

Определители в теории графов

Проект представляют О. Бурсиан, К. Кохась, В. Ретинский, Б. Френкин

26.01.2021

1 Предварительные сведения

Графы. Неформально говоря, *граф* — это множество точек (вершин), соединённых отрезками (рёбрами). Формальное определение: задать граф G — значит задать множество *вершин* $V(G)$ и множество *рёбер* $E(G)$, состоящее из некоторых пар (v_1v_2) элементов из V . Граф называется *неориентированным*, если не учитывается порядок элементов в паре, т.е. пары (v_1v_2) и (v_2v_1) не различаются. В противном случае граф называется *ориентированным*, или сокращённо *орграфом*. В дальнейшем считаем, что множество $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *конечно*, тогда и множество $E(G)$ конечно.

Если $(v_1v_2) \in E(G)$, то мы говорим, что *ребро* v_1v_2 *соединяет вершины* v_1 и v_2 . Говорят также, что это ребро *инцидентно* вершинам v_1 и v_2 , а эти вершины *инцидентны* ребру v_1v_2 . При этом вершины v_1 и v_2 называются *смежными*, а в противном случае *несмежными*. Если любые две вершины смежны, то граф называется *полным*.

Степень вершины графа — количество рёбер, инцидентных данной вершине. Степень вершины v обозначается $\deg v$. *Исходящая* и *входящая* степень вершины — соответственно, количество рёбер, исходящих и входящих в данную вершину.

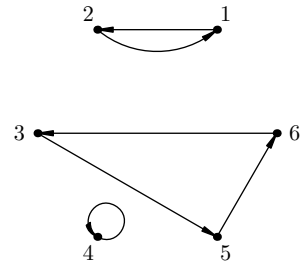
Квадратная числовая матрица A *порядка* n — это таблица размера $n \times n$, в клетках которой стоят вещественные числа; число, стоящее на пересечении i -й строки и j -го столбца, обозначается a_{ij} . *Матрица смежности* неориентированного графа G — это $n \times n$ -матрица $A = (a_{ij})$, в которой $a_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j смежны, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Такая матрица обязательно симметрична (относительно *главной диагонали*, ведущей из левого верхнего угла в правый нижний).

Матрица смежности ориентированного графа G — это $n \times n$ -матрица $A = (a_{ij})$, в которой $a_{ij} = 1$, если в графе G есть ребро, ведущее из v_i в v_j , и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Такая матрица уже не обязательно симметрична.

Путь в графе — это последовательность $v_{i_1}v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}v_{i_k}$ рёбер графа ($k \geq 1$), где первая вершина каждого следующего ребра совпадает со второй вершиной предыдущего. Множество из одного ребра также считается путём. Если $v_{i_k} = v_{i_1}$, т.е. путь замкнут, то он называется *циклом*. Граф называется *связным*, если между любыми его вершинами имеется путь или вершина только одна. Граф называется *деревом*, если он связан и в нём нет циклов. Нетрудно видеть, что в этом и только этом случае между любыми двумя вершинами существует ровно один путь.

Перестановки и их чётность. *Перестановкой* множества $\{1, \dots, n\}$ называется отображение этого множества в себя, при котором различные элементы переходят в различные и в каждый элемент переходит какой-то элемент — возможно, он сам. Если π — некоторая перестановка, то $\pi(i)$ обозначает тот элемент, в который переходит элемент i под действием этой перестановки.

Ориентированный граф, в котором исходящая и входящая степень каждой вершины равна 1, будем называть *одновалентным*, в таком графе могут быть *петли* (рёбра, у которых начало совпадает с концом). Каждая перестановка π определяет одновалентный граф на множестве вершин $\{1, 2, \dots, n\}$: этот граф содержит ориентированное ребро ij в том и только том случае, если $\pi(i) = j$. На рисунке приведен пример для $n = 6$: $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1, \pi(3) = 5, \pi(4) = 4, \pi(5) = 6, \pi(6) = 3$.



Произведение перестановок σ и τ — это перестановка, состоящая в последовательном выполнении перестановок σ и τ . *Транспозиция* — это перестановка, которая меняет местами два элемента, а остальные оставляет на месте. Нетрудно видеть, что любая перестановка является произведением транспозиций. Одна и та же перестановка не может являться произведением и чётного, и нечётного количества транспозиций. Если перестановка является произведением чётного количества транспозиций, то она называется *чётной*, а в противном случае *нечётной*. *Знак перестановки* равен $+1$ для чётной перестановки и -1 нечётной. Знак перестановки π обозначается $\text{sgn}(\pi)$. Если перестановка задана одновалентным графом, ее знак равен $(-1)^m$, где m — количество чётных (т.е. состоящих из чётного количества элементов) циклов в графе.

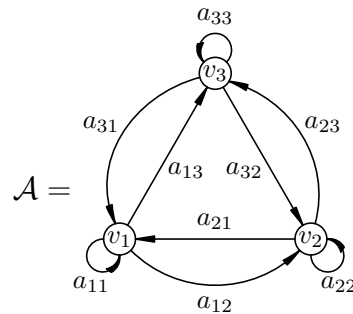
Определитель матрицы. Каждой квадратной матрице $A = (a_{ij})$ сопоставим вещественное число, которое называется её *определителем* и равно сумме произведений:

$$\det A = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)}, \quad (1)$$

где π пробегает всевозможные перестановки множества $\{1, \dots, n\}$. Таким образом, сумма содержит $n!$ слагаемых. Если $\det A = 0$, то матрица A называется *вырожденной*, а в противном случае *невырожденной*.

Для каждой матрицы A рассмотрим полный орграф \mathcal{A} на n вершинах (с петлями), в котором каждому ребру $v_i v_j$ сопоставлено вещественное число a_{ij} , которое называется *весом* этого ребра.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Далее мы будем рассматривать только такие одновалентные подграфы орграфа \mathcal{A} , которые содержат все его вершины. Каждая перестановка π из суммы (1) задает одновалентный подграф в графе \mathcal{A} (и наоборот: каждый одновалентный подграф определяет перестановку). Каждому одновалентному подграфу поставим в соответствие число, равное произведению весов всех его рёбер; если подграф содержит нечётное количество циклов с чётным числом вершин, дополнительно умножим это число на -1 . Результат будем называть *весом* подграфа. Таким образом, вес одновалентного подграфа, соответствующего перестановке π , в точности равен слагаемому из суммы (1), и мы можем принять альтернативное определение.

Определителем матрицы A называется сумма весов всех одновалентных подграфов графа \mathcal{A} .

Для графа \mathcal{A} из нашего примера все одновалентные подграфы и их веса изображены на рис. 1. Таким образом,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}.$$

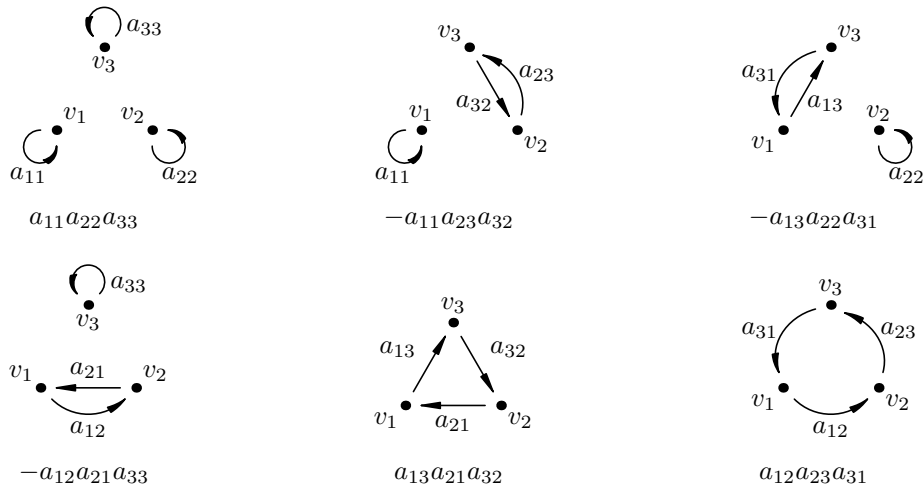


Рис. 1. Одновалентные подграфы графа \mathcal{A} и их веса

2 Свойства определителей

2.1. Пользуясь комбинаторным определением, докажите следующие свойства определителя.

а) Если в некоторой строке матрицы A каждый элемент умножить на вещественное число c , то в результате определитель тоже умножится на c .

б) Если в матрице поменять местами две строки, определитель сменит знак.

в) Пусть в k -м столбце матрицы A на диагонали стоит 1, а остальные элементы k -го столбца равны нулю. И пусть \tilde{A} — матрица, получающаяся из A вычеркиванием k -й строки и k -го столбца. Тогда $\det A = \det \tilde{A}$.

г) Дана матрица $A = (a_{ij})$ и матрицы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, у которых все элементы такие же, как в матрице A , за исключением j -й строки, а для элементов j -й строки выполняется правило

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}.$$

Тогда $\det A = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}$.

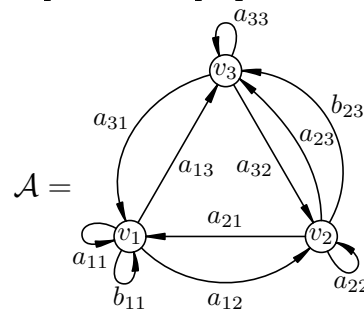
е) Обозначим через A_{ij} матрицу, которая получается вычеркиванием i -й строки и j -го столбца из матрицы A . Тогда верна формула разложения по строке

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

В связи с задачей 2.1 г) отметим следующий «лайфхак».

2.2. Пусть дана матрица $A = (a_{ij})$, в которой некоторые матричные элементы записаны в виде сумм, как в примере ниже. Построим орграф \mathcal{A} , в котором каждому слагаемому отвечает одно ребро. В отличие от стандартного случая в таком графе могут появиться кратные ребра и кратные петли (с разными весами). Определитель матрицы A по-прежнему равен сумме весов всех одновалентных подграфов построенного графа \mathcal{A} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



2.3. Пусть сумма элементов каждой строки матрицы A равна 0, а именно: в каждой диагональной клетке матрицы A стоит число, равное сумме остальных элементов той же строки со знаком минус.

а) Докажите, что $\det A = 0$.

б) Докажите, что $\det A_{ij_1} = (-1)^{j_2 - j_1} \det A_{ij_2}$ для каждого i и любых j_1, j_2 (обозначение из задачи 2.1 е).

2.4. Пусть граф G , построенный по матрице A , содержит подграф H с 8 вершинами, изображённый на рис. 2 слева, причем в подграфе могут быть рёбра, инцидентные светлым вершинам, не показанные на рисунке, но все чёрные вершины имеют степень 3, т. е. все их ребра указаны. Заменяем этот подграф на подграф H' , изображённый на рис. 2 справа, где новые веса задаются формулами

$$x' = \frac{y}{wz - xy}, \quad y' = \frac{x}{wz - xy}, \quad z' = \frac{w}{xy - wz}, \quad w' = \frac{z}{xy - wz}. \quad (2)$$

Пусть A' — матрица, соответствующая новому графу. Тогда

$$\det A = (xy - wz)^2 \det A'. \quad (3)$$

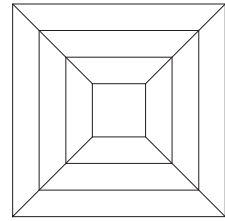
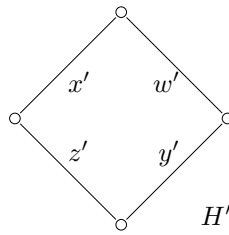
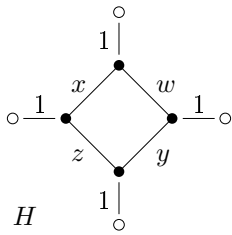


Рис. 2. Перестраиваем фрагмент графа.

