

Фазовые пространства

проект представляют*: Анастасия Еннэ, Андрей Плосконосов,
Андрей Рябичев и Евгений Хинко

Аннотация

В этом проекте мы предлагаем участникам ряд задач, для решения которых полезно ввести *фазовое пространство*. В части до промежуточного финиша мы демонстрируем большое количество примеров таких задач. В части после промежуточного финиша мы даём несколько сложных задач, для решения которых нужно глубоко исследовать геометрические и топологические свойства фазовых пространств, возникающих в них.

1 Задачи до промежуточного финиша

1.1 Введение

Во многих математических задачах бывает удобно рассмотреть “множество состояний” некоторой системы. Такое множество обычно называют *фазовым пространством* данной системы. Данные о состоянии системы могут включать не только координаты точек, но и, как это часто бывает в механике, их скорости.

Работать с возникающим в некоей задаче фазовым пространством удобно не просто как с множеством точек, а вводя на нём дополнительную структуру. Например: геометрическую структуру (как на множестве точек плоскости); функцию расстояния между точками; понятие площади/объёма для подмножеств фазового пространства; отношение инцидентности (если фазовое пространство является собой множество вершин графа). Правильный выбор такой структуры может сильно упростить описание происходящего в задаче, тогда сама задача становится тривиальной.

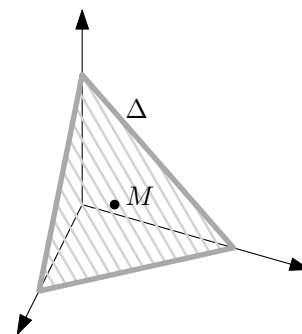
Рассмотрим следующий пример.

Задача 0. За столом сидят трое ребят, у каждого есть тарелка с кашей. Раз в минуту они одновременно делают следующее: каждый ребёнок делит кашу в своей тарелке пополам и перекладывает части двум другим. Докажите, что через несколько таких ходов у всех будет одинаковое количество каши с точностью до 1%.

Решение. Скажем, что общее количество каши равно 1. Обозначим через (x_1, x_2, x_3) набор чисел, соответствующий количеству каши в тарелках детей. Все возможные положения системы лежат в плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. При этом $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и $x_3 \geq 0$. Таким образом, наше фазовое пространство — правильный треугольник Δ с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Заметим, что преобразование

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$



*Мы благодарим за продуктивные обсуждения и ценные советы по улучшению проекта П. Бибилова, С. Дориченко, А. Канель-Белова, П. Кожевникова, А. Плахова, М. Скопенкова и Г. Челнокова.

есть не что иное, как гомотетия треугольника Δ с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ относительно точки пересечения медиан $M = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Проверьте это самостоятельно.

Отметим все положения системы, в которых у детей одинаковое количество каши с точностью до 1%. Полученное подмножество треугольника Δ содержит маленький круг с центром в M . После достаточно большого числа итераций все точки Δ окажутся внутри такого круга, откуда следует требуемое в задаче. \square

1.2 Геометрическая вероятность

В каждой из следующих задач требуется формализовать понятие вероятности, и затем исходя из данного вами определения вычислить ответ.

Задача 1 (Нетерпеливые дуэлянты). Два друга договорились встретиться между полуднем и часом дня, но не условились о точном времени встречи. Каждый из них приходит в случайный момент времени из указанного промежутка и ждёт другого 10 минут, а затем уходит. С какой вероятностью друзьям удастся встретиться?

Задача 2. Палочку ломают в двух случайных местах. С какой вероятностью из частей можно будет сложить треугольник? Сравните ответы для следующих способов *действовать случайно*:

- (а) выберем первую точку случайным образом, сломаем палочку в этой точке, выберем одну из двух частей равновероятно, и затем случайным образом выберем вторую точку разлома на ней;
- (б) независимо выберем две случайные точки и сломаем палочку в каждой из них;
- (с) выберем случайное представление длины палочки l в виде суммы трёх упорядоченных слагаемых $l = x_1 + x_2 + x_3$ (ср. с задачей 0).

Задача 3. Марсоход развезжает по ровной поверхности негостеприимной планеты (будем считать её плоской). Он выбирает случайное направление и проезжает в выбранном направлении километр. С какой вероятностью, сделав три таких итерации и проехав три километра, марсоход пересечёт свой след?

Задача 4 (Игла Бюффона). Плоскость разлинована параллельными прямыми, расстояние между соседними равно 1см. На плоскость бросают иголку длины 1см. С какой вероятностью иголка пересечёт какую-нибудь из прямых?

1.3 Пространства конфигураций

Задача 5. На координатной плоскости нарисован многоугольник площади > 1 . Докажите, что в нём найдутся две такие точки A и B , такие что обе координаты вектора AB целые.

Задача 6. На плоскости расположен многоугольник площади < 1 и даны 1000 точек. Докажите, что многоугольник можно сдвинуть на вектор длины $< \sqrt{\frac{1000}{\pi}}$ так, чтобы он не покрывал ни одну из точек.

Задача 7. Дана единичная сфера. *Большая окружность* — окружность радиуса 1, расположенная на сфере. *Ломаной на сфере* будем называть кривую, составленную из дуг больших окружностей.

- (а) На единичной сфере дана ломаная γ длины $< \pi$. Докажите, что найдётся большая окружность, не пересекающая γ .
- (б) На единичной сфере дана несамопересекающаяся ломаная γ длины $> \pi k$. Докажите, что найдётся большая окружность, пересекающая γ более чем в k точках и не содержащая ни одного ребра γ .

Задача 8. В пространстве расположены два тетраэдра. Для любой плоскости, проекции тетраэдров на неё либо обе являются треугольниками, либо обе являются четырехугольниками. Докажите что тетраэдры подобны.

Задача 9. На плоскости вбито k гвоздей. Проводятся прямые, не пересекающие ни один из гвоздей. Две прямые назовём эквивалентными, если одну из них можно переместить во вторую, не задев ни одного гвоздя. Тогда множество всех таких прямых разбивается на классы эквивалентности; каждый класс состоит из прямых, эквивалентных друг другу. Найдите (а) минимальное (b) максимальное число классов эквивалентности прямых для данного k .

Задача 10. В гонке по пересечённой местности участвуют 8 машин. Трасса представляет собой прямую дорогу, на которой есть несколько заболоченных участков. Каждая машина движется по сухим участкам дороги с постоянной скоростью (каждая со своей), а по заболоченным участкам — с другой постоянной скоростью (также каждая со своей).

Машины стартуют из одной точки, но в разное время, временные промежутки между стартами могут различаться. На дистанции дежурят 500 судей. Каждый судья отметил, в каком порядке мимо него проехали машины, напротив судьи обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух судей машины проехали в одинаковом порядке.

1.4 Дискретные фазовые пространства

Задача 11. Маша задумала двузначное число. Вася называет двузначные числа, его задача назвать число, отличающееся от числа Маши в каждом разряде не более чем на 1. Какого наименьшего числа ходов Васе заведомо хватит?

Задача 12. Маша задумала двузначное число. Теперь задача Васи — назвать число, совпадающее с числом Маши в одном разряде, а в другом отличающееся не более чем на 1. Хватит ли ему (a) 18 попыток; (b) 20 попыток; (c) 22 попыток?

Задача 13. По кругу расставлено несколько ящичков, по ним некоторым образом разложены шарики. За один ход разрешается взять все шарики из любого ящичка и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующего ящичка и кладя в каждый ящичок по одному шарiku.

(a) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из того ящичка, в который положили последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

(b) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по ящичкам можно получить любое другое.

Задача 14. (a) В одной из клеток бесконечной в обе стороны полоски стоит невидимый корабль. За ход разрешается делать один выстрел. После каждого хода корабль сдвигается на некоторое число клеток (число клеток и направление сдвига каждый раз одни и те же, но не известны игроку). Придумайте стратегию, позволяющую наверняка попасть в корабль.

(b) Та же задача на плоскости: корабль стоит в одной из клеток и каждый ход сдвигается на один и тот же неизвестный целочисленный вектор. Игрок делает по одному выстрелу за ход.

1.5 Избранные задачи

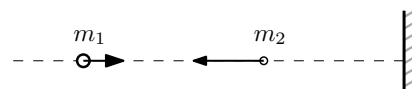
Задача 15. Даны три сосуда вместимостью 6, 7 и 12 литров. Два меньших сосуда заполнены. Можно ли отмерить 9 литров воды, переливая воду между сосудами?

Задача 16. Имеются три бассейна. Из первого с постоянной скоростью выливается вода, а во второй и третий бассейны вода поступает с постоянными скоростями. Изначально в первом

бассейне было столько же воды, сколько в двух других в сумме; через некоторое время во втором бассейне стало столько же воды, сколько в двух других в сумме; ещё через какое-то время в третьем бассейне стало столько же воды, сколько в первых двух в сумме. Возможно ли, что ни в начале, ни в конце этого промежутка времени ни один из бассейнов не был пустым?

Задача 17 (Упрощённая модель «хищник-жертва»). В лесу живёт x зайцев и y волков. Будем считать, что если волков нет, то зайцы размножаются с постоянной скоростью a_0 , если же в лесу $y > 0$ волков, то они съедают $a_1 y$ зайцев каждую единицу времени (т. е. $x'(t) = a_0 - a_1 y$). Также будем считать, что если зайцев нет, то волки умирают с постоянной скоростью b_0 , наличие же $x > 0$ зайцев позволяет волкам размножаться со скоростью $b_1 x$ (т. е. $y'(t) = -b_0 + b_1 x$). Найдите зависимость количества зайцев и волков от времени. Для каких a_0 , a_1 , b_0 и b_1 эта зависимость периодична?

