графы $G(n, r, 0)$ — называются *кнезеровскими графами.*

Задача 31. Найдите число ребер в графе $G(n, r, s)$.

Задача 32. Найдите число треугольников в графе $G(n, r, s)$.

Задача 33*. Докажите, что аналогом результатов из задач 29 и 30 служит асимптотически неулучшаемая оценка величиной $\frac{|W_n|^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}$. Здесь надо требовать, чтобы $n^{r-1} = o(|W_n|)$.

Следующий результат можно использовать без доказательства.

Теорема Эрдеша, Ко и Радо. *Пусть $n \geqslant 2r$. Тогда $\alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$.*

Задача 34. Докажите, что если W_n — произвольное подмножество множества вершин графа $G(n,r,0)$ и $l = |W_n| > \alpha(G(n,r,0))$, то

$$r(W_n) \geqslant \frac{l\left(l - \left(C_n^r - C_{n-r}^r\right)\right)}{2}.$$