Рис. 3. Граф $C_4 \times P_{m-1}$.

2.5. Пусть G — граф, изображённый на рис. 3 (всего $m - 1$ концентрических квадратов), A — матрица смежности этого графа. Докажите, что

$$\det A = \begin{cases} m^2, & \text{если } m \text{ нечётно,} \\ 0, & \text{если } m \text{ чётно.} \end{cases}$$

3 Определители клетчатых фигур

Пусть F — ограниченная клетчатая фигура на клетчатой плоскости, G_F — граф, двойственный фигуре F , т. е. граф, в котором вершины соответствуют клеткам фигуры, а рёбра соединяют вершины, соответствующие соседним по стороне клеткам. Удобно представлять себе граф G_F и его подграфы как ориентированные, полагая, что между двумя соседними клетками проведено два ребра с противоположными ориентациями. Обозначим через A_F матрицу смежности графа G_F . Замощениями будем называть разбиения фигуры F на домино. Ребро одновалентного подграфа в G_F будем называть *восходящим*, если оно вертикально и направлено вверх, и *нисходящим*, если оно вертикально и направлено вниз. (Напомним, что рассматриваются только такие одновалентные подграфы, которые содержат все вершины графа.) Фигура F называется *односвязной*, если она «без дыр» — более формально, если ее двойственный граф и двойственный граф её дополнения тоже связан.

3.1. Докажите, что количество одновалентных подграфов графа G_F равно квадрату количества замощений фигуры F .

3.2. Пусть P — односвязный клетчатый многоугольник, на границе которого a точек с чётной ординатой и b точек с нечётной, а внутри — d целочисленных точек. Тогда сумма длин вертикальных сторон многоугольника P сравнима с $a - b + 2d + 2$ по модулю 4.

3.3. Пусть F — односвязная клетчатая фигура чётной площади. Тогда в её графе G_F либо чётность количества восходящих рёбер каждого одновалентного графа совпадает с чётностью количества циклов в нём, либо для каждого одновалентного подграфа эти чётности противоположны.

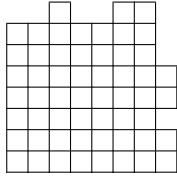


Рис. 4. Правильная 8-деталь

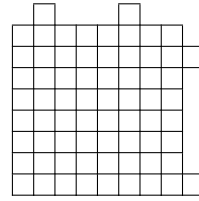


Рис. 5. Неправильная 9-деталь

Обозначим через c_k количество замощений фигуры F , в которых ровно k вертикальных домино. Многочлен $f_F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot x^k$ назовём *вертикальным многочленом* фигуры F . Пару замощений назовём *хорошей*, если количество вертикальных домино в них отличается ровно на 2. *Знаком фигуры F* будем называть число $\text{sgn } F = (-1)^h$, где h — количество горизонтальных домино в любом замощении фигуры.

3.4. Докажите, что определение знака корректно для односвязных фигур.

3.5. Для каждой односвязной клетчатой фигуры F

$$\begin{aligned} \det A_F &= \text{sgn } F \cdot \sum_{\pi} (-1)^{m(\pi)}, \\ &= \text{sgn } F \cdot f_F^2(\mathbf{i}), \end{aligned}$$

где суммирование происходит по всем одновалентным подграфам графа G_F , $m(\pi)$ — количество восходящих рёбер в перестановке π , $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.

3.6. Пусть F — произвольная односвязная клетчатая фигура площади $2s(F)$. Если все замощения фигуры F разбиваются на хорошие пары, то $\det A_F = 0$. Если все замощения, кроме одного, разбиваются на хорошие пары, то $\det A_F = (-1)^{s(F)}$.

Будем называть *n -деталью* квадрат $n \times n$, у которого, возможно, вырезаны некоторые клетки, прилегающие к верхней или правой стороне. Пронумеруем строки n -детали числами от 1 до n снизу вверх, а столбцы — слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров её строки и столбца. Будем называть n -деталь *правильной* (рис. 4), если из пары клеток (n, k) и (k, n) при $k < n$ вырезана ровно одна, а также вырезана клетка (n, n) . Остальные детали будем называть *неправильными* (рис. 5).

3.7. Пусть F — произвольная правильная n -деталь. Тогда $\det A_F = (-1)^{n(n-1)/2}$. Если же F — неправильная n -деталь, то $\det A_F = 0$.

3.8. Для произвольного прямоугольника $n \times m$

$$\det A_{n \times m} = \begin{cases} 0, & \text{если } (n+1, m+1) \neq 1; \\ (-1)^{\frac{n \cdot m}{2}}, & \text{если } (n+1, m+1) = 1; \end{cases}$$

где (n, m) — наибольший общий делитель n и m .

4 Остовные деревья

Пусть G — произвольный (неориентированный) связный граф. *Остовное дерево* графа G — это дерево, множество вершин которого то же, что у G , а множество рёбер содержится в множестве рёбер графа G .

Наша цель — зная строение связного графа G , найти количество его остовных деревьев. Для этого нам потребуется *матрица Лапласа* графа G — это $n \times n$ - матрица $L = (l_{ij})$, в

которой

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg v_i & \text{при } i = j; \\ -1, & \text{если } i \neq j \text{ и вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны;} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

По утверждению задачи 2.3 а выполнено равенство $\det L = 0$. Обозначим через L^- матрицу, которая получается вычёркиванием из матрицы Лапласа последней строки и последнего столбца.

Справедлива матричная теорема о деревьях: количество остовных деревьев связного графа равно $\det L^-$.

Хорошей стартовой точкой для доказательства этой теоремы служит лайфхак из задачи 2.2 или следующая конструкция.

Представим определитель матрицы L^- как сумму произведений её элементов, при этом каждый диагональный элемент матрицы представим как сумму единиц или минус единиц и раскроем скобки. Полученное выражение назовём *сверхразложением* определителя. Каждому слагаемому сверхразложения поставим в соответствие следующий орграф с вершинами v_1, v_2, \dots, v_n и со знаками «+» и «-» на рёбрах (рис. 6). Обведём множители этого слагаемого (это единицы и минус единицы, по одной в каждой строке и каждом столбце). Если на пересечении строки i и столбца j обведена минус единица, то из v_i в v_j проводится *отрицательное* ребро (со знаком минус). Если в диагональном элементе a_{ii} обведена k -я единица, то проведём из вершины v_i *положительное* ребро (со знаком плюс) к k -му наименьшему соседу вершины V_i (это вершина v_j , смежная с v_i и такая, что имеется ровно $k - 1$ вершин с номерами меньше j , смежных с v_i). Как нетрудно видеть, каждый из полученных орграфов возникает из ровно одного слагаемого в сверхразложении. Теперь можно определить *знак орграфа* в целом: это знак соответствующего слагаемого в сверхразложении.

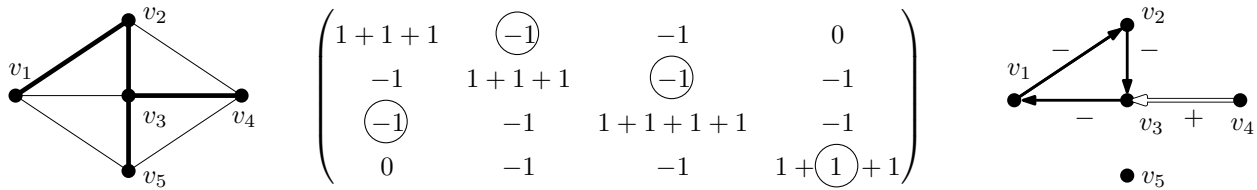


Рис. 6. Слева нарисован граф G и одно из его остовных деревьев. В центре показана матрица L^- графа G . Числа, обведенные кружками, дают одно из слагаемых сверхразложения, знак этого слагаемого равен $(-1)^m \operatorname{sgn}(\pi)$, где m — число выбранных минус единиц, $\operatorname{sgn}(\pi)$ — знак перестановки, задающей это слагаемое, в нашем случае $\pi = (2314)$, а её знак — «+». Справа нарисован орграф, соответствующий этому слагаемому.

4.1. Докажите матричную теорему о деревьях.

4.2. Обозначим через $E_{i,j}$ матрицу размера $n \times n$, в которой на пересечении i -й строки и j -ого столбца стоит 1, а в остальных клетках — нули (такие матрицы называются матричными единицами). Докажите, что количество остовных деревьев графа G равно

- а) $\det(L + E_{i,i})$ для любого i , б) $\det(L + E_{i,j})$ для любых i, j .

4.3. Пусть по-прежнему L — матрица Лапласа графа G . Зафиксируем набор вершин v_1, v_2, \dots, v_k графа G ($k < n$) и вычеркнем из матрицы L столбцы и строки, соответствующие зафиксированным вершинам. Полученную $(n - k) \times (n - k)$ матрицу обозначим через L_k^- . Подграф графа G , состоящий из k деревьев без общих вершин и рёбер с корнями v_1, v_2, \dots, v_k , содержащий все вершины графа G , назовем *остовным лесом*, посаженным в вершины v_1, v_2, \dots, v_k . При этом может оказаться, что некоторые из деревьев остовного леса состоят всего лишь из одной вершины.

Докажите, что определитель матрицы L_k^- равен количеству остовных лесов, посаженных в вершины v_1, v_2, \dots, v_k .

Корневым ориентированным деревом с корнем v назовем подграф орграфа G , содержащий все вершины G , в котором для каждой вершины существует единственный путь в v .

4.4. Пусть G — оргграф без петель. Его матрица Лапласа L^- определяется формулой (4) с поправкой на то, что при $i = j$ берется исходящая степень вершины v_i , а при $i \neq j$ полагаем $\ell_{ij} = -1$ лишь в случае, когда имеется ребро из вершины v_i в v_j . Докажите вариант матричной теоремы о деревьях для ориентированных графов: $\det L^-$ равен числу корневых ориентированных деревьев с корнем v_n .

4.5. В оргграфе без петель входящая степень каждой вершины равна исходящей. Докажите, что число ориентированных корневых деревьев с данным корнем не зависит от корня.

4.6. Используя матричную теорему о деревьях, докажите формулу Кэли: число деревьев на n пронумерованных вершинах равняется n^{n-2} .

Граф G называется *двудольным*, если множество его вершин состоит из двух непересекающихся подмножеств (*долей*), внутри которых нет рёбер.

4.7. Докажите, что число остовных деревьев полного двудольного графа $K_{k,m}$ равняется $k^{\ell-1} \ell^{k-1}$.

4.8. В графе G чётное число вершин, а также степени всех вершин чётны. Докажите, что число остовных деревьев графа G чётно.

5 Определители и существование совершенных паросочетаний

В этом разделе мы работаем с (неориентированными) двудольными графами. Пусть $n = 2m$, мы будем рассматривать только двудольные графы, доли которых содержат по m (т. е. по $n/2$) вершин. *Двудольной матрицей смежности* двудольного графа G называют $m \times m$ матрицу $B = (b_{ij})$, в которой $b_{ij} = 1$, если i -я вершина первой доли соединена ребром с j -й вершиной второй доли, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. Если заменить в двудольной матрице смежности графа G каждый элемент b_{ij} , равный 1, на переменную x_{ij} , то полученную матрицу \tilde{B} назовём *переменной двудольной матрицей смежности* графа G .