Задача 18. Два шарика с массами m_1 и m_2 движутся по прямой, как показано на рисунке. Между шариками, а также между шариками и стенкой, происходят упругие соударения.



- (a) Докажите, что между шариками за всё время произойдёт конечное число соударений.
- (b) Как количество соударений зависит от отношения начальных скоростей шариков и от их масс?

При соударениях шариков действуют закон сохранения импульса $\sum m_i v_i = \text{const}$ и закон сохранения энергии $\sum m_i v_i^2 = \text{const}$. Удар о стенку происходит абсолютно упруго (с сохранением скорости). Можно считать, что шарик, ближайший к стенке, в начальный момент движется от неё.

Указания и решения к задачам до промежуточного финиша

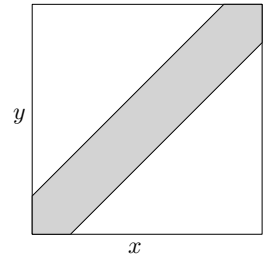
Геометрическая вероятность

Для решения задач нам нужно определить понятие вероятности. Пусть X — многоугольник на плоскости, точки которого моделируют множество исходов в нашей задаче. Пусть $A \subset X$ — некоторое подмножество. Будем говорить, что *вероятность попасть в A* равна отношению площади¹ A к площади X . В этой ситуации X мы называем *вероятностным пространством*, а его подмножества — *событиями*. Более подробное введение в теорию вероятностей см., например, в [Sh].

Решение задачи 1. Ответ: $\frac{11}{36}$.

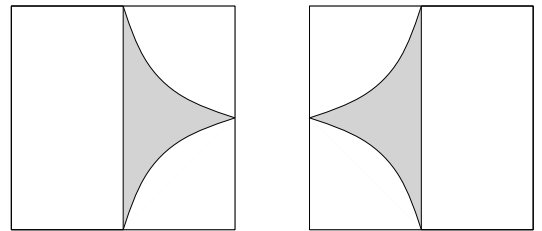
Отождествим возможное время прихода человека с отрезком $[0; 1]$. Тогда время прихода двух людей отождествляется с квадратом $[0; 1] \times [0; 1]$. А именно, точке (x, y) соответствует ситуация, когда первый человек пришёл в момент x , а второй — в момент y .

Закрасим точки, соответствующие ситуациям, когда друзьям удастся встретиться. Они образуют полосу площади $\frac{11}{36}$. \square



Решение задачи 2. (а) Ответ: $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Скажем, что при выборе первой точки разлома мы выбираем случайную точку на отрезке $[0; 1]$. Далее, отождествим каждую из получившихся частей с отдельной копией отрезка $[0; 1]$. Таким образом, наше вероятностное пространство состоит из двух квадратов (координата первого выбора откладывается в каждом из них по оси абсцисс, а координата второго выбора — по оси ординат).



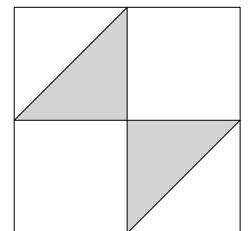
Отметим точки X , соответствующие разломам, из которых можно сложить треугольник. Допустим, первый разлом делается в точке $x \in [0; 1]$. Затем мы выбрали первый из двух кусков, отождествили его с отрезком $[0; 1]$ и выбрали на нём точку y . Из полученных трёх кусков можно сложить треугольник, если $x > \frac{1}{2}$, $xy < \frac{1}{2}$ и $x(1 - y) < \frac{1}{2}$. Это подмножество имеет площадь

$$2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Подмножество второго квадрата, соответствующие разломам, из которых можно сложить треугольник, строится аналогично.

(b) Ответ: $\frac{1}{4}$.

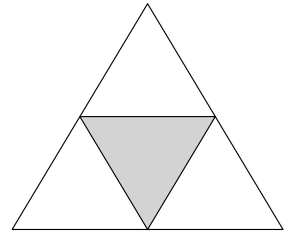
Отождествим палочку с отрезком $[0; 1]$. Выбор пары точек $x, y \in [0; 1]$ задаёт точку в квадрате. Из полученных частей можно сложить треугольник, если $x < y$ и при этом $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$ и $y - x < \frac{1}{2}$, либо если $y < x$ и при этом $x > \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$ и $x - y < \frac{1}{2}$. Площадь подмножества, заданного этими неравенствами, равна $\frac{1}{4}$.



¹Вообще говоря, у произвольного подмножества $A \subset X$ площадь может быть не определена; поэтому можно говорить лишь о вероятности попасть в «достаточно хорошее» подмножество, у которого площадь определена корректно.

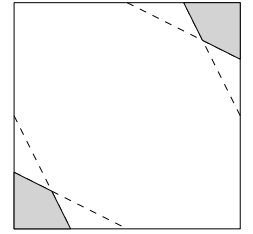
(с) Ответ: $\frac{1}{4}$.

Вероятностное пространство в этой задаче можно отождествить с конфигурационным пространством из задачи 0. Из частей, полученных в результате разбиения, можно сложить треугольник, если $x_1 < \frac{1}{2}$, $x_2 < \frac{1}{2}$ и $x_3 < \frac{1}{2}$. Площадь этого подмножества составляет четверть площади треугольника. \square



Решение задачи 3. Ответ: $\frac{1}{12}$.

Отождествим вероятностное пространство с квадратом $[0; 2\pi) \times [0; 2\pi)$, где координаты соответствуют величинам углов ломаной, по которой едет марсоход. Помимо границы $x = 0$ и $y = 0$ (которая имеет нулевую площадь), марсоход пересечёт свой след, если (x, y) — пара углов в некоем треугольнике, оба из которых не являются строго наибольшими, либо если $(2\pi - x, 2\pi - y)$ — пара углов в некоем треугольнике, оба из которых не являются строго наибольшими. Это соответствует системам неравенств

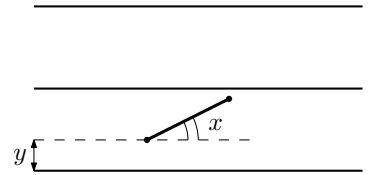


$$\begin{cases} x \leq \pi - x - y, \\ y \leq \pi - x - y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (2\pi - x) \leq \pi - (2\pi - x) - (2\pi - y), \\ (2\pi - y) \leq \pi - (2\pi - x) - (2\pi - y). \end{cases}$$

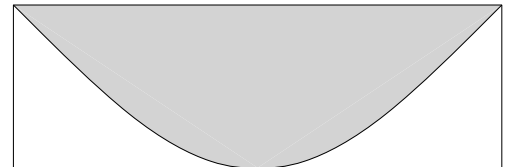
Каждая из них задаёт четырёхугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{24}$ от площади квадрата. \square

Решение задачи 4. Ответ: $\frac{2}{\pi}$.

Для определённости будем считать прямые горизонтальными. Вероятностное пространство в этой задаче можно отождествить с прямоугольником $[0; \pi) \times (0; 1]$, где первая координата задаёт ориентированный угол иголки относительно прямых, а вторая координата показывает расстояние от нижнего конца иголки до ближайшей снизу прямой.



Тогда множество исходов, которые нас интересуют, задаётся неравенством $1 - y \leq \sin x$. Это множество имеет площадь $\int_0^\pi \sin x dx = 2$. \square



Пространства конфигураций

Терминологическое замечание. Пусть дано подмножество X евклидова пространства. Если мы отождествляем множество точек X с множеством *расположений* чего-либо (например, с множеством прямых на плоскости, или с множеством больших окружностей на сфере, или с множеством расстановок чисел с постоянной суммой), то X называется *пространством конфигураций*. Этот термин считается общепринятым и более удачным, чем термин «фазовое пространство», хотя по сути они имеют одинаковый смысл.

Решение задачи 5. Рассмотрим «решётку» прямых $x = n$ и $y = n$ для всевозможных $n \in \mathbb{Z}$. Она разбивает плоскость на квадраты. Назовём квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$ *базовым*. Очевидно, каждый квадрат получается из базового сдвигом на свой целочисленный вектор. Будем считать, что все квадраты выглядят как $[0; 1) \times [0; 1)$, т. е. не включают верхнюю и правую стороны.

Возьмём многоугольник из условия. Решётка разрезает его на конечное число частей. Сдвинем каждую часть на соответствующий целочисленный вектор так, чтобы все они оказались внутри базового квадрата. Фактически, мы построили *множество точек многоугольника, а точностью до целочисленного сдвига*.

Поскольку сумма площадей частей > 1 , они не могут не накладываться внутри базового квадрата. В качестве A и B достаточно взять любую пару точек, которые совпадут после сдвига. \square

Решение задачи 6. Начертим вокруг каждой точки круг радиуса $\sqrt{\frac{1000}{\pi}}$. Закрасим в каждом круге точки многоугольника, которые в нём лежат. Затем при помощи параллельных переносов совместим все круги. Закрашенные точки покроют некоторую область P . Вектора от точек P до центра круга — это в точности *те вектора, на которые нельзя сдвигать многоугольник*.

Каждое закрашенное множество имело площадь < 1 , значит площадь P составляет < 1000 . Но круг имеет площадь ровно 1000, следовательно, в нём найдётся незакрашенная точка. Вектор между этой точкой и центром круга является искомым. \square

Решение задачи 7. Решение этой задачи использует важную идею, сходную с проективной двойственностью (см., например, [S]). Этот метод позволяет удобно работать с *множеством больших окружностей* на сфере. А именно, пусть сфера имеет центр в точке O . Любой точке A на сфере сопоставим большую окружность, лежащую в плоскости, проходящей через O перпендикулярной OA .