Совершенным паросочетанием в графе G называется такое подмножество $M \subseteq E(G)$ множества его рёбер, что каждая вершина графа принадлежит ровно одному ребру из M .

5.1. Докажите, что если доли произвольного двудольного графа G содержат поровну вершин, то существование совершенного паросочетания в графе G равносильно тому, что $\det \tilde{B}$ не равен тождественно нулю (как многочлен).

Как проверить невырожденность двудольной матрицы смежности A за разумное время? Для этого может пригодиться следующая теорема.

5.2. Теорема Шварца — Зиппеля. Пусть d — натуральное число, S — множество из s вещественных чисел, $p(x_1, \dots, x_m)$ — многочлен степени d от m переменных с вещественными коэффициентами. Тогда количество наборов (r_1, \dots, r_m) , где $r_1, \dots, r_m \in S$ и $p(r_1, \dots, r_m) = 0$, не превосходит ds^{m-1} .

5.3. Пусть дан двудольный граф G , доли которого содержат по m вершин. Используя теорему Шварца — Зиппеля, постройте алгоритм для проверки существования совершенного паросочетания, который ошибается не более чем в половине случаев.

Множественно применяя этот алгоритм, можно сделать вероятность ошибки сколь угодно малой.

6 Подсчёт совершенных паросочетаний в планарном двудольном графе

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости без самопересечений. Это означает, что его вершины можно изобразить точками плоскости, а инцидентные им рёбра — линиями с концами в этих точках, причём внутренние точки этих линий не принадлежат другим таким линиям. Будем называть *областью* любую часть плоскости, граница которой состоит из образов рёбер, а внутренность (остальные точки области) не принадлежат образам рёбер. Для любого изображения связного планарного графа выполнена *формула Эйлера*

$$v - e + f = 2,$$

где v — количество вершин, e — количество рёбер, f — количество областей.

Если в выражении (1) для определителя матрицы A взять все слагаемые с плюсом, то получим *перманент* матрицы A , который обозначается $\text{per}(A)$.

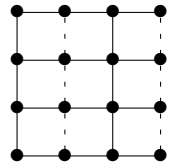
6.1. Докажите, что количество совершенных паросочетаний в двудольном графе равно перманенту двудольной матрицы смежности.

Вычисление перманента значительно более трудоёмко, чем вычисление определителя. Возникает вопрос: нельзя ли свести вычисление перманента двудольной матрицы смежности к вычислению определителя, поменяв знаки некоторых её элементов?

Пусть G — планарный двудольный граф. На рёбрах графа G расставим знаки «+» и «-». В его двудольной матрице смежности B заменим 1 на -1 , если соответствующее ребро имеет знак минус. Расстановку знаков на рёбрах обозначим σ , а полученную матрицу B^σ . *Кастелейнова расстановка знаков* — это такая расстановка знаков σ , что

$$|\det B^\sigma| = \text{per}(B).$$

6.2. На рисунке изображен граф с 16 вершинами. Сплошные линии обозначают ребра со знаком «плюс», пунктирные — со знаком «минус». Докажите, что эта расстановка знаков кастелейнова.



Пусть C — цикл длины 2ℓ в двудольном графе, σ — расстановка знаков на рёбрах, n_C — количество отрицательных рёбер в C . Назовём цикл C *правильно помеченным* относительно σ , если числа n_C и ℓ имеют разную чётность. Цикл C *удачно размещён*, если при удалении из G всех его вершин и смежных с ними рёбер получится граф, имеющий совершенное паросочетание. Граф называется *двусвязным*, если он связан и каждое ребро лежит хотя бы в одном цикле.

6.3. Пусть каждый удачно размещённый цикл правильно помечен относительно расстановки знаков σ . Тогда σ является кастелейновой. (Планарность графа не предполагается.)

6.4. Пусть G — планарный двудольный двусвязный граф. Зафиксируем его изображение на плоскости. Пусть σ — расстановка знаков на G , причём граничный цикл каждой ограниченной области на чертеже правильно помечен. Тогда расстановка знаков σ кастелейнова.

6.5. Докажите, что всякий планарный двусвязный двудольный граф имеет кастелейнову расстановку знаков.

6.6. а) Пусть в ориентированном графе G отмечено n вершин, имеющих только исходящие ребра (эти вершины — «входы» в граф, с них можно начать движение по графу) и n вершин, имеющих только входящие ребра («выходы»). Обозначим через $a_{i,j}$ число способов пройти от i -го входа к j -му выходу. Докажите, что перманент матрицы $(a_{i,j})$ равен количеству наборов, каждый из которых состоит из n путей, где каждый путь ведёт от входа к выходу, причём у любых двух путей не совпадают ни начальные, ни конечные вершины.

б) Пусть дополнительно известно, что граф плоский, причём все входы расположены левее всех выходов, а при движении по рёбрам вы всегда смещаетесь вправо. Докажите,

что определитель матрицы $(a_{i,j})$ равен количеству наборов, каждый из которых состоит из n непересекающихся путей, где i -й путь ведет от i -го входа к i -му же выходу.

6.7. а) В левом нижнем углу доски $n \times n$ стоит хромой король, умеющий ходить только в трёх направлениях: вправо, вверх и по диагонали вправо-вверх. Обозначим через A_n количество всех его маршрутов, ведущих в противоположный угол доски, а через B_n — количество таких маршрутов, не заходящих в левый столбец и верхнюю строку (кроме начальной и конечной позиции). Докажите, что $B_n = 2A_{n-1}$.



б) Рассмотрим матрицу $A^{(n)} = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, где $A_{i,j}$ — количество маршрутов хромого короля на доске $i \times j$, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний. Найдите $\det A^{(n)}$.

6.8. Обозначим через C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) количество способов пройти с левой нижней клетки доски $(n+1) \times (n+1)$ в правую верхнюю клетку, не поднимаясь выше диагонали, если каждым ходом разрешается переходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Например $C_2 = 2$ (проверьте!). Числа C_n называются *числами Каталана*, они могут быть вычислены по формуле $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Пусть H — матрица $(n+1) \times (n+1)$, где $h_{i,j} = C_{i+j}$ (мы считаем, что строки и столбцы матрицы нумеруются от 0 до n). Найдите $\det H$.

7 Задачи о деревьях

7.1. Пусть G — дерево на n вершинах. Докажите, что тогда

$$\det A_G = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{если в графе } G \text{ существует совершенное паросочетание;} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Характеристическим многочленом графа G называется определитель матрицы $\tilde{A}_G = (\tilde{a}_{ij})$, где

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} x & \text{при } i = j; \\ -1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны;} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, характеристический многочлен является многочленом от переменной x и обозначается через $\chi_G(x)$.

Обозначим через m_k количество способов выбрать k ребер графа G так, чтобы никакие два ребра не были инцидентны одной и той же вершине. *Паросочетательным многочленом* графа G назовем

$$m_G(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k m_k x^{n-2k}.$$

7.2. Пусть G — дерево. Докажите, что $\chi_G(x) = m_G(x)$.

Решения

2.1. а) Это очевидно. Умножению k -й строки матрицы A на число c соответствует умножению на c весов всех рёбер, исходящих из вершины v_k . Каждый одновалентный подграф содержит ровно одно такое ребро, значит, его вес тоже умножится на c .

б) Если в одновалентном графе имеется ребро, ведущее из вершины v_k в вершину v_i , будем называть вершину v_i последователем вершины v_k . Перемена местами j -й и k -й строк матрицы A задаёт следующее преобразование одновалентных подграфов: ребро, выходящее из вершины v_k , перенаправляется и ведёт теперь не к последователю v_k , а к последователю v_j , а взамен ребро, выходящее из вершины v_j перенаправляется к последователю v_k . Если вершины v_k и v_j находились в разных циклах длины ℓ_k и ℓ_j , то в результате операции они окажутся в одном цикле длины $\ell_k + \ell_j$. Если же вершины находились в одном цикле, он распадётся на две части с сохранением суммарной длины. Проверить! В обоих случаях количество чётных циклов изменится на 1.

Каждый одновалентный подграф графа \mathcal{A} должен содержать петлю с вершиной v_k , тем самым, рёбра, ведущие в вершину v_k (из остальных вершин графа) не могут принадлежать ни одному одновалентному подграфу. Поэтому существует естественная биекция между одновалентными подграфами с ненулевым весом графа \mathcal{A} и одновалентными подграфами с ненулевым весом графа $\tilde{\mathcal{A}}$, состоящая в отбрасывании петли вершины v_k . Так как сама петля имеет единичный вес, эта биекция к тому же сохраняет вес подграфа.

с) Каждый одновалентный подграф содержит одно ребро, соответствующее какому-то элементу a_{ij} из j -й строки. Вес такого подграфа равен произведению числа a_{ij} и произведения весов оставшихся рёбер (и еще, возможно, -1). Заменяя вес этого ребра на $a_{ij}^{(1)}$ или $a_{ij}^{(2)}$, мы получим одновалентные подграфы из разложений определителей $\det A^{(1)}$ и $\det A^{(2)}$ и сумма весов этих подграфов равна весу первого подграфа.

д) Представим i -ю строку матрицы A в виде суммы n строк:

$$(a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_{in}).$$

В силу утверждения предыдущего пункта, достаточно проверить для каждого j , что если i -я строка матрицы A равна $(0, \dots, 0, a_{ij}, 0, \dots, 0)$, то $\det A = (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$.

Частный случай этого утверждения для $j = i$ фактически разобран в пункте с). Пусть теперь для определенности $i < j$. Последовательно переставим в матрице A i -ю строку с $(i+1)$ -й, потом $(i+1)$ -ю строку с $(i+2)$ -й и т. д., $(j-1)$ -ю строку с j -й. В результате i -я строка матрицы A опустится на j -е место и мы получим матрицу B , у которой j -я строка имеет вид $(0, \dots, 0, a_{ij}, 0, \dots, 0)$ — ненулевой элемент a_{ij} стоит на j -м месте, т. е. на диагонали. При этом $B_{jj} = A_{ij}$, $\det B = (-1)^{j-i} \det A = (-1)^{j+i} \det A$, а тогда по свойству с)

$$\det A = (-1)^{j+i} \det B = (-1)^{j+i} a_{ij} \det B_{jj} = (-1)^{j+i} a_{ij} \det A_{ij},$$

что и требуется.

Как видим, рассуждение получилось не «чисто комбинаторное». Для оправдания разберем случай $j = i+1$ на комбинаторном языке. Ограничимся рассмотрением частного случая $n = 6$, $i = 3$, $j = 4$. Мы хотим проверить равенство

$$\det \left(\begin{array}{cc|cc|cc} a & b & c & d & e & f \\ g & h & k & \ell & m & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ o & p & q & r & s & t \\ \hline u & v & w & x & w & z \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \phi \end{array} \right) = -a_{i+1} \cdot \det \left(\begin{array}{cc|cc|cc} a & b & c & e & f \\ g & h & k & m & n \\ \hline o & p & q & s & t \\ \hline u & v & w & w & z \\ \alpha & \beta & \gamma & \epsilon & \phi \end{array} \right)$$

Рассмотрим произвольный оргграф, соответствующий матрице в левой части равенства, изменим его следующим образом: удалим все рёбра, входящие в вершину v_{i+1} , ребро $v_i v_{i+1}$ стянем — образуется новая вершина v , рёбра, ранее выходявшие из вершины v_{i+1} теперь

будут выходить из вершины v , а ребра, ранее входившие в v_i , будут входить в вершину v . Мы получим орграф, соответствующий матрице из правой части. Посмотрим, как описанная трансформация сказывается на одновалентных подграфах. Поскольку каждый одновалентный подграф исходного графа содержит ребро $v_i v_{i+1}$ (так как это единственное ребро, выходящее из v_i), он не содержит никакого другого ребра, входящего в v_{i+1} . Поэтому в результате трансформации из подграфа не будет удалено ни одного ребра, кроме стянутого ребра $v_i v_{i+1}$, вес которого учтен в виде отдельного сомножителя $a_{i i+1}$ в правой части. При стягивании один из циклов одновалентного подграфа изменит свою чётность, поэтому изменится знак подграфа. С другой стороны, для каждого одновалентного подграфа для правой матрицы нетрудно установить, из какого (однозначно определённого) одновалентного подграфа левой матрицы он получен.

2.2. Пусть какой-то элемент матрицы A , например диагональный элемент на месте $(1, 1)$, записан в виде суммы, скажем, $a_{11} + b_{11}$. Заменим в орграфе \mathcal{A} две петли при вершине v_1 с весами a_{11} и b_{11} на одну петлю с весом $a_{11} + b_{11}$. Полученный граф обозначим $\tilde{\mathcal{A}}$. Каждому одновалентному подграфу H орграфа $\tilde{\mathcal{A}}$, содержащему петлю при вершине v_1 , соответствуют два одновалентных подграфа в \mathcal{A} — один с петлей при вершине v_1 с весом a_{11} , а другой — с весом b_{11} . Очевидно, суммарный вес этих подграфов равен весу H . Если же одновалентный подграф орграфа $\tilde{\mathcal{A}}$ не содержит петли при вершине v_1 , то в графе \mathcal{A} найдется изоморфный ему подграф.

Суммируя по всем одновалентным подграфам, мы приходим к выводу, что при объединении двух петель в одну или, что то же самое, при замене формальной суммы $a_{11} + b_{11}$ на ее значение, определитель матрицы не меняется. Аналогично обстоят дела с другими матричными элементами, записанными в виде формальных сумм.

2.3. а) [6] Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} + a_{14} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & a_{21} + a_{23} + a_{24} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{31} + a_{32} + a_{34} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & a_{41} + a_{42} + a_{43} \end{pmatrix}$$

Такую форму записи матриц с нулевой суммой строк — когда вне диагонали стоят элементы со знаком минус, а на диагонали их суммы со знаком плюс — будем считать стандартной. Дальнейшие рассуждения мы будем проводить, опираясь на этот пример, но читатель без труда восстановит детали общего доказательства.

Согласно утверждению предыдущей задачи для вычисления $\det A$ следует перебирать одновалентные подграфы в графе \mathcal{A} , изображенном на рис. 7 слева. Но мы сейчас опишем конструкцию, которая сведет этот перебор к перебору подграфов в графе \mathcal{A}_1 , получающемся из \mathcal{A} удалением всех петель и знаков у весов рёбер (рис. 7 справа).

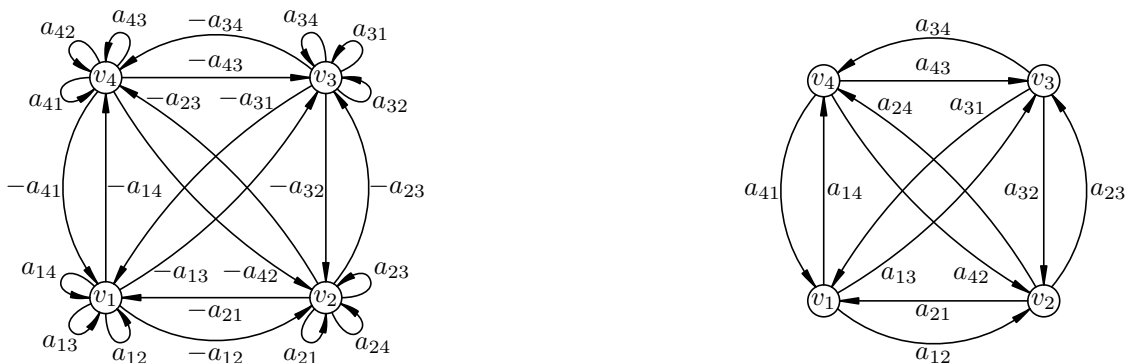


Рис. 7. Графы \mathcal{A} и \mathcal{A}_1

Поскольку в графе \mathcal{A} повторяются метки, некоторые подграфы могут иметь одинаковый вес (см. рис. 8, a ; не будем пока обращать внимание на знак веса). Метки на рёбрах графа \mathcal{A} — это числа $\pm a_{ij}$, причем индексы i и j у каждой метки различны. Очевидно, что ребро,

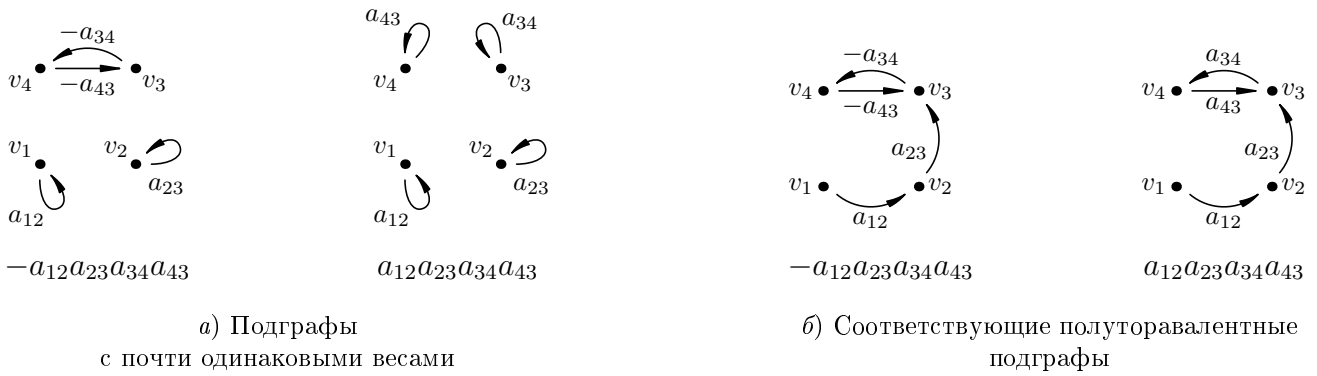
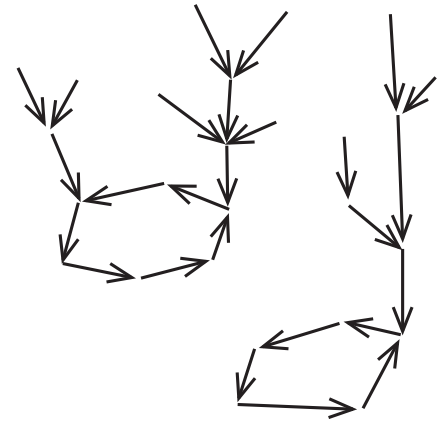


Рис. 8. Новое правило рисования подграфов

выходящее из вершины v_i , помечено меткой, у которой первый индекс равен i . Отсюда следует, что метки всех рёбер любого одновалентного подграфа графа \mathcal{A} попарно различны. Введем тогда *новое правило для изображения одновалентных подграфов* графа \mathcal{A} . Выпишем все метки рёбер одновалентного подграфа и нарисуем подграф заново (на том же множестве вершин), а именно: для каждой метки $\pm a_{ij}$ нарисуем ребро, идущее из вершины v_i в v_j , помеченное этой самой меткой $\pm a_{ij}$ (см. рис. 8, б). Нарисованный по новому правилу граф, очевидно, не имеет петель. Фактически это подграф графа \mathcal{A}_1 , отличие только в том, что веса рёбер у нашего подграфа могут иметь лишний знак минус. Чуть позже мы устраним это отличие.

Полученные подграфы сами по себе уже не являются одновалентными. От одновалентных графов в них осталось лишь свойство, состоящее в том, что из каждой вершины выходит одно ребро. Входящих же рёбер у вершины может быть несколько или ни одного. Назовем такие графы *полуторавалентными*.

Очевидно, всякий полуторавалентный граф содержит хотя бы один цикл (двигайтесь по стрелкам — когда-нибудь вы придёте в вершину, где уже были раньше), а если он содержит несколько циклов, то эти циклы не имеют общих вершин. Кроме циклов он может содержать несколько деревьев, посаженных в вершины циклов.



Полуторавалентный граф

Как видно из рис. 8, б, одинаковые полуторавалентные графы могут иметь разную разметку рёбер. Метка ребра $v_i \rightarrow v_j$ полуторавалентного графа может быть равна $+a_{ij}$ или $-a_{ij}$, однако если этот граф получен по описанному правилу из одновалентного, расстановка знаков не вполне хаотичная. А именно: полуторавалентный граф в том и только том случае получается из одновалентного, если:

- 1) в каждом его цикле выполнено свойство: либо все метки рёбер цикла имеют вид $+a_{ij}$ (такой цикл будем называть *положительным*, в одновалентном графе ему соответствовал набор петель), либо все они имеют вид $-a_{ij}$ (такой цикл будем называть *отрицательным*, в одновалентном графе ему соответствовал этот же цикл);
- 2) рёбра, не входящие ни в какой цикл, имеют метки вида $+a_{ij}$.

Графы, обладающие этим свойством разметки рёбер, будем называть *допустимыми*.

Правило вычисления веса полуторавалентного графа такое же, как и у одновалентного: вес равен произведению весов рёбер, взятому со знаком минус, если в графе нечётное количество отрицательных чётных циклов. Мы учитываем только отрицательные чётные циклы, поскольку положительным циклам полуторавалентного графа соответствует набор петель в одновалентном графе, а петли на знак веса не влияют.

Работая с полуторавалентными графами, удобно метки рёбер изображать вообще без знака, но при этом дополнительно помнить о знаке каждого цикла. В этом случае вес полуторавалентного графа равен произведению весов всех его рёбер, умноженному на $(-1)^c$, где c — количество отрицательных чётных циклов.

У т в е р ж д е н и е. Определитель матрицы A равен сумме весов всех допустимых полуторавалентных подграфов в графе \mathcal{A}_1 .

Собственно, доказывать тут нечего. Допустимые полуторавалентные подграфы графа \mathcal{A}_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с одновалентными подграфами графа \mathcal{A} , причем это соответствие сохраняет вес подграфа.

Вернёмся к решению задачи. Теперь совсем нетрудно проверить, что $\det A = 0$. Действительно, рассмотрим какой угодно допустимый полуторавалентный подграф и поменяем знак у цикла, проходящего через вершину с наименьшим номером. Мы получим другой допустимый подграф. Повторное применение этой операции приведет к исходному подграфу. Таким образом, с помощью этой операции множество всех допустимых полуторавалентных подграфов разбивается на пары. Но сумма весов графов одной пары равна нулю: если пара построена с помощью смены знака чётного цикла, то количества отрицательных циклов в графах этой пары имеют разную чётность, а набор весов рёбер одинаков; если же пара построена с помощью смены знака нечётного цикла, то при смене знака сменился знак произведения меток этого цикла.

б) Чтобы не связываться с линейной алгеброй, докажем утверждение задачи, обобщив матричную теорему о деревьях на случай взвешенных ориентированных графов. Пусть дан полный орграф \mathcal{A}_1 на n вершинах без петель, в котором между любыми двумя вершинами v_i и v_j ($i \neq j$) имеется как ребро $v_i v_j$ с весом a_{ij} , так и ребро $v_j v_i$ с весом a_{ji} (рис. 7 справа). Матрица A из условия задачи есть матрица Лапласа такого графа.