Это задаёт взаимно-однозначное соответствие между парами диаметрально противоположных точек сферы и большими окружностями. Будем называть это соответствие *двойственностью* и обозначать δ . Отметим, что $\delta(\delta(A)) = \pm A$ для любой точки A на сфере и $\delta(\delta(\omega)) = \omega$ для любой большой окружности ω . Кроме того, если точка A лежит на большой окружности ω , то большая окружность $\delta(A)$ содержит пару точек $\delta(\omega)$.

(а) Пусть имеется дуга α большой окружности. Предположим, α имеет длину πt для $t \in (0; 1)$. Возьмём большие окружности $\delta(A)$ для всех $A \in \alpha$. Заметим, что объединение $\delta(A)$ занимает долю t от площади сферы.

Ломаная γ из условия имеет длину $< \pi$. Поэтому большие окружности, двойственные к точкам γ , не покрывают всей сферы. Возьмём непокрытую точку B . Тогда большая окружность $\delta(B)$ не пересекает γ .

(б) Доказательство аналогично. Для каждого ребра γ возьмём объединение больших окружностей, двойственных к его точкам. Мы получим пару «сферических долек». Поскольку длина γ больше πk , то объединение всех таких долек покрывает более k раз некоторую часть сферы, имеющую ненулевую площадь.

В частности, существует бесконечно много точек сферы, покрытых более чем k дольками. Отметим точки B_1, \dots, B_m , двойственные к продолжениям рёбер γ . Мы можем выбрать точку C , покрытую более чем k дольками и не совпадающую с B_1, \dots, B_m . Тогда большая окружность $\delta(C)$ пересекает более чем k рёбер γ и не содержит ни одного из них. \square

Указание к решению задачи 8. Впишем каждый тетраэдр в сферу. Применим к ним параллельный перенос и гомотегию, чтобы сферы совпали.

Далее рассмотрите прямые l , проходящие через центр сферы, такие что проекции тетраэдров на плоскость, перпендикулярную l , являются треугольниками. \square

Решение задачи 9. Возьмём круг D , содержащий все гвозди. Если любая прямая из некоторого класса эквивалентности пересекает D , назовём этот класс эквивалентности *ограниченным*. Ясно, что есть ровно один класс, не являющийся ограниченным.

Проведём между гвоздями всевозможные отрезки, так что никакой отрезок не содержит гвоздей кроме концов. Можно отождествить *множество отрезков* с *множеством ограниченных классов эквивалентности прямых*. Для этого нужно поворачивать каждую прямую против часовой стрелки, пока она не упрётся в два гвоздя — эта пара гвоздей и будет концами отрезка, соответствующего классу эквивалентности данной прямой.

(а) Ответ: k .

Действительно, мы всегда сможем провести $k - 1$ отрезок. Такое число отрезков реализуется, если все гвозди расположены на одной прямой.

(b) Ответ: $C_k^2 + 1$.

Число отрезков не больше числа рёбер в полном графе. Эта оценка достигается, если никакие три гвоздя не лежат на одной прямой. □

Идея другого решения задачи 9. Конфигурационное пространство X всех прямых в \mathbb{R}^2 при помощи проективной двойственности отождествляется с \mathbb{RP}^2 без одной точки. Выкинутая точка соответствует «бесконечно удалённой прямой». См., например, [S].

Множеству прямых, проходящих через точку $A \in \mathbb{R}^2$, при этом соответствует прямая в \mathbb{RP}^2 . Таким образом задача сводится к тому, на сколько частей можно разрезать \mathbb{RP}^2 с помощью k прямых (выкинутая точка на количество частей не влияет). □

Решение задачи 10. Пусть S — точка старта. Для каждой точки трассы A обозначим суммарную длину сухих участков от S до A через x , а суммарную длину заболоченных участков пути от S до A через y . Сопоставим точке A точку (x, y) на плоскости.

Нарисуем график движения каждой машины в пространстве с координатами x, y, t . Каждый график является ломаной. Заметим, что каждая такая ломаная лежит в некоторой плоскости $t = t_0 + \frac{x}{u} + \frac{y}{v}$; здесь t_0 — время прохождения точки S , u и v — скорость машины на сухих и заболоченных участках соответственно. Обозначим эти плоскости $\alpha_1, \dots, \alpha_8$.

Нарисуем для судей вертикальные прямые l_1, \dots, l_{500} . Нам нужно показать, что точки пересечения некоторых двух прямых с плоскостями идут на этих прямых в одинаковом порядке.

Рассмотрим попарные пересечения плоскостей $\alpha_i \cap \alpha_j$ и спроектируем на горизонтальную плоскость β . Мы получим не более чем $C_8^2 = 28$ различных прямых. Они разбивают β не более чем на $1 + C_{29}^2 = 407$ частей. По принципу Дирихле, какие-то две из прямых l_1, \dots, l_{500} проходят через одну и ту же часть. □

Дискретные фазовые пространства

Решение задачи 11. Ответ: 12 ходов.

Отождествим каждое двузначное число с клеточкой в таблице 9×10 (строки — десятки, столбцы — единицы). Если Вася называет число, оно покрывает квадрат 3×3 в этой таблице. Но чтобы покрыть такими квадратами заштрихованные строки (все числа, начинающиеся на 2, на 5 и на 8), необходимо разместить 12 таких квадратов, то есть назвать минимум 12 чисел.

Пример легко построить, глядя на таблицу: пусть Вася назовёт числа 21, 24, 27, 29, 51, 54, 57, 59, 81, 84, 87 и 89. □

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

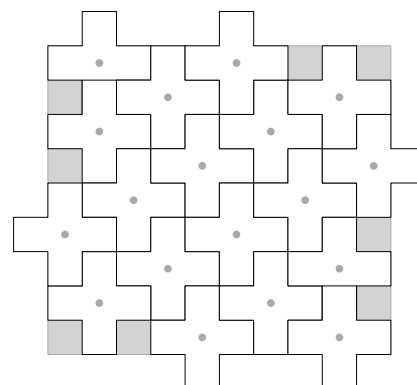
Решение задачи 12. Идея решения та же, только теперь нам нужно покрыть клетки прямоугольника 9×10 «крестами», состоящими из пяти клеток.

(a) Ответ: Нет.

Действительно, если бы 18 крестов хватило, то они покрывали бы прямоугольник без наложений и не выходя за границы. Но это невозможно, например угловую клетку так покрыть не получится.

(c) Ответ: Да.

Разместим 18 крестов как на рисунке (для большей понятности отмечен центр каждого креста), а восемь непокрытых клеток покроем оставшимися 4 крестами. □



Решение задачи 13. (а) Текущее состояние описанной в задаче системы определяется количеством шариков в каждой коробочке и указанием коробочки, с которой нужно начинать раскладывать шарики в следующий раз. Поэтому возможных состояний системы конечное число.

Из каждого состояния можно, раскладывая шарики, перейти в другое состояние системы, которое определено однозначно. Наоборот, зная состояние системы в настоящий момент, можно однозначно определить состояние системы перед последним раскладыванием шариков. Действительно, последнее раскладывание должно было закончиться на выделенной коробочке; поэтому, чтобы восстановить предыдущее состояние, нужно взять один шарик из выделенной коробочки и далее, идя против часовой стрелки, брать по шарiku из каждой коробочки, пока это возможно. Когда же мы встретим пустую коробочку, мы положим в неё все собранные шарики и объявим её отмеченной.

Построим *ориентированный граф состояний* системы. Для этого обозначим состояния системы точками, а возможность перехода из одного состояния в другое — стрелкой, соединяющей соответствующие точки. Из каждой точки будет выходить ровно одна стрелка и в каждую точку будет входить ровно одна стрелка.

Начнём двигаться по стрелкам, начиная с заданного состояния A_1 . Получаем последовательность состояний A_2, A_3, \dots . Поскольку число состояний конечно, в некоторый момент в последовательности $\{A_i\}$ возникнет повторение. Пусть, например, $A_k = A_l$, где $k < l$. Поскольку в точку A_k входит ровно одна стрелка, из равенства $A_k = A_l$ следует $A_{k-1} = A_{l-1}, \dots, A_1 = A_{l-k+1}$. Тем самым, через $l - k$ ходов мы вернулись в состояние A_1 .

(б) В отличие от пункта (а) теперь состояние системы определяется лишь тем, как разложены шарики по коробочкам. Заметим, что если ход ведёт из состояния A в состояние B , то, согласно (а), мы можем (за несколько ходов) вернуться из B в A . Если мы можем попасть из состояния A в состояние C за несколько ходов, то мы можем вернуться из C в A , «откатывая» ходы по одному.

Таким образом, если мы научимся попадать из любого состояния в некоторое фиксированное состояние M , то сможем «путешествовать» между любыми состояниями, «проезжая» через M . Обозначим через M состояние, когда все шарики собраны в фиксированной коробочке m . Будем при каждой операции брать шарики из ближайшей (против часовой стрелки) к m непустой коробочки. Тогда либо число шариков в m увеличится, либо ближайшая к m непустая коробочка станет ещё ближе. Рано или поздно все шарики соберутся в m . \square

Указание к решению задачи 14. Фазовое пространство в этой задаче — множество всевозможных пар (x, v) , где x — начальное положение корабля, а v — вектор, на который корабль сдвигается за один ход. Легко показать, что фазовое пространство счётно, а этого достаточно для построения алгоритма стрельбы. \square

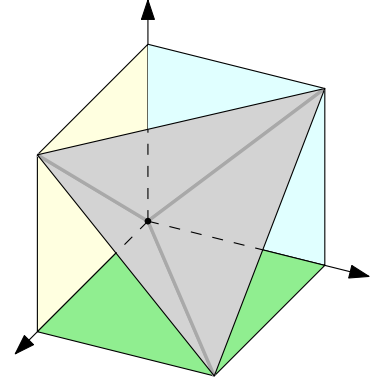
Избранные задачи

Указание к решению задачи 15. Постройте конфигурационное пространство воды в сосудах, как в задаче 0, и рассмотрите изменение состояния при переливаниях. Подробное обсуждение см. в [CG, Гл. 4, §6]. \square

Решение задачи 16. Ответ: нет, невозможно.