Корневым ориентированным остовным деревом с корнем v_i назовем такой ациклический граф на множестве вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, в котором исходящая степень вершины v_i равна 0, а любой другой вершины — 1, иными словами для любой вершины существует единственный путь из неё в v_i . Вес корневого ориентированного остовного дерева равен произведению весов его рёбер.

Утверждение задачи сразу следует из теоремы: число $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ равно сумме весов всех корневых ориентированных остовных деревьев с корнем v_i .

Докажем эту теорему. Достаточно рассмотреть случай $i = n$, остальные случаи аналогичны. Пусть \tilde{A} — $n \times n$ матрица, у которой n -я строка равна $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на j -м месте), а остальные матричные элементы такие же, как в матрице A . Тогда из разложения $\det \tilde{A}$ по n -й строке получаем

$$\det \tilde{A} = (-1)^{n+j} \cdot 1 \cdot \det A_{nj}. \quad (5)$$

Будем вычислять определитель $\det A_{nj}$ с помощью техники полуторавалентных графов. Для примера опять ограничимся случаем $n = 5$, пусть $j = 2$:

$$A_{25} = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \\ -a_{21} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ -a_{31} & a_{31} + a_{32} + a_{34} + a_{35} & -a_{34} & -a_{35} \\ -a_{41} & -a_{43} & a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{45} & -a_{45} \end{pmatrix}.$$

Удобно полагать, что строки матрицы A_{nj} пронумерованы от 1 до $n - 1$, а столбцы — от 1 до n , но с пропуском номера j .

Как и в предыдущем пункте, следует в каждой строке и каждом столбце выбрать по одному числу (если соответствующий матричный элемент записан как сумма, следует взять лишь одно из слагаемых), после чего построить рёбра графа \mathcal{A}_1 , соответствующие выбранным числам. Если при этом ребро имеет вес с «лишним» знаком минус (например, если в матрице был выбран элемент $-a_{13}$), будем называть такое ребро отрицательным. Получится граф на вершинах $\{v_1, \dots, v_n\}$, обладающий следующими свойствами (рис. 9).

1) Исходящая степень вершин v_1, \dots, v_{n-1} равна 1, исходящая степень вершины v_n равна 0.

2) Из вершины v_j выходит одно «отрицательное» ребро, а входят могут только «положительные» ребра.

3) Отрицательные рёбра образуют несколько циклов и еще один «неполный цикл» — путь из v_j в v_n (этот путь становится циклом, если мы дополним его ребром $v_n v_j$, соответствующим элементу $a_{nj}=1$ матрицы \tilde{A}).

4) Положительные рёбра также могут образовывать несколько циклов и еще несколько ориентированных корневых деревьев, посаженных в какие-то из вершин циклов (включая неполный цикл).

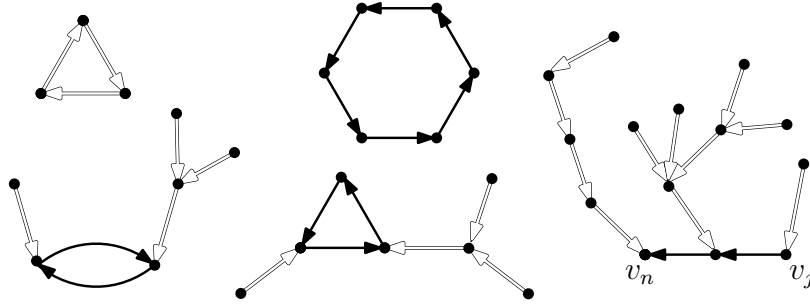


Рис. 9. Черным цветом обозначены «отрицательные» рёбра, белым — «положительные»

Знак такого подграфа равен $(-1)^{c+\ell}$, где c — количество отрицательных чётных циклов, ℓ — число рёбер в неполном цикле. Действительно, дополнив комплект выбранных матричных элементов, порождающих рассматриваемый подграф, элементом $a_{nj} = 1$, добавим к подграфу ребро $v_n v_j$. Получится полуторавалентный подграф, используемый в вычислении $\det \tilde{A}$. Неполный цикл превратится в обычный отрицательный цикл, его вклад в вычисление знака подграфа как раз и будет равен $(-1)^\ell$. При этом сам факт добавления к матричным элементам, выбранным на местах $(1, \pi_1), (2, \pi_2), \dots, (n-1, \pi_{n-1})$ (здесь π — перестановка множества $\{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$, нумерующего столбцы матрицы A_{nj}), ещё одного множителя a_{nj} создаёт перестановку множества $\{1, 2, \dots, n\}$, в которой на $n-j$ транспозиций больше, чем в π . Поправочный знак $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ относится ко всем рассматриваемым полуторавалентным подграфам, и именно его мы и видим в формуле (5).

Итак, вычисление определителя $\det A_{ij}$ сводится к суммированию с надлежащими знаками весов всех полуторавалентных подграфов со свойствами 1)–4). Применяя инволюцию из предыдущего пункта (смена знака цикла, проходящего через вершину с наименьшим номером), мы сократим все подграфы, содержащие хотя бы один цикл. Рассмотрим любой несократившийся подграф, он представляет собой ориентированное дерево с корнем v_n . Пусть он содержит ℓ отрицательных рёбер (это рёбра «неполного цикла»), знак этого подграфа равен $(-1)^\ell$, и это же значение имеет произведение знаков «отрицательных» рёбер. Таким образом, итоговый вес этого подграфа — это произведение весов рёбер дерева.

Итак, подсчитываемый определитель есть сумма весов всех ориентированных деревьев с корнем v_n .

2.4. Мы взяли эту задачу в [2, лемма 2.1]. В приводимом рассуждении одновалентные подграфы называются *1-факторами*.

Разобьем все 1-факторы графов G и G' на группы, у которых одинаково устроено пересечение с подграфами H и H' соответственно. После этого предъядвим взаимно однозначное соответствие между этими группами (а иногда даже между отдельными 1-факторами), сохраняющее суммарный вес.

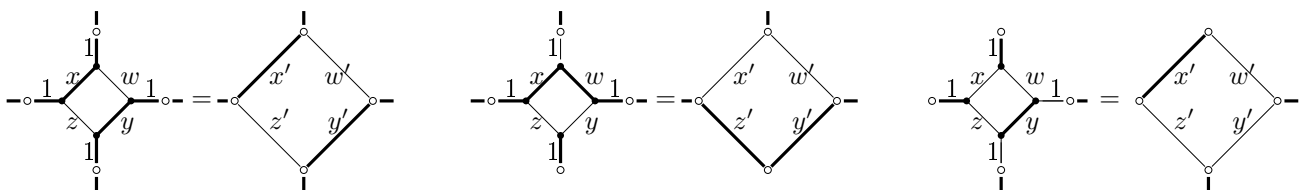


Рис. 10. Перестраиваем 1-факторы.

1) Каждому 1-фактору графа G , имеющему циклы, проходящие по рёбрам x и y в подграфе H , поставим в соответствие 1-фактор графа G' , в котором эти фрагменты циклов заменены на рёбра x' , y' (рис. 10 слева). Указанные фрагменты циклов в подграфе H давали вклад xy в вес 1-фактора. После замены мы имеем вес $x'y' = \frac{xy}{(wz-xy)^2}$, а также множитель $(wz-xy)^2$ в правой части равенства (3). В итоге вес не изменился. Аналогично поступим, если циклы проходят по рёбрам w, z .

2) Каждому 1-фактору графа G , имеющему длинный цикл, проходящий по рёбрам x, w в подграфе H , и цикл длины 2, проходящий по вертикальному ребру (рис. 10 в центре), поставим в соответствие 1-фактор графа G' , в котором 2-цикл отсутствует, а фрагмент длинного цикла заменен на пару рёбер z', y' . Аналогично поступим для конфигураций, содержащих 2-цикл, проходящий по ребру y , и два 2-цикла, примыкающих к ребру x (рис. 10 справа), а также для похожих конфигураций. Сохранение веса проверяется так же, как в предыдущем пункте.



Рис. 11. Перестраиваем группы 1-факторов.

3) Соберём в одну группу 1-факторы графа G , которые совпадают вне графа H и при этом содержат либо цикл, проходящий по рёбрам z, y, w (дающий вклад yzw в вес 1-фактора), либо 2-цикл по ребру y и длинный цикл, проходящий через x (и дающий вклад xy^2). Следует иметь в виду, что эти две конфигурации имеют разные знаки, поскольку количества циклов в них отличаются на 1. Каждой группе сопоставим 1-фактор в G , который вне графа H устроен так же (и поэтому вклад внешней части один и тот же для всех упомянутых 1-факторов) и при этом содержит ребро x' (рис. 11 слева). Опять получаем равенство весов, поскольку $yzw - xy^2 = (wz - xy)^2 x'$. Аналогично разбирается “двойственный” случай (рис. 11 справа).

4) Аналогично разбираются оставшиеся варианты (рис. 12). Отметим только, что правый цикл, показанный на рис. 12 сверху, и левый цикл на рис. 12 снизу должны рассматриваться с обеими возможными ориентациями, что удваивает их вклад. Равенство весов на рис. 12 обеспечивается тождествами

$$1 = (wz - xy)^2(x'^2 y'^2 + w'^2 z'^2 - 2x'y'w'z') \quad \text{и} \quad x^2 y^2 + w^2 z^2 - 2xywz = (wz - xy)^2.$$

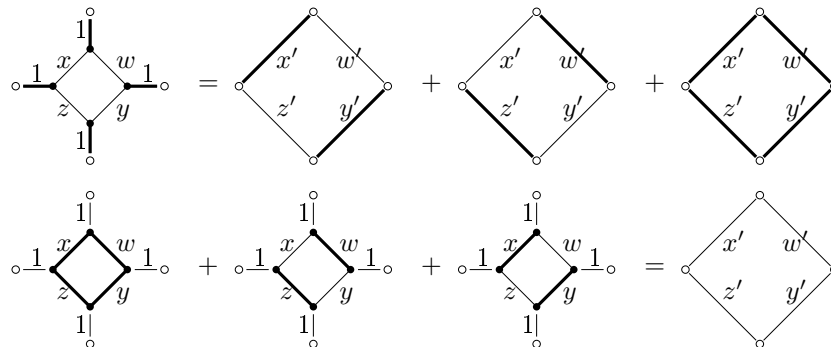


Рис. 12. Остальные отождествления.

2.5. Мы взяли эту задачу в [2, пример 2.2].

Пользуясь утверждением задачи 2.4, будем последовательно удалять 4-циклы на краю цилиндра (рис. 13). Чтобы избежать при вычислениях нулей в знаменателях, будем считать,

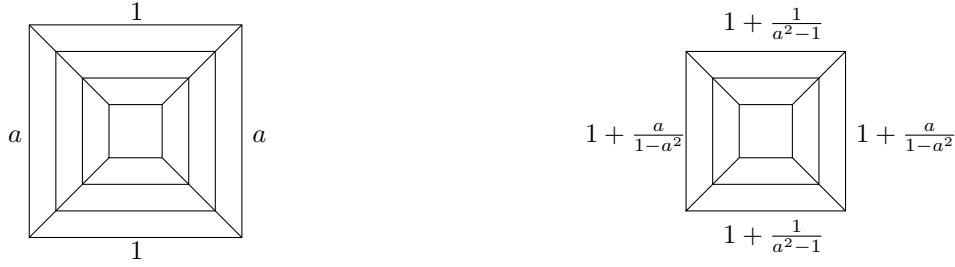


Рис. 13. Удаляем цикл на краю цилиндра.

что рёбра цикла H_0 на краю цилиндра имеют веса $x_0 = a$, $z_0 = 1$, $y_0 = a$, $w_0 = 1$, а все остальные рёбра в графе имеют вес 1. После применения одной операции крайний цикл исчезает, и теперь на краю появляется новый цикл H_1 . Веса его рёбер равны сумме весов рёбер, которые еще до операции присутствовали в графе – а в графе было четыре ребра веса 1 – и новых рёбер, веса которых равны $\frac{a}{1-a^2}$, $\frac{1}{a^2-1}$, $\frac{a}{1-a^2}$, $\frac{1}{a^2-1}$ в силу формулы (2). Итак,

$$x_1 = 1 + \frac{a}{1-a^2}, \quad z_1 = 1 + \frac{1}{a^2-1}, \quad y_1 = 1 + \frac{a}{1-a^2}, \quad w_1 = 1 + \frac{1}{a^2-1}.$$

Теперь по индукции проверяется, что после $2n$ повторений этой операции (индукция с шагом 2 удобна, поскольку формулы после чётного и нечётного числа операций немного отличаются) веса в крайнем цикле будут равны

$$x_{2n} = y_{2n} = \frac{na^2 + a}{2na + 1}, \quad z_{2n} = w_{2n} = \frac{1 + 2na - na^2}{2na + 1},$$

а произведение определителей всех убранных циклов равно

$$\det A(H_0) \det A(H_1) \dots \det A(H_{2n-1}) = (2na + 1)^2.$$

В результате если m чётно, скажем $m - 1 = 2n + 1$, то после $2n$ операций от исходного графа останется лишь один 4-цикл с весами рёбер, указанными выше. Определитель матрицы такого цикла равен

$$(x_{2n}y_{2n} - z_{2n}w_{2n})^2 = \left(\frac{(2n+1)a + 1}{2na + 1} \right)^2 (a - b)^2,$$

и, значит, искомый определитель равен

$$\det A(H_0) \det A(H_1) \dots \det A(H_{2n})(x_{2n}y_{2n} - z_{2n}w_{2n})^2 = ((2n+1)a + 1)^2 (a - b)^2.$$

При $a = b = 1$ это выражение равно 0. Если же m нечётно, аналогично получаем, что определитель равен $((m-1)a + 1)^2$, и при $a = b = 1$ это выражение равно m^2 .

3.1. [1, теорема 2.1]. Покрасим клетки фигуры в шахматном порядке, и рёбра каждого одновалентного графа разобьём на две группы – рёбра, выходящие из чёрных вершин, и рёбра, выходящие из белых. Рёбра каждой группы задают паросочетание, которому, в свою очередь, соответствует замощение. Это соответствие является биекцией.

3.2. [1, лемма 2.3]. Индукция по площади. Если в двойственном графе есть висячая вершина, ототрежем соответствующую клеточку. В противном случае ототрежем подходящую угловую клетку.

Отметим, что если допускать вырожденные многоугольники, а именно – «двуугольники» (циклы из двух вершин и двух встречных рёбер), то утверждение задачи верно и для них.

3.3. [1, теорема 2.4]. Рассмотрим любой одновалентный подграф. Очевидно, что количество восходящих и нисходящих рёбер в нем одинаково, обозначим это количество через v .

Подграф представляет собой набор нескольких, скажем k , циклов, т. е. клетчатых многоугольников. Поскольку все циклы чётные и в совокупности содержат все клетки, а фигура односвязная, внутри каждого цикла содержится чётное число клеток. В силу этого, применяя утверждение предыдущей задачи к каждому циклу, мы можем не учитывать слагаемое $2d$. Суммируя по всем циклам, получаем, что

$$A - B + 2 \cdot k \equiv_{\text{mod } 4} \text{сумма длин вертикальных сторон} = 2 \cdot v,$$

где A — суммарное количество точек с чётными ординатами, B — суммарное количество точек с нечётными ординатами на границах всех циклов. Так как одновалентный подграф содержит все целочисленные узлы фигуры, разность $A - B$ чётна и не зависит от подграфа, положим $A - B = 2 \cdot t$. Тогда $2 \cdot v \equiv 2 \cdot t + 2 \cdot k \pmod{4}$, откуда $v \equiv t + k \pmod{2}$. Поскольку t не зависит от подграфа, утверждение доказано.

3.4. [1, лемма 2.5]. Задача тривиально решается с помощью раскраски «горизонтальная зебра», но мы приведем другое рассуждение.

Будем интерпретировать замощение как одновалентный подграф, где каждая доминошка определяет 2-цикл, тогда число циклов — это количество доминошек, число восходящих рёбер — это количество вертикальных доминошек. Отсюда

$$\begin{aligned} & \text{число циклов} + \text{число восходящих рёбер} = \\ & = \text{число домино} + \text{число вертик. домино} \equiv_{\text{mod } 2} \text{число гориз. домино}. \end{aligned} \quad (6)$$

Как мы знаем из предыдущей задачи, чётность суммы в левой части не зависит от одновалентного подграфа (и, в частности, от замощения), следовательно, чётность количества горизонтальных домино во всех замощениях фигуры одинакова. Значит, определение знака не зависит от замощения.

Отметим одно следствие из сделанных наблюдений. Если $\text{sgn}F = 1$, т. е. в правой части формулы (6) стоит чётное число, то в любом замощении (а тогда и в любом одновалентном подграфе в силу утверждения задачи 3.3) чётность количества восходящих рёбер совпадает с чётностью числа циклов, а если $\text{sgn}F = -1$, эти чётности противоположны. Иными словами, для любого одновалентного подграфа π в графе G_F

$$(-1)^{\text{число восходящих рёбер в } \pi} = \text{sgn}F \cdot (-1)^{\text{число циклов в } \pi}. \quad (7)$$

Напомним, что граф G_F двудольный, все циклы в нем чётные, поэтому заключаем, что верна формула

$$\det A_F = \text{sgn}F \cdot \sum_{\pi} (-1)^{\text{число восходящих рёбер в } \pi}. \quad (8)$$

3.5. [1, теорема 2.7]. Обозначим через γ_k количество одновалентных подграфов графа G_F , имеющих k восходящих рёбер. Тогда

$$\det A_F = \text{sgn}F \cdot \sum_{\pi} (-1)^{\text{число восходящих рёбер в } \pi} = \text{sgn}F \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k \cdot (-1)^k. \quad (9)$$

Благодаря биекции из задачи 3.1 ясно, что коэффициент при x^k в выражении $f_F(x)^2$ равен количеству одновалентных подграфов, у которых ровно k вертикальных рёбер. Количество восходящих рёбер в одновалентном подграфе равно половине числа вертикальных рёбер, откуда $f_F(x)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^{2k}$. Подставляя сюда $x = \mathbf{i}$, из формулы (9) получаем требуемое. В частности, мы установили формулу

$$\det A_F = \text{sgn}F \cdot f_F(\mathbf{i})^2. \quad (10)$$

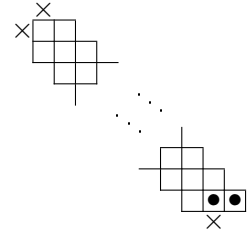
3.6. [1, теорема 2.8]. Будем вычислять $\det A_F$ по формуле (10). Если хорошая пара содержит замощение с k вертикальными домино и замощение с $k + 2$ вертикальными домино, то её

вклад в $f_F(\mathbf{i})$ равен $\mathbf{i}^k + \mathbf{i}^{k+2} = 0$. Тем самым все хорошие пары вносят нулевой вклад в $f_F(\mathbf{i})$. Отсюда следует первое утверждение.

Если все замощения, кроме одного, разбиты на хорошие пары, обозначим через v и h количество вертикальных и горизонтальных домино в замощении, оставшемся без пары, $h + v = s(F)$. Тогда $f_F(\mathbf{i}) = \mathbf{i}^v$ в силу предыдущего рассуждения, $\text{sgn} F = (-1)^h$, и следовательно, $\det A_F = \text{sgn} F \cdot f_F^2(\mathbf{i}) = (-1)^{h+v} = (-1)^{s(F)}$.

3.7. [1, теорема 2.11]. Выражение $n(n-1)$ в доказываемой формуле — это площадь правильной детали. По утверждению задачи 3.6 достаточно проверить, что для каждой правильной детали все её замощения, кроме одного, разбиваются на хорошие пары, а для каждой неправильной — все замощения разбиваются на хорошие пары. И то, и другое проверяется индукцией по n . Для доказательства нам понадобится следующая лемма [4, лемма 2.1].

Лемма (о полудиagonали). Пусть фигура F содержит фрагмент, состоящий из трёх диагональных рядов клеток, показанных на рисунке, причём клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре. Тогда множество замощений фигуры F , не содержащих доминошку, помеченную жирными кружочками, разбивается на хорошие пары.



Доказательство леммы. Рассмотрим средний из этих диагональных рядов. Докажем, что найдется квадрат 2×2 , состоящий из двух доминошек замощения и содержащий две клетки этого диагонального ряда (переставляя доминошки в таком квадрате, мы легко разобьем множество разбиений на пары). Действительно, если такого квадрата не найдется, то, просматривая этот ряд клеток, начиная с верхнего левого угла, мы видим, что каждая очередная доминошка, накрывающая диагональную клетку, должна накрывать также либо клетку справа, либо клетку снизу. Дойдя до правого нижнего угла, получаем противоречие.

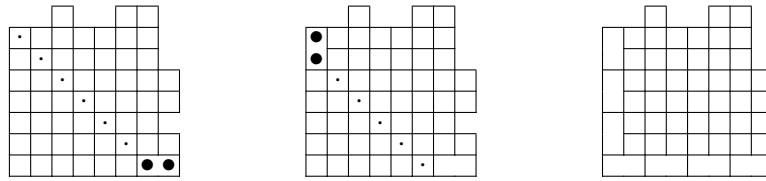


Рис. 14. Строим непарное замощение $(n+1)$ -детали

Вернёмся к решению задачи.

1) Проверим индукцией по n (размеру детали), что все замощения каждой правильной детали, кроме одного, разбиваются на хорошие пары. База тривиальна.

Переход $n \rightarrow n+1$. Возьмем правильную $(n+1)$ -деталь разобьем множество её замощений на хорошие пары. Для этого рассмотрим правый нижний и левый верхний углы $(n+1)$ -детали. Какая-то из этих двух клеток лежит внутри квадрата со стороной n , пусть для определённости это левый верхний угол. Запустим вправо-вниз из этой клетки лемму о полудиagonали. В силу этой леммы замощения, не содержащие доминошку, отмеченную на рис. 14 слева, разбиваются на хорошие пары. Рассмотрим замощения, содержащие эту доминошку. Запустим влево-вверх из клетки, прилегающей к ней слева, лемму о полудиagonали (рис. 14, в центре). По этой лемме замощения, не содержащие отмеченную доминошку в левом верхнем углу, тоже разбиваются на хорошие пары. Рассмотрим оставшиеся замощения, они содержат и эту доминошку. Далее запустим лемму о диагонали вправо-вниз из клетки, прилегающей к этой доминошке снизу и т.д. В результате этих применений леммы о диагонали, неразбитыми на пары останутся лишь замощения, содержащие домино вдоль левой и нижней стороны нашей $(n+1)$ -детали (рис. 14, справа). Эти замощения взаимно однозначно соответствуют замощениям оставшейся n -детали. Поэтому все они, кроме одного, разбиваются на хорошие пары.