Конфигурационное пространство количества воды в трёх бассейнах — подмножество $X \subset \mathbb{R}^3$, состоящее из точек с неотрицательными координатами. Точка, соответствующая текущему положению системы, движется по отрезку I , соединяющему начальное и конечное положение.

Пересечение плоскостей $x + y = z$, $y + z = x$ и $z + x = y$ с X является границей бесконечного треугольного конуса. Поскольку конус выпуклый, отрезок I пересекает его границу не более чем в двух точках. Но по условию отрезок I содержит хотя бы по одной точке каждой грани. Следовательно, I проходит хотя бы через одно ребро конуса. Наконец, заметим, что рёбра конуса лежат на плоскостях $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$. \square



Решение задачи 17. Конфигурационное пространство количества зайцев и волков — первый квадрант плоскости \mathbb{R}^2 . Обозначим его X . Положение системы меняется со временем, точка с положительными координатами (x, y) движется с вектором скорости $(a_0 - a_1y, -b_0 + b_1x)$.

Заметим, что в точке $(\frac{b_0}{b_1}, \frac{a_0}{a_1})$ вектор скорости нулевой. Сдвинем начало координат в эту точку. Тогда сопоставление каждой точке её вектора скорости будет линейным отображением $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Заметим, что это линейное отображение переводит ось x в ось $-y$, а ось y — в ось x . Растянув оси в нужное количество раз, можно сделать его композицией поворота на 90° и гомотетии.

А именно, сделаем линейную замену переменных, положив

$$\tilde{x} = \frac{-b_0 + b_1x}{\sqrt{b_1}} \quad \text{и} \quad \tilde{y} = \frac{-a_0 + a_1y}{\sqrt{a_1}}.$$

В этих координатах вектор скорости точки (\tilde{x}, \tilde{y}) , не лежащей на границе X , записывается как $\sqrt{a_1 b_1} \cdot (-\tilde{y}, \tilde{x})$. Это значит, что все такие точки движутся по окружностям с центром в начале координат.

Таким образом, движение всех точек, чьи окружности не пересекают границу X , периодически. Если точка попадает на границу X , то дальше она движется по ней с постоянной скоростью. То есть, не периодически движение точек, для которых

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq \min\left(\frac{b_0^2}{b_1}, \frac{a_0^2}{a_1}\right),$$

то есть расстояние до начала координат (в новых координатах) не больше расстояния до хотя бы одной из прямых $x = 0$ и $y = 0$. \square

Решение задачи 18. (а) Будем следить лишь за *скоростями* шариков. В пространстве с координатами v_1, v_2 закон сохранения энергии $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = \text{const}$ задаёт эллипс. Для удобства можно умножить координаты на положительные числа так, чтобы этот эллипс стал окружностью.

А именно, положим $x = \sqrt{m_1} \cdot v_1$ и $y = \sqrt{m_2} \cdot v_2$. (Первый шарик — дальний от стенки, скорость считается положительной, если она направлена к стенке.) Из закона сохранения энергии, точки, соответствующие положениям системы, лежат на окружности $x^2 + y^2 = \text{const}$. Эта окружность будет нашим фазовым пространством, обозначим её X .

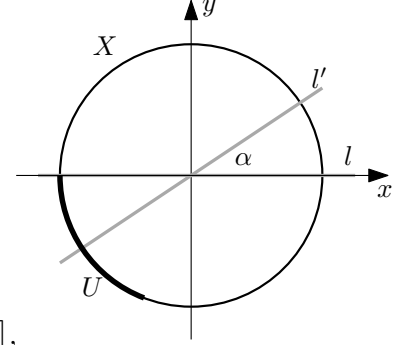
При соударении между шариком и стенкой в фазовом пространстве происходит преобразование $(x, y) \mapsto (x, -y)$, т.е. отражение относительно прямой l , заданной как $y = 0$. Отметим, что соударение может произойти только если $v_2 > 0$, т.е. $y > 0$.

При каждом соударении между шариками в фазовом пространстве происходит отражение относительно прямой, проходящей через начало координат и точку $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$. Это следует из закона сохранения импульса. Назовём эту прямую l' , она задаётся как $\frac{x}{\sqrt{m_1}} = \frac{y}{\sqrt{m_2}}$. Отметим, что соударение может произойти только если $v_1 > v_2$, т.е. $\frac{x}{\sqrt{m_1}} > \frac{y}{\sqrt{m_2}}$.

Обозначим угол между l и l' через α . Нам известно, что $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}$. Очевидно, композиция двух описанных преобразований X является поворотом на угол -2α .

Отметим на окружности дугу $[\pi; \pi + 2\alpha]$, обозначим её U . Рано или поздно любая точка попадёт в область U . В таком положении системы не произойдёт ни одного соударения со стенкой.

(b) Пусть (x_0, y_0) — начальное положение системы. Из условия, $y_0 < 0$. Определим β как угол вектора (x_0, y_0) . Формально, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} - \pi$. Тогда число соударений между шариками равно $\lceil \frac{\pi + \beta - \alpha}{2\alpha} \rceil$, а число соударений между вторым шариком и стенкой равно $\lceil \frac{\pi + \beta - 2\alpha}{2\alpha} \rceil$.



К этой задаче мы можем посоветовать дополнительные материалы на YouTube: обзорное видео [1], где говорится о связи этой задачи со знаками в десятичной записи числа π , видео [2] с решением в пространстве скоростей, а также видео [3] с решением через бильярды в пространстве координат. \square

Задачи после промежуточного финиша

Задачи здесь разделены на два независимых сюжета. В разделе 2 мы изучаем различные топологические свойства фазовых пространств, возникающих в задачах с довольно простыми формулировками. В разделе 3 мы сталкиваемся с геометрией фазовых пространств, а именно — с преобразованиями, сохраняющими объём. *По причине обширности этих сюжетов участникам предлагается сосредоточить свои усилия лишь на одном из них.*

Основными результатами §2 являются задачи 20^m и 22^m , основными результатами §3 — задачи 42^m и 51^m . Задачи, отмеченные звёздочками, требуют некоторой техники (такой как непрерывные отображения); если вы не знаете соответствующих формальных определений, то решать эти задачи не нужно.

Иногда в качестве подсказок к сложным задачам мы формулируем леммы. Эти леммы говорят многое о природе рассматриваемых объектов, и поэтому могут быть интересны сами по себе. Доказательства этих лемм, в свою очередь, разбиваются на задачи, которые размещаются после их формулировки.

Также для справки мы приводим формулировки некоторых теорем; их доказательства сдавать не нужно.

2 Топология фазовых пространств

2.1 Задача про возы

Задача 19. В 9:00 турист вышел из дома, он шёл весь день и к 21:00 пришёл на место стоянки. Переночевав, на следующий день турист с 9:00 до 21:00 шёл обратно по той же дороге. Он идёт с непостоянной скоростью, может иногда останавливаться или даже возвращаться назад. Докажите, что в некотором месте дороги турист в разные дни находился в одно и то же время.

Задача 20^m (Н. Н. Константинов). Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, связанные веревкой длины 10 метров, смогли проехать из A в B по разным дорогам, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза с сеном, имеющие радиус 6 метров и движущиеся по разным дорогам навстречу друг другу?

Ниже мы наметим путь *формального* решения задачи 20^m для *кусочно-линейного* движения машин и возов. Это значит, что временной отрезок должен быть разбит на конечное число частей, скорости машин и возов на каждой из которых постоянны. Тогда для решения задачи 20^m можно доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. В квадрате $ABCD$ нарисованы две ломаные α и β . Ломаная α соединяет вершины A и C , а ломаная β — вершины B и D . Тогда $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

Ломаные могут самопересекаться, если не оговорено противное.

Почему мы не рассматриваем *непрерывные кривые* вместо ломаных? Разницу в обращении с ними иллюстрирует следующая задача (ответы в пунктах (а) и (b) разные).

Задача 21. Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы, не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъём по разным тропам, соблюдая условие: в каждый момент времени быть на одинаковой высоте. Смогут ли альпинисты достичь вершины, двигаясь непрерывно, если (а) тропы являются ломаными; (b*) тропы могут быть произвольными графиками непрерывных функций?

(c) Решите аналог пункта (а) для произвольного числа альпинистов.

Лемма 1 кажется очевидной, но строго доказать её оказывается не так просто. Указания к доказательству см. в §2.3.1.

2.2 Прямоугольник, вписанный в кривую

Задача 22^m. Дана замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости. Докажите, что существует прямоугольник, вершины которого лежат на этой кривой.

Возьмём на плоскости точки $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ и $D = (0, 1)$. Можно определить ленту Мёбиуса как квадрат $ABCD$ (с внутренностью), в котором стороны AD и CB отождествлены посредством отображения $(0, t) \mapsto (1, 1-t)$. Будем обозначать ленту Мёбиуса M .