2) Проверим индукцией по n , что замощения любой неправильной детали разбиваются на хорошие пары. База тривиальна.

Переход $n - 1 \rightarrow n$. Рассмотрим произвольную n -деталь. Обозначим некоторые клетки её квадрата $n \times n$ как показано на рис. 15.

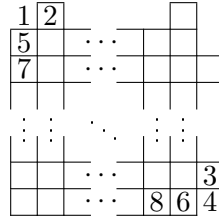


Рис. 15. Разметка клеток для неправильной детали

Рассмотрим случаи:

1) Клетки 1 и 4 не принадлежат детали. Тогда начнём строить диагональ из 5 в 6. По лемме о полудиagonали замощения разбиваются на пары (поскольку отмеченная доминошка не лежит в фигуре). Аналогично — если четыре клетки 1, 2, 3, 4 принадлежат детали.

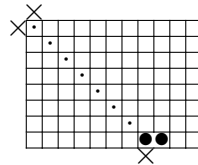
2) Клетка 1 принадлежит детали, а 4 не принадлежит. Или наоборот. Разберём первый вариант, второй аналогичен. Запустим рассуждение леммы о полудиagonали из 6 в 1. Как и в доказательстве предыдущего пункта теоремы, мы разобьём на пары все замощения, кроме тех, у которых расположение доминошек вдоль левого столбца и нижней строки фиксировано как на рис. 14 справа. Остальные замощения разбиваются на хорошие пары по индукционному предположению.

3) Клетки 1 и 4 принадлежат детали, а 2 и 3 — нет. Тогда любое замощение содержит доминошки 1 — 5 и 4 — 6. Вырежем их. По лемме о полудиagonали, запущенной из 7 в 8, замощения разбиваются на хорошие пары.

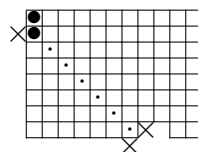
4) Клетки 1, 2, 4 принадлежат детали, а 3 — нет. Аналогично, когда 1, 3, 4 принадлежат, а 2 — нет. Очевидно, что в любом замощении присутствует домино 4 — 6. Вырежем его. Запустим лемму о полудиagonали из 8 в 7 и, действуя аналогично случаю 2, сведём вопрос к предположению индукции.

3.8. [4, теорема 1.2]. Проверим, что количество разбиений прямоугольника $m \times n$ на домино нечётно тогда и только тогда, когда числа $m + 1$ и $n + 1$ взаимно просты, причем в случае, когда количество разбиений чётно, все они разбиваются на хорошие пары, а если нечётно — все, кроме одного, разбиваются на хорошие пары. Тогда утверждение задачи будет следовать из задачи 3.6.

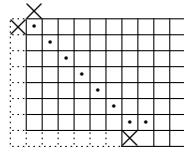
Индукция, реализующая алгоритм Евклида. Рассмотрим диагональный ряд клеток, выходящий из угла. По лемме о полудиagonали, достаточно ограничиться изучением чётности количества разбиений, содержащих отмеченную доминошку.



Теперь мы можем взять диагональный ряд клеток снизу от только что рассмотренного и, просматривая его снизу вверх, снова применить лемму о полудиagonали.



Продолжая опускать рассматриваемую диагональ, не изменяя чётности числа разбиений, мы сможем убрать все клетки первого столбца, а также все клетки нижней строки, лежащие левее отмеченной доминошки. После этого опять можно применить лемму о полудиagonали.



Продолжая дальше, мы уберем клетки второго столбца и второй строки (лежащие левее найденной доминошки). Действуя таким образом, мы уберем в конце концов из нашего прямоугольника $m \times n$ прямоугольную часть размера $(n+1) \times n$. Осталась часть $(m-n-1) \times n$, которая удовлетворяет предположению индукции.

4.1. Пусть \mathcal{D} обозначает множество всех орграфов со знаками D , полученных из слагаемых свёрхразложения (как описано перед условием задачи). Соответствующую перестановку обозначим π_D .

Разделим \mathcal{D} на три части следующим образом:

- \mathcal{T} , орграфы $D \in \mathcal{D}$ без направленных циклов;
- \mathcal{D}^+ , орграфы $D \in \mathcal{D}$ с $\text{sgn}(D) = +1$ и хотя бы одним направленным циклом;
- \mathcal{D}^- , орграфы $D \in \mathcal{D}$ с $\text{sgn}(D) = -1$ и хотя бы одним направленным циклом.

Дальнейший план доказательства таков. Мы покажем, что все $D \in \mathcal{T}$ — “ациклические объекты” — имеют положительный знак и взаимно однозначно соответствуют остовным деревьям графа G ; таким образом, их количество нам и нужно. Затем, построив подходящую биекцию, мы докажем, что $|\mathcal{D}^+| = |\mathcal{D}^-|$. Тогда

$$\det(L^-) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \text{sgn}(D) = |\mathcal{T}| + |\mathcal{D}^+| - |\mathcal{D}^-| = |\mathcal{T}|$$

и теорема доказана.

Чтобы осуществить этот план, вначале перечислим несколько простых свойств орграфов из \mathcal{D} .

- (i) Если $v_i v_j$ — направленное ребро в орграфе D , то $v_i v_j$ — ребро графа G . (Очевидно.)
- (ii) Из каждой вершины, кроме v_n , выходит ровно одно ребро, а из v_n ни одно ребро не выходит. (Очевидно.)
- (iii) Все рёбра, входящие в v_n , положительны. (Поскольку отрицательные ребра, входящие в произвольную вершину v_j , соответствуют элементам j -го столбца матрицы L , а при построении матрицы L^- столбец с номером n был вычеркнут.)
- (iv) В каждую вершину входит не более одного отрицательного ребра. (Поскольку два отрицательных входящих ребра $v_j v_i$ и $v_k v_i$ означали бы два обведённых элемента ℓ_{ji} и ℓ_{ki} в i -м столбце.)
- (v) Если в вершину v_i входит отрицательное ребро, то исходящее ребро также отрицательно. (Действительно, отрицательное входящее ребро $v_j v_i$ означает, что обведён недиагональный элемент ℓ_{ji} и потому не может быть обведена единица в диагональном элементе ℓ_{ii} — а это единственный способ получить положительное ребро, исходящее из v_i .)

У т в е р ж д е н и е А. Перечисленные свойства характеризуют \mathcal{D} . Иными словами, если орграф D со знаками удовлетворяет условиям (i)–(v), то $D \in \mathcal{D}$.

Докажем это. Для данного D найдём обведённый элемент в каждой строке i ($1 \leq i \leq n-1$) матрицы L^- . Рассмотрим единственное выходящее из него ребро $v_i v_j$. Если оно положительно, то обведём соответствующую единицу в элементе ℓ_{ii} , а если отрицательно, то обведём ℓ_{ij} . В одном столбце не может быть двух обведённых элементов, поскольку они

отвечали бы ситуациям, исключённым в силу условий (iv) и (v). (Если обведены два недиагональных элемента, то нарушается условие (iv), а если обведена единица, отвечающая элементу ℓ_{ii} , и недиагональный элемент ℓ_{ij} , то в вершину i входит отрицательное ребро, а исходит из неё положительное, что противоречит условию (v).)

Теперь применим (i)–(v), чтобы описать структуру графа D .

У т в е р ж д е н и е В . Каждый оргграф $D \in \mathcal{D}$ имеет следующую структуру (рис. 16).

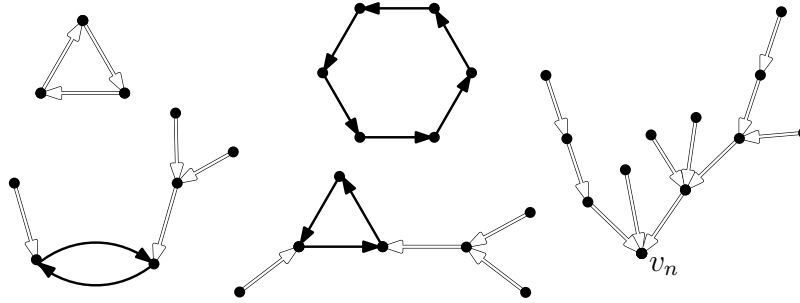


Рис. 16.

- (a) Множество вершин состоит из одного или более непересекающихся подмножеств V_1, V_2, \dots, V_k , отвечающих компонентам графа D , причём различные V_i не соединены рёбрами. Если подмножество V_1 содержит вершину v_n , то подграф с множеством вершин V_1 является деревом, все рёбра которого направлены в сторону v_n . Подграф с любым другим V_i в качестве множества вершин содержит ровно один направленный цикл длины не меньше 2 и для каждой его вершины — содержащее её дерево (возможно, пустое), рёбра которого направлены в сторону цикла.
- (b) Все рёбра, не принадлежащие направленным циклам, положительны, а в каждом направленном цикле либо все рёбра положительны, либо все рёбра отрицательны.
- (c) Обратно, любой оргграф D с такой структурой, удовлетворяющий условию (i), принадлежит \mathcal{D} .

Действительно, пункт (a) непосредственно вытекает из условия (ii) (единственность исходящего ребра для каждой вершины, кроме v_n): если добавить направленную петлю при вершине v_n , то у каждой вершины будет ровно одно исходящее ребро и мы получим так называемый *функциональный оргграф*, для которого структура, описанная в п. (a), хорошо известна.

Перейдём к п. (b). Если начать путь по графу с отрицательного ребра, то в силу условия (v) нам встретятся только отрицательные рёбра. Значит, мы не сможем достичь вершины n , поскольку входящие в неё рёбра положительны, и с какого-то момента начнём двигаться по отрицательному циклу. При этом отрицательное ребро не может войти извне в такой цикл в силу (iv).

Что касается п. (c), то для графа D со структурой, описанной в пп. (a) и (b), условия (ii)–(v) очевидно выполнены и можно применить утверждение А. Тем самым утверждение В доказано.

Теперь совсем легко завершить первую часть нашего плана.

Все $D \in \mathcal{T}$ имеют положительный знак. Они взаимно однозначно соответствуют остовным деревьям графа G .

Действительно, если $D \in \mathcal{D}$ не содержит направленных циклов, то D является деревом с положительными рёбрами, направленными в сторону вершины v_n . При этом перестановка π_D тождественная, поскольку все обведённые элементы в слагаемом, отвечающем графу D , лежат на диагонали матрицы L^- . Значит, $\text{sgn}(D) = +1$, и если забыть об ориентациях рёбер, то получится остовное дерево графа G . Обратно, если дано остовное дерево графа G , то можно ориентировать его рёбра в сторону v_n и получить оргграф $D \in \mathcal{T}$.

Осталось разобраться с “циклическими объектами”. Пусть $D \in \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$. Назовём *наименьшим циклом* направленный цикл, содержащий вершину с наименьшим номером (среди всех вершин в циклах). Пусть \bar{D} получается из D переменной знака всех рёбер в наименьшем цикле.

Очевидно, $\overline{\bar{D}} = D$, и при $D \in \mathcal{D}$ будет и $\bar{D} \in \mathcal{D}$, как можно видеть из утверждения В. Осталось показать, что отображение, переводящее D в \bar{D} , является биекцией между \mathcal{D}^+ и \mathcal{D}^- . Для этого докажем, что $\text{sgn}(\bar{D}) = -\text{sgn}(D)$.