Для доказательства задачи 22^m будут полезны следующие два утверждения.

Задача 23. Отождествите с M конфигурационное пространство пар точек на окружности.

Лемма 2. Не существует непрерывного вложения $M \rightarrow \mathbb{R}^3$, такого что граница M лежит в плоскости $z = 0$, а все остальные точки — в полупространстве $z > 0$.

(Под “вложением” здесь понимается отображение, при котором разные точки M переходят в разные точки \mathbb{R}^3 .)

Вообще говоря, Лемма 2 использует понятие непрерывности, аккуратное обращение с которым выходит далеко за рамки проекта. Тем не менее, мы можем строго доказать кусочно-линейную версию Леммы 2. Пояснения и указания к доказательству см. в §2.3.2.

2.3 Топологические леммы

2.3.1 Замкнутые кривые на плоскости

Основной целью этого раздела является доказательство Леммы 1.

Определение. Набор точек плоскости называется *набором общего положения*, если

- (1) никакие три из них не лежат на одной прямой и
- (2) никакие 6 из них нельзя покрыть тройкой прямых, проходящих через одну точку (не обязательно принадлежащую набору).

Задача 24. Верно ли, что если набор точек плоскости содержит хотя бы 6 точек, то условие (1) из определения выше следует из условия (2)?

Задача 25. Покажите, что любой конечный набор точек плоскости можно сделать набором общего положения посредством сколь угодно малого шевеления (то есть, сдвинув каждую точку не более чем на заранее указанное расстояние).

Задача 26. Дан квадрат $ABCD$ и ломаные $\alpha = A_0A_1 \dots A_m$ и $\beta = B_0B_1 \dots B_n$, где $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_m = C$, $B_n = D$ и остальные вершины лежат внутри квадрата. Предположим, множество всех вершин ломаных находится в общем положении. Тогда число точек пересечения α и β нечётно. (Указание: используйте индукцию по m и n .)

Задача 27. Верно ли утверждение задачи 26, если для множество вершин α и β **(a)** условие (1) из определения набора общего положения не выполняется, или **(b)** условие (1) выполняется, а условие (2) не выполняется?

Задача 28. **(a)** Докажите Лемму 1. **(b*)** Докажите аналог Леммы 1 для непрерывных кривых.

Аналогичным образом, из задачи 26 можно вывести следующее утверждение.

Теорема Жордана. Будем говорить, что подмножество плоскости A *связно*, если между любыми двумя его точками существует ломаная, целиком лежащая внутри A . Тогда **(a)** любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная разбивает плоскость на части (т. е. дополнение плоскости до этой ломаной не является связным); **(b)** более того, этих частей ровно две.

2.3.2 Зацепленность замкнутых кривых в пространстве

Основной целью этого раздела является доказательство Леммы 2.

Определение. Набор точек пространства называется *набором общего положения*, если

- (1) никакие три точки не лежат на одной прямой,
- (2) никакие четыре точки не лежат в одной плоскости и
- (3) никакие 8 из них нельзя покрыть парой плоскостей и прямой, проходящими через одну точку (не обязательно принадлежащую набору).

Говорят, что ломаные в пространстве *находятся в общем положении*, если множество их вершин — набор точек общего положения.

Задача 29. Покажите, что любой конечный набор точек в пространстве можно сделать набором общего положения посредством сколь угодно малого шевеления.

Задача 30. Покажите, что если объединение множества вершин замкнутой ломаной в пространстве и вершин произвольного тетраэдра является набором общего положения, то количество точек пересечения ломаной с поверхностью тетраэдра чётно.

Определение. Пусть $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}^3$ — две замкнутые ломаные в общем положении. Возьмём точку $O \in \mathbb{R}^3$ в общем положении с их вершинами. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n = A_0$ — вершины α . Для $i = 0, \dots, n-1$ посчитаем остаток по модулю 2 для числа точек пересечения треугольника OA_iA_{i+1} и ломаной β . Сумма n полученных остатков называется *коэффициентом зацепления α и β по модулю 2*. Обозначение: $\text{lk}(\alpha, \beta)$.

Задача 31. (а) Покажите, что $\text{lk}(\alpha, \beta)$ не зависит от выбора точки O . (Указание: возьмите точку O' и рассмотрите пересечение тетраэдров $OO'A_iA_{i+1}$ и ломаной β .)

(б) Покажите, что $\text{lk}(\alpha, \beta) \equiv \text{lk}(\beta, \alpha)$. (Символом \equiv мы обозначаем сравнимость по модулю 2.)

Задача 32. Пусть $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}^3$ — пара непересекающихся и несамопересекающихся замкнутых ломаных.

(а) Докажите, что существует $\varepsilon > 0$, такое что при любом сдвиге каждой вершины α и β меньше чем на ε ломаные останутся непересекающимися и несамопересекающимися.

(б) Пошевелив вершины α, β меньше чем на ε , можно получить пару ломаных общего положения α', β' . Докажите, что, $\text{lk}(\alpha', \beta')$ корректно определён, т. е. не зависит от этого сдвига.

Задача 32 позволяет определить коэффициент зацепления по модулю 2 для произвольной пары непересекающихся и несамопересекающихся замкнутых ломаных $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что α и β *зацеплены по модулю 2*, если $\text{lk}(\alpha, \beta) \equiv 1$.

Для простого доказательства Леммы 2 удобно использовать следующее свойство графа K_6 (полного графа на 6 вершинах). Отображение $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ будем называть *кусочно-линейным*, если образы всех рёбер являются ломаными.

Лемма 3. Для любого кусочно-линейного вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ найдётся пара непересекающихся циклов, зацепленных по модулю 2.

Задача 33. Для кусочно-линейного вложения $\gamma : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ обозначим $\text{slk}(\gamma)$ сумму коэффициентов зацепления по модулю 2 для всех пар непересекающихся циклов. Постройте какое-нибудь вложение $\gamma_0 : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и убедитесь, что $\text{slk}(\gamma_0) \equiv 1$.

Задача 34. Пусть кусочно-линейные вложения $\gamma_1, \gamma_2 : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ совпадают на всех рёбрах, кроме одного. Докажите, что $\text{slk}(\gamma_1) \equiv \text{slk}(\gamma_2)$.

Задача 35. Выведите Лемму 3.

2.3.3 Вложения ленты Мёбиуса в пространство

Триангуляцией ленты Мёбиуса M называется граф $\Gamma \subset M$, все грани которого — треугольники. Отметим, что при этом граница M целиком состоит из рёбер. Отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *кусочно-линейным*, если для некоторой триангуляции M отображение f переводит её грани в треугольники в \mathbb{R}^3 .

Задача 36. (а) Вложите K_6 в M так, чтобы одним из циклов была граница M , а другим циклом была средняя линия M . Назовём эти циклы α и β .

(б) Покажите, что если задано вложение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, то никакие циклы в $f(K_6)$, кроме $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, не будут зацеплены.

Задача 37. Пусть задано кусочно-линейное вложение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Обозначим α границу M , а β — среднюю линию M . Докажите, что $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ — зацепленные ломаные в \mathbb{R}^3 .

Задача 38. Выведите из задачи 37 Лемму 2 для кусочно-линейного вложения $M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Задача 39*. Докажите Лемму 2 для непрерывного вложения $M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

3 Зеркала и бильярды

3.1 Невидимая система зеркал

В этом разделе мы рассматриваем *системы зеркал* — наборы кривых на плоскости. Для лучей выполняется закон “угол падения равен углу отражения”; зеркала могут быть искривлёнными, тогда этот закон применяется к касательной к зеркалу в точке падения луча. Лучами, попадающими в края зеркал, можно пренебречь. Система зеркал должна быть ограниченной. Все зеркала не могут быть параллельными отрезками.

Задача 40. Постройте систему зеркал, (а) невидимую в каком-нибудь направлении; (б) невидимую в каких-нибудь двух направлениях.

Невидимость в направлении прямой l означает, что каждый луч, параллельный l и начинающийся достаточно далеко, несколько отражений спустя продолжает идти по той же прямой, как если бы он ни от чего не отражался.

Задача 41. (а) Предположим, все зеркала системы являются отрезками и расположены под углами 0° и 90° . Докажите, что такая система зеркал не может быть невидимой с направлений 45° и 135° . Углы измеряются по отношению к оси x .

(б) Предположим, все зеркала системы являются отрезками и расположены только под углами $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}$ для некоторого натурального n . Назовём такие направления *допустимыми*.

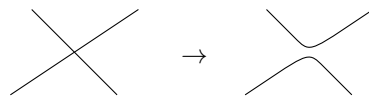
Пусть задано конечное множество прямых l_1, \dots, l_k , такое что при отражении любой прямой l_i относительно прямой, идущей в допустимом направлении, полученная прямая будет параллельна некоторой l_j . Докажите, что такая система зеркал не может быть невидимой с направлений l_1, \dots, l_k .

Задача 42^m. Докажите, что не существует системы зеркал, невидимой во всех направлениях.

Для решения задачи 42^m можно рассмотреть преобразование фазового пространства, сохраняющее объём. Такие преобразования рассматриваются далее на более простых примерах в задачах 46 и 50. Другой приём, который понадобится в решении задачи 42^m, проиллюстрирован на следующем дискретном примере.

Задача 43. Некоторый остров имеет форму круга D . На границе D находятся $2n$ транспортных узлов, принадлежащих n компаниям. Каждой компании принадлежит 2 узла, их соединяет прямая железная дорога, по которой поезда ездят из конца в конец. На пересечении железных дорог установлены мосты, так что любой поезд движется по прямой и не может сворачивать.

Министр путей сообщения захотел уменьшить число мостов, заменив их на повороты, как на рисунке.



При этом требуется, чтобы каждый поезд продолжал ездить между транспортными узлами одной и той же компании. Докажите, что министру не удастся это сделать.

3.2 Внешние бильярды

Пусть T — выпуклая ограниченная фигура на плоскости \mathbb{R}^2 . Возьмём точку x_0 вне T . Из x_0 существует две опорные (касательные) прямые к T . Выберем правую из этих прямых, если смотреть из x_0 , обозначим её l . Если l пересекает T в одной точке y_1 , обозначим через x_1 образ точки x_0 при отражении относительно y_1 .

Аналогичным образом, по точке x_1 строится (при условии, что правая опорная прямая из x_1 пересекает T в единственной точке) следующая точка x_2 , и т. д. Отображение R , переводящее точку на плоскости в её образ, называется *отображением внешнего бильярда*, а последовательность x_0, x_1, x_2, \dots называется *орбитой точки x_0* .

Если на каком-то шаге очередная опорная прямая пересекает границу T не в одной точке, а по отрезку, будем считать, что орбита x_0 не определена.

Задача 44. Пусть T — квадрат на плоскости. **(а)** Нарисуйте множество точек, для которых определены орбиты. **(б)** Докажите, что все орбиты для этого бильярда конечны. **(с)** Как по точке \mathbb{R}^2 определить длину её орбиты?

Задача 45. Решите ту же задачу, если T — произвольный треугольник на плоскости.

Задача 46. Докажите, что отображение R сохраняет площадь (т. е. для любой фигуры A , не пересекающей T , площади A и $R(A)$ равны), **(а)** если T — выпуклый многоугольник; **(б)** если T — произвольная строго выпуклая ограниченная фигура.

Назовём орбиту x_0, x_1, x_2, \dots *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное n , такое что расстояние между x_0 и x_n меньше ε .

Задача 47*. Верно ли, что любая орбита внешнего бильярда T почти периодична, если

- (а)** T — выпуклый многоугольник с рациональными вершинами;
- (б)** T — произвольный выпуклый многоугольник;
- (с)** T — строго выпуклая ограниченная фигура;
- (д)** T — произвольная выпуклая ограниченная фигура?

Простое решение этой задачи нам не известно. Однако ответ на аналогичный вопрос для внутренних бильярдов куда более прост, как мы увидим в следующем разделе.

3.3 Внутренние бильярды

Пусть T — выпуклая ограниченная фигура на плоскости. Возьмём точку x внутри T и зададим отложенный от x единичный вектор скорости. Это определяет движение точки x в зависимости от времени: внутри T точка x движется по прямой, а на границе происходит отражение по закону “угол падения равен углу отражения” (углы меряются с касательной к границе T в точке соударения).

Если в какой-то момент x попадает в точку на границе T , в которой не существует касательной, будем считать, что орбита x не определена. Орбита точки x называется *периодической*, если через некоторое время x оказывается на изначальном месте и имеет изначальную скорость.

Задача 48. Пусть T — квадрат. (а) Для каких начальных точек и векторов скорости орбиты будут периодическими? (б) Покажите, что любая периодическая орбита в T имеет чётное число отражений относительно границы.

Далее T можно считать либо выпуклым многоугольником, либо произвольной выпуклой ограниченной фигурой с гладкой границей.

Задача 49. Зададим для всех точек равные вектора скорости. Обозначим положение точки x спустя время t через $f_t(x)$. Покажите, что для фигуры $A \subset T$ образ $f_t(A)$ не обязательно имеет такую же площадь. (Образ берётся только для тех точек, орбиты в которых определены.)

Задача 50. Для точки x , вектора v и числа t посмотрим на положение x и направление её вектора скорости спустя время t . Это задаёт отображение $F_t : T \times [0; 2\pi) \rightarrow T \times [0; 2\pi)$.

(а) Докажите, что если T — многоугольник, то множество точек, где F_t не определено, имеет в $T \times [0; 2\pi)$ нулевой объём.

(б) Докажите, что для любого t отображение F_t сохраняет объём.

Орбита точки x с заданным вектором скорости называется *почти периодической*, если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдётся $t > 0$, такое что расстояние между x и $f_t(x)$ меньше ε_1 , а угол между векторами скорости x и $f_t(x)$ меньше ε_2 .

Задача 51^m. Докажите, что почти любые начальные условия $(x, \varphi) \in T \times [0; 2\pi)$ задают почти периодическую траекторию. Здесь “почти любые” означает “все, кроме некоторого множества в $T \times [0; 2\pi)$, имеющего нулевой объём”.

Неформально можно сформулировать задачу так: докажите, что, посветив из случайного места в зеркальной комнате фонариком в случайном направлении, мы с вероятностью 1 попадём себе в затылок с любой наперёд заданной точностью.

Свойство преобразований, сохраняющих объём, которое предлагается доказать в задаче 51^m, можно сформулировать в общем случае следующим образом:

Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $f : U \rightarrow U$ — отображение, сохраняющее объём. Возьмём меньшую область $A \subset U$. Для точки $x \in A$ построим последовательность $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$. Определим $Z \subset A$ как множество точек, для которых эта последовательность целиком лежит вне A . Тогда Z имеет нулевой объём.

Чтобы эта теорема имела строгий смысл, необходимо сделать оговорки о том, какие “области” мы рассматриваем, а также уточнить, для каких подмножеств множества U отображение f “сохраняет объём”. (Известные парадоксы [Ya, стр. 12, 18] показывают, что *нельзя* корректно определить объём для всех подмножеств. Необходимую теорию см., напр., в [АМК] или [Ох].)

Указания и решения к задачам после пром. финиша

Мы изложим решения задач после промежуточного финиша в таком порядке, в котором они ведут к главным задачам.

Топология. Задача про возы

Замкнутые кривые на плоскости

Решение задачи 24. Нет, условие (1) не следует из условия (2).

Возьмём две параллельные прямые l, m . Мы выберем три точки на каждой из них: $A_1, A_2, A_3 \in l$ и $B_1, B_2, B_3 \in m$. Если никакая тройка прямых A_1B_i, A_2B_j, A_3B_k (где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) не пересекается в одной точке, то условие (2) будет выполнено, в то время как условие (1) не выполнено по построению.

Докажем, что такие шесть точек существуют. Выберем точки $A_1, A_2, A_3 \in l$ и $B_1, B_2 \in m$ произвольно. Тогда для точки B_3 существует лишь конечное число — не более трёх — запрещённых положений. (Например, если обозначить пересечение $A_1B_1 \cap A_2B_2$ через C , то B_3 не может лежать на пересечении A_3C и m .) \square

Решение задачи 25. Пусть даны произвольные точки $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^2$. Сколь угодно малым сдвигом можно добиться того, чтобы они не совпадали. Поэтому будем считать точки различными. Далее мы будем двигать их по одной, приводя каждую в общее положение со всеми предыдущими.

Пусть точки A_1, \dots, A_{k-1} уже в общем положении. Посмотрим на множество положений, запрещённых для A_k . Во-первых, оно включает все прямые A_iA_j для всевозможных пар индексов $i, j < k$. Во-вторых, оно включает все прямые A_jC , где C — точка пересечения $A_{i_1}A_{i_2} \cap A_{i_3}A_{i_4}$, для всевозможных пятёрок индексов $i_1, i_2, i_3, i_4, j < k$.

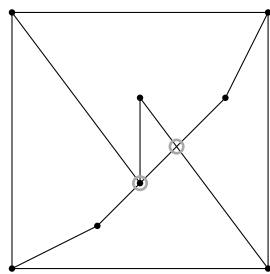
Мы видим, что запрещённые положения для A_k образуют конечное объединение прямых. Поэтому можно сдвинуть A_k сколь угодно мало, так что она не будет лежать в этом множестве. \square

Решение задачи 26. База индукции очевидна: если $m = n = 1$, то утверждение заключается в том, что диагонали квадрата пересекаются в нечётном числе точек.

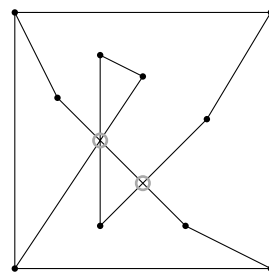
Докажем шаг индукции. Пусть $m > 1$. Заменим звенья $A_{m-2}A_{m-1}$ и $A_{m-1}A_m$ ломаной α на одно звено $A_{m-2}A_m$. Чтобы показать, что чётность числа точек пересечения α и β не изменилась, докажем, что β пересекает границу треугольника $A_{m-2}A_{m-1}A_m$ в чётном числе точек.

Действительно, если вершины B_k, B_{k+1} лежат по разные стороны от границы $A_{m-2}A_{m-1}A_m$ (т. е. одна внутри треугольника, а другая снаружи), то пересечение отрезка B_kB_{k+1} с границей $A_{m-2}A_{m-1}A_m$ состоит из нечётного числа точек, а если по одну — то из чётного. Поскольку A_0 и A_n лежат по одну сторону (обе снаружи), всего точек пересечения будет чётное число. \square

Решение задачи 27. Ответ: (a) нет; (b) нет. Примеры показаны на рисунках.



(a)



(b)

Комментарий. В нашем примере к пункту (а) для множества вершин ломаных не выполняется также и условие (2). Примера для пункта (а), в котором условие (2) выполняется, не существует.