Выполнено равенство $\text{sgn}(D) = \text{sgn}(\pi_D)(-1)^m$, где m — количество отрицательных рёбер в графе D , а π_D — ассоциированная перестановка.

Пусть i_1, i_2, \dots, i_s — вершины наименьшего цикла в D , занумерованные так, что направленные рёбра цикла имеют вид $v_{i_1}v_{i_2}, v_{i_2}v_{i_3}, \dots, v_{i_{s-1}}v_{i_s}, v_{i_s}v_{i_1}$.

В одном из графов D и \bar{D} наименьший цикл положителен, например в D (если он положителен в \bar{D} , рассуждение аналогично). Положительные рёбра отвечают диагональным элементам в L^- , поэтому i_j являются неподвижными точками перестановки π_D , т.е. $\pi_D(i_j) = i_j$, $j = 1, 2, \dots, s$. В графе \bar{D} наименьший цикл отрицателен, так что

$$\pi_{\bar{D}}(i_1) = i_2, \quad \dots, \quad \pi_{\bar{D}}(i_{s-1}) = i_s, \quad \pi_{\bar{D}}(i_s) = i_1,$$

т.е. вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ образуют *цикл* перестановки $\pi_{\bar{D}}$.

Теперь легко проверить, что $\pi_{\bar{D}}$ можно преобразовать в π_D посредством $s - 1$ транспозиций, “уничтожающих” цикл (i_1, i_2, \dots, i_s) . Поскольку каждая транспозиция меняет знак перестановки, получаем $\text{sgn}(\pi_{\bar{D}}) = (-1)^{s-1}\text{sgn}(\pi_D)$, откуда

$$\text{sgn}(\bar{D}) = \text{sgn}(\pi_{\bar{D}})(-1)^{m+s} = (-1)^{s-1}\text{sgn}(\pi_D)(-1)^{m+s} = -\text{sgn}(D).$$

Этим завершается доказательство теоремы.

4.2. а) Рассмотрим граф \bar{G} , в котором $V(\bar{G}) = V(G) \cup \{w\}$, $E(\bar{G}) = E(G) \cup \{v_i w\}$. Обозначим матрицу Лапласа графа \bar{G} через \bar{L} . Нетрудно понять, что $\bar{L}^- = L + E_{i,i}$ (поэлементно). При этом количества остовных деревьев графов G и \bar{G} совпадают. Следовательно, по матричной теореме о деревьях, количество остовных деревьев графов G и \bar{G} равняется $\det \bar{L}^- = \det(L + E_{i,i})$, что и требовалось доказать.

б) $\det(L + E_{i,j}) - \det(L + E_{i,i}) = \det M$; $M = (m_{kn})$, где

$$m_{kn} = \begin{cases} \ell_{kn} & \text{при } k \neq i; \\ -1, & \text{если } k = i \text{ и } n = j; \\ 1, & \text{если } k = i \text{ и } n = i; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что сумма элементов каждой строки матрицы M равна 0, и по задаче 2.3 $\det M = 0$. Следовательно, $\det(L + E_{i,j}) = \det(L + E_{i,i})$, и из предыдущего пункта следует требуемое.

4.3. С легким переприподвывертом это утверждение сразу получается, если действовать аналогично решению задачи 2.3.а).

4.4. Это утверждение, к тому же в версии с весами, доказано в решении задачи 2.3.б).

4.5. Это задача по линейной алгебре. Изящное решение можно прочесть, например, в книжке Д. Карпова “Теория графов” (лежит в сети).

4.6. Для полного графа матрица L^- — это матрица $(n - 1) \times (n - 1)$, имеющая вид

$$L^- = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся матричной теоремой о деревьях и подсчитаем её определитель.

$$\det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} = n^{n-2}.$$

Здесь в первом равенстве мы прибавили строчки с номерами от 2 до $n-1$ к первой, от чего определитель не изменится. Во втором равенстве мы, наоборот, прибавили первую строчку ко всем остальным. Наконец, третье равенство следует из того, что среди одновалентных графов ненулевой вес имеет только граф, состоящий из $n-1$ петли.

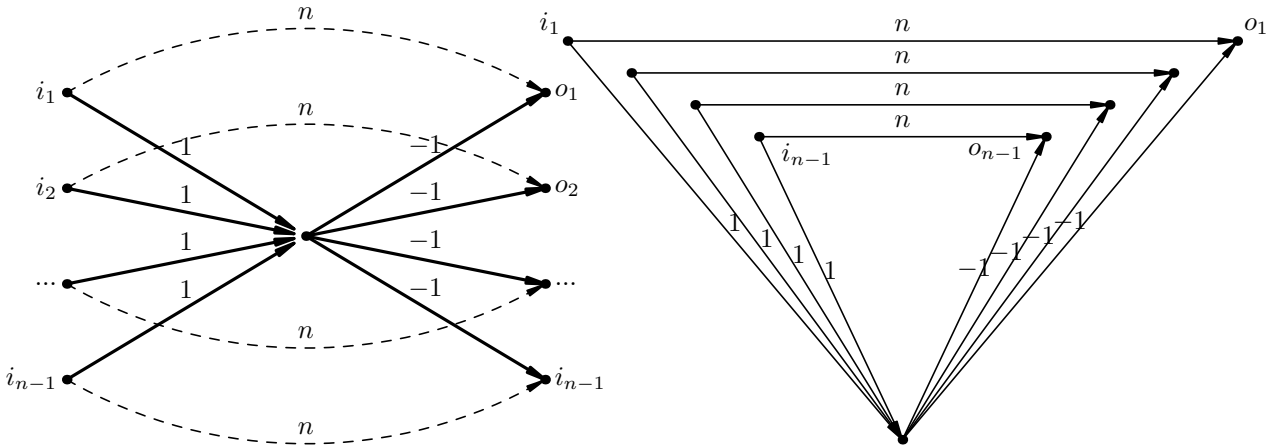


Рис. 17.

Дадим, однако, более комбинаторное рассуждение, воспользовавшись обобщением утверждения задачи 6.6 b).

Весовая версия задачи 6.6 b). Пусть дан граф, удовлетворяющий условию задачи 6.6 a). Пусть на каждом ребре графа написано действительное число, которое называется весом ребра. Весом пути называется произведение весов рёбер, входящих в этот путь, а весом набора из n путей называется произведение весов всех путей из набора, умноженное на $(-1)^{|\pi|}$, где π — перестановка, которую задает этот набор путей. Обозначим через a_{ij} сумму весов всех путей из i -го входа в j -й выход. Тогда определитель матрицы $(a_{i,j})$ равняется сумме весов всех наборов из n непересекающихся путей.

Доказательство аналогично доказательству 6.6 b).

Итак, мы хотим найти определитель матрицы L^- . Посмотрим на граф на рис. 17, он имеет по $n-1$ входов и выходов, а также одну промежуточную вершину. Заметим, что количество путей из i -го входа в j -й выход как раз равняется ℓ_{ij} . Следовательно, по весовой версии задачи 6.6 b), $\det L^-$ равен сумме весов наборов из n непересекающихся путей. При этом имеется один набор из n путей веса n^{n-1} , где i -й вход непосредственно соединен с i -м выходом, и $n-1$ наборов веса $-n^{n-2}$. Таким образом, суммарный вес наборов из n непересекающихся путей равен

$$n^{n-1} - (n-1) \cdot n^{n-2} = n^{n-2}.$$

4.7. Воспользуемся матричной теоремой о деревьях. Здесь матрица Лапласа выглядит как

$$L = \left(\begin{array}{cccccc} k & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & \ell & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & \ell \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \vphantom{L} \\ \vphantom{L} \\ \vphantom{L} \\ \vphantom{L} \\ \vphantom{L} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ell \text{ строк} \\ \\ \\ k \text{ строк} \end{array}$$

Мы найдем определитель матрицы $M = L_{\ell, \ell+1}$ (обозначение из задачи 2.1 e). По задаче 2.3.b) $\det L^- = -\det M$.

$$M = \left(\begin{array}{cccccc} k & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k & 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & \ell & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & \dots & \ell \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ell - 1 \text{ строк} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} k - 1 \text{ строк}$$

Приведем два комбинаторных подсчёта определителя матрицы M .

Первый способ подсчёта определителя аналогичен подсчёту определителя в задаче 4.6. А именно, посмотрим на картинку рис. 18 слева. Нетрудно проверить, что сумма весов путей из i -го входа в j -й выход равна m_{ij} . Таким образом, по весовой версии задачи 6.6 b), $\det M$ равен сумме весов наборов n непересекающихся путей. Нетрудно понять, что такой набор ровно один, и его вес равен $-k^{\ell-1} \ell^{k-1}$, что завершает подсчёт.

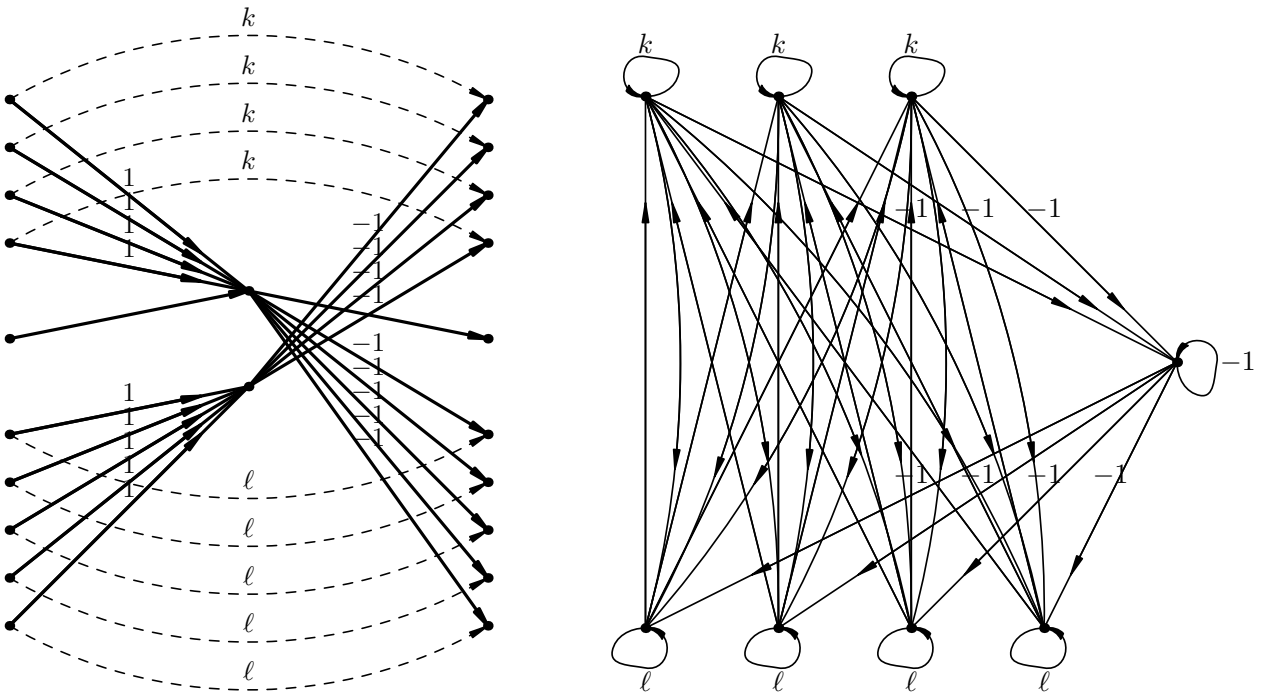