Если требовать, чтобы ломаные не самопересекались, то для пункта (б) можно доказать, что число точек пересечения всегда нечётно. Для этого можно при приведении вершин ломаных в общее положение проследить за точками пересечения, как в доказательстве Леммы 1. \square

Решение задачи 28. (а) Предположим, $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Возьмём число $\varepsilon > 0$, такое что расстояние между любой точкой на α и любой точкой на β меньше ε . Тогда, если мы сдвинем вершины α и β не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, точек пересечения у них не появится, поскольку любая точка на ребре также сдвинется не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Согласно же задаче 25, мы можем привести α и β в общее положение, сдвинув каждую вершину не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Это завершает доказательство.

Отметим, что ε может быть меньше, чем минимум расстояний между вершинами α и β . Число ε можно вычислить так: возьмём вершину одной ломаной и ребро другой, померим расстояние между ними; сделаем это для всевозможных комбинаций вершины одной ломаной и ребра другой; тогда достаточно взять ε меньше всех найденных чисел.

(б) *Набросок решения.* Любую непрерывную кривую можно аппроксимировать ломаной с точностью до любого $\varepsilon > 0$. Это значит, что мы последовательно отмечаем на кривой точки, так что участок кривой между соседними точками находится от соединяющего их отрезка не дальше, чем на ε . Нужно построить такие аппроксимации для $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ и найти у пары ломаных на каждом шаге произвольную точку пересечения P_i . Для каждой P_i найдутся точки A_i и B_i , лежащие на кривых, причём расстояние между A_i и B_i не превосходит $\frac{1}{2^{i-1}}$. Остаётся, воспользовавшись компактностью, выбрать из A_i и B_i сходящиеся подпоследовательности с одинаковыми индексами. Их пределы будут равны — это и есть искомая общая точка наших кривых. \square

Задача про возы

Решение задачи 19. отождествим дорогу с отрезком $[0; 1]$, а время — с отрезком $[9; 21]$. Зависимости точки, где находится турист, от времени являются непрерывными функциями $[9; 21] \rightarrow [0; 1]$. Обозначим их f и g , соответственно. При этом $f(9) = g(21) = 0$ и $f(21) = g(9) = 1$.

Для разности $h = f - g$ значение в точке 9 отрицательно, а в точке 1 положительно. По теореме о промежуточном значении, существует $t \in [9; 21]$, для которого $h(t) = 0$. Значит местоположение туриста в момент времени t в первый и во второй дни совпадает. \square

Решение задачи 20^m. отождествим каждую дорогу с отрезком $[0; 1]$. Тогда фазовое пространство положений двух транспортных средств на дорогах — квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$.

Кусочно-линейное движение машин задаёт ломаную внутри квадрата, ведущую из вершины $(0, 0)$ в вершину $(1, 1)$. Кусочно-линейное движение возов задаёт ломаную внутри квадрата, ведущую из вершины $(0, 1)$ в вершину $(1, 0)$. По Лемме 1 эти ломаные имеют общую точку. Значит, в какой-то момент положение машин совпадает с положением возов, но это невозможно из условия. \square

Решение задачи 21. (а) Ответ: да.

Будем считать, что никакой участок горы не горизонтален. отождествим каждую тропу с отрезком $[0; 1]$. Тогда множество возможных положений альпинистов (на одной высоте) будет подмножеством M квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, содержащим вершины $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Заметим, что M состоит из отрезков. Введём на нём структуру графа: его вершины — состояния, когда хотя бы один из альпинистов находится в вершине ломаной-склона. Можно показать, что степень каждой вершины, за исключением $(0, 0)$ и $(1, 1)$, чётна. Из этого следует, что существует путь из $(0, 0)$ в $(1, 1)$.

Если же некоторые участки горы горизонтальны, “схлопнем” эти участки и назовём полученные точки на тропах *особыми*. Для новой горы алгоритм подъёма существует по доказанному

выше. Когда хотя бы один из альпинистов проходит через особую точку, пусть они задержатся там на минуту. Это добавит конечное число минут ко времени подъёма. Из такого алгоритма легко получить алгоритм подъёма на исходную гору.

Отдельно отметим, что если никакие две вершины ломаной-склона не лежат на одной высоте, то для альпинистов существует единственный способ движения, при котором они проходят каждое положение не более одного раза.

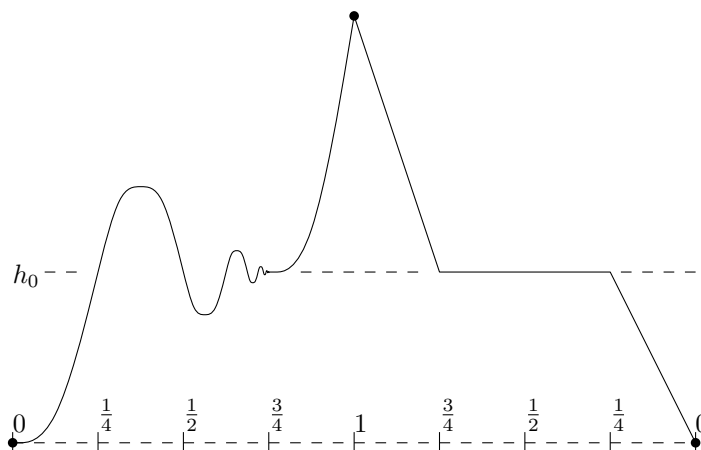
(c) Ответ: да. Докажем утверждение по индукции. Для одного альпиниста утверждение тривиально. Опишем шаг.

Возьмём первых двух альпинистов и алгоритм их подъёма на гору из пункта (a). Их высота зависит от времени кусочно-линейно. Нарисуем график этой зависимости и скажем, что это новый склон горы. Тогда мы можем заменить первых двух альпинистов на одного, ползущего по новому склону. Так k альпинистов заменяются на $k - 1$.

(b) Ответ: нет.

Пример того, как могут быть устроены склоны, показан на рисунке. Один из них в любой окрестности точки $\frac{3}{4}$ имеет монотонно возрастающий участок и монотонно убывающий участок, каждый из которых проходит высоту h_0 .

Чтобы альпинисты влезли на вершину, находясь на одной высоте, второму пришлось бы бесконечное количество раз по очереди побывать в точках $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. С таким условием зависимость положения второго альпиниста от времени не может быть непрерывной. Доказательство последнего утверждения — хорошее упражнение про непрерывные функции.



Мы рекомендуем участникам нарисовать для этой горы множество $M \subset [0; 1] \times [0; 1]$, определённое как в пункте (a), и показать, что внутри него не существует непрерывного пути из точки $(0, 0)$ в точку $(1, 1)$. □

Топология. Прямоугольник, вписанный в кривую

Предлагаемый нами путь к решению задачи 22^m во многом схож с подходом, изложенным в статье [Pr]. В этой статье, однако, приводится другое определение коэффициента зацепления замкнутых кривых в пространстве. Мы рекомендуем участникам ознакомиться с этой статьёй в качестве дополнительного материала.

Зацепленность замкнутых кривых в пространстве

Решение задачи 29. Решение этой задачи аналогично решению задачи 25. Будем двигать точки по одной, приводя в общее положение. Первые три точки сдвинем так, чтобы они не лежали на одной прямой. На k -м шаге при $k \geq 4$ множество, куда запрещено ставить A_k , будет состоять из конечного числа плоскостей. Его можно избежать путём сколь угодно малого сдвига A_k . □

Решение задачи 30. Поскольку множество всех вершин является набором общего положения, никакая из вершин ломаной не лежит на поверхности тетраэдра, а любое звено ломаной может пересекать поверхность тетраэдра лишь во внутренних точках граней.

Обозначим вершины ломаной $A_0, A_1, \dots, A_n = A_0$. Покрасим A_i в красный цвет, если она лежит внутри тетраэдра, и в синий, если снаружи. Тогда звено ломаной $A_i A_{i+1}$ пересекает поверхность тетраэдра в нечётном числе точек если и только если A_i и A_{i+1} покрашены в разные цвета. Таких звеньев чётное число. \square

Решение задачи 31. (а) Обозначим вершины α и β через A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_m соответственно.

Предположим, $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, O, O'\}$ является набором общего положения. Тогда по задаче 30 пересечение поверхности каждого тетраэдра $OO' A_i A_{i+1}$ с ломаной β состоит из чётного числа точек. Суммируя по всем тетраэдрам, получаем требуемое.

Единственная трудность может состоять в том, что $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, O, O'\}$ не будет набором общего положения. Однако, по условию множества $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, O\}$ и $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, O'\}$ являются наборами общего положения. Выберем точку $O'' \in \mathbb{R}^3$, при добавлении которой к любому из них полученное множество останется в общем положении. Остаётся воспользоваться предыдущим рассуждением, перейдя от O к O'' , и затем от O'' к O' .

(б) Указание. Возьмём пару параллельных плоскостей в \mathbb{R}^3 , между которыми заключены α и β . Выберем точку O на одной из этих плоскостей. Будем вычислять $\text{lk}(\alpha, \beta)$ и $\text{lk}(\beta, \alpha)$ с помощью выбранной точки O .

Спроектируем α и β на вторую плоскость из точки O . Обозначим полученные плоские ломаные $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Чтобы показать, что $\text{lk}(\alpha, \beta) \equiv \text{lk}(\beta, \alpha)$, достаточно проверить, что $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ пересекаются в чётном числе точек. Это доказывается аналогично задаче 26. \square

Решение задачи 32. (а) Решение этой задачи аналогично решению задачи 28. Возьмём число $\varepsilon > 0$, такое что расстояние между любой точкой на α и любой точкой на β меньше ε , а также расстояние между любой парой несоседних рёбер α и между любой парой несоседних рёбер β меньше ε . Тогда, если мы сдвинем вершины α и β не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, точек пересечения у них не появится, поскольку любая точка на ребре также сдвинется не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Согласно же задаче 29, мы можем привести α и β в общее положение, сдвинув каждую вершину не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$.

(б) Докажем требуемое утверждение для сдвига одной из вершин.

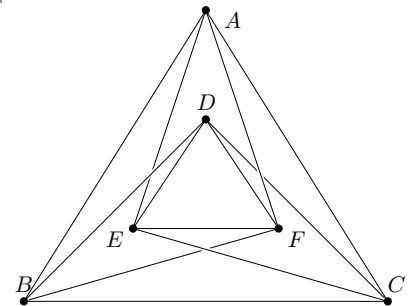
А именно, пусть ломаные α' и β' находятся в общем положении. Сдвинем одну из вершин A'_i ломаной α' так, что в процессе сдвига (по прямой) звенья $A'_{i-1} A'_i$ и $A'_i A'_{i+1}$ не пересекали других звеньев α' и β' . Обозначим полученную вершину A''_i , а полученную ломаную α'' . Далее мы покажем, что $\text{lk}(\alpha', \beta') \equiv \text{lk}(\alpha'', \beta')$.

Возьмём точку O в общем положении со всеми вершинами α' и β' , включая A''_i . Рассмотрим пересечение тетраэдров $OA'_{i-1} A'_i A''_i$ и $OA'_i A''_i A'_{i+1}$ с ломаной β' . По построению, грани $A'_{i-1} A'_i A''_i$ и $A'_i A''_i A'_{i+1}$ не пересекаются с β' . Тогда $\text{lk}(\alpha', \beta') \equiv \text{lk}(\alpha'', \beta')$ из задачи 30. \square

Решение задачи 33. Возьмём вложение $\gamma_0 : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$, изображённое на рисунке.

Для него цикл AEF зацеплен по модулю 2 с циклом DBC , цикл BFD зацеплен по модулю 2 с циклом ECA , а цикл CDE зацеплен по модулю 2 с циклом FAB .

Других пар циклов, зацепленных по модулю 2, для построенного вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ нет. Поэтому $\text{slk}(\gamma_0) \equiv 1$. \square



Решение задачи 34. Пусть вложения $\gamma_1, \gamma_2 : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ различаются только на ребре AB .

Рассмотрим пару циклов ABC и DEF . Обозначим ломаную $\gamma_1(ABC)$ через α , ломаную $\gamma_2(ABC)$ через α' , ломаную $\gamma_1(DEF)$ через β , а объединение $\gamma_1(AB) \cup \gamma_2(AB)$, тоже являющееся замкнутой ломаной, через α'' . Тогда можно показать, что

$$\text{lk}(\alpha, \beta) - \text{lk}(\alpha', \beta) \equiv \text{lk}(\alpha'', \beta).$$

Всего имеется 4 пары циклов в K_6 , таких что один из них содержит ребро AB . Суммируя для них соотношения, аналогичные показанному выше, мы получим

$$\text{slk}(\gamma_1) - \text{slk}(\gamma_2) \equiv \text{lk}(\alpha'', \gamma_1(DEF)) + \text{lk}(\alpha'', \gamma_1(CEF)) + \text{lk}(\alpha'', \gamma_1(CDF)) + \text{lk}(\alpha'', \gamma_1(CDE)).$$

Нам остаётся доказать, что сумма четырёх слагаемых в правой части равенства равна нулю. По сути это утверждение аналогично утверждению задачи 30. Отличие в том, что вместо тетраэдра в \mathbb{R}^3 нам дано кусочно-линейное вложение графа $K_4 = CDEF$, а вместо пересечения α'' с поверхностью мы считаем коэффициенты зацепления.

Выберем точку O в общем положении с вершинами всех этих ломаных. Тогда равенство правой части нулю по модулю 2 следует прямо из определения коэффициента зацепления. \square

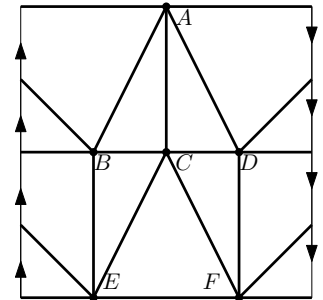
Решение задачи 35. Согласно задаче 34, сумма $\text{slk}(\gamma)$ по модулю 2 не зависит от выбора вложения $\gamma : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда из задачи 33 следует, что для всех вложений $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ имеем $\text{slk} \equiv 1$. Следовательно, для любого наперёд заданного вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ найдётся пара непересекающихся циклов, образы которых зацеплены. \square

Вложения ленты Мёбиуса в пространство

Решение задачи 36. (а) Вложение показано на рисунке.

(б) Если цикл K_6 ограничивает в M многоугольник, то образ такого цикла при f не может быть зацеплен с образом никакого другого цикла.

Перечислим циклы длины 3, не ограничивающие многоугольник: ABD , AEF , BCD , BEF . Из них можно выбрать лишь одну непересекающуюся пару — AEF и BCD . Это как раз есть циклы α и β . Поскольку $\text{slk}(f(K_6)) \equiv 1$, мы получаем $\text{lk}(\alpha, \beta) \equiv 1$. \square



Решение задачи 37. Если вложить K_6 в M как в задаче 36 (а), то f задаст кусочно-линейное вложение $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Воспользуемся для него утверждением задачи 36 (б) и Леммы 3. \square

Решение задачи 38. Пусть такое вложение существует. Как мы показали в задаче 37, образ границы M обязательно зацеплен с образом средней линии M . Но если образ границы лежит в некоторой плоскости, а образ средней линии — в одной из полуплоскостей, то они не могут быть зацеплены. \square

Решение задачи 39*. Можно пытаться свести непрерывную задачу к кусочно-линейной, аналогично тому, как мы это сделали в задаче 28 (б). Сложность такого пути в том, что кусочно-линейные отображения $M \rightarrow \mathbb{R}^3$, которыми мы приближаем заданное непрерывное вложение, тоже должны быть *вложениями*. Данная техническая сложность хотя и преодолевается, но крайне тяжело.

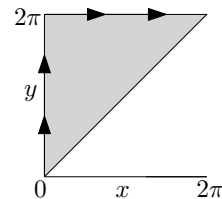
Более простой способ — определить коэффициент зацепления по модулю 2 для пары замкнутых непрерывных кривых в \mathbb{R}^3 . Для этого надо приближать кривые ломаными. Можно показать, что для достаточно близких приближений полученный коэффициент зацепления по модулю 2 не зависит от выбора приближения. Далее для решения задачи нужно показать, что если одна из кривых затягивается диском (непрерывно вложенным в \mathbb{R}^3), не пересекающим вторую кривую, то коэффициент зацепления равен нулю.

О других более концептуальных способах определить коэффициент зацепления для замкнутых непрерывных кривых в \mathbb{R}^3 см. [Н, §1.2] или [FF, 17.6]. \square

Прямоугольник, вписанный в кривую

Решение задачи 23. Каждой неупорядоченной паре точек на окружности сопоставим упорядоченную пару точек $x \leq y$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

При этом пары $(0, a)$ и $(a, 2\pi)$ точек отрезка соответствуют одной паре точек на окружности. Таким образом, конфигурационное пространство пар точек на окружности получается склейкой двух сторон треугольника на рисунке справа. Предлагаем участникам самостоятельно убедиться, что такая склейка даёт ленту Мёбиуса.



Отметим, что граница M соответствует множеству пар совпадающих точек окружности. \square

Решение задачи 22^m. Обозначим окружность S^1 . Пусть задано непрерывное отображение $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. отождествим \mathbb{R}^2 с плоскостью $z = 0$ в \mathbb{R}^3 .

Зададим отображение из конфигурационного пространства пар точек окружности в \mathbb{R}^3 следующим образом. Неупорядоченной паре (a, b) сопоставим точку $(\frac{\gamma(a)+\gamma(b)}{2}, |\gamma(a) - \gamma(b)|)$. Здесь $\frac{\gamma(a)+\gamma(b)}{2}$ — середина отрезка между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ в \mathbb{R}^2 .

Мы получили отображение $M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Заметим, что образ границы M совпадает с кривой γ . Согласно Лемме 2, это отображение не может быть вложением. Следовательно, существуют две различные пары точек γ , такие что отрезки, соединяющие их, имеют одинаковую середину и одинаковую длину. Эти четыре точки являются вершинами искомого прямоугольника.

Это доказательство наглядно изложено в видео [4] на YouTube. \square

Литература и дополнительные материалы

[AMK] П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин, *Энциклопедия элементарной математики. Книга 5, геометрия*, М., Наука, 1966.

[CG] Г. С. М. Коксетер, С. П. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией*, М.: Наука, 1978.

[Ox] Дж. Окстоби, *Мера и категория*, Мир, 1974.

[Pr] В. В. Прасолов, *Прямоугольники на кривой и вложения листа Мёбиуса*, Математическое Просвещение, Выпуск 8, 2004.

[S] А. Б. Сосинский, *Геометрии*, МЦНМО, 2017.

[FF] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, 1989.

[H] А. Хатчер, *Алгебраическая топология*, МЦНМО, 2011.

[Sh] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, МЦНМО, 2011.

[Ya] И. В. Яценко, *Парадоксы теории множеств*, Библиотека «Математическое просвещение», МЦНМО, 2002.

[1] <https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs>

[2] <https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE>

[3] <https://www.youtube.com/watch?v=brU5yLm9DZM>

[4] <https://www.youtube.com/watch?v=AmgkSdhK4K8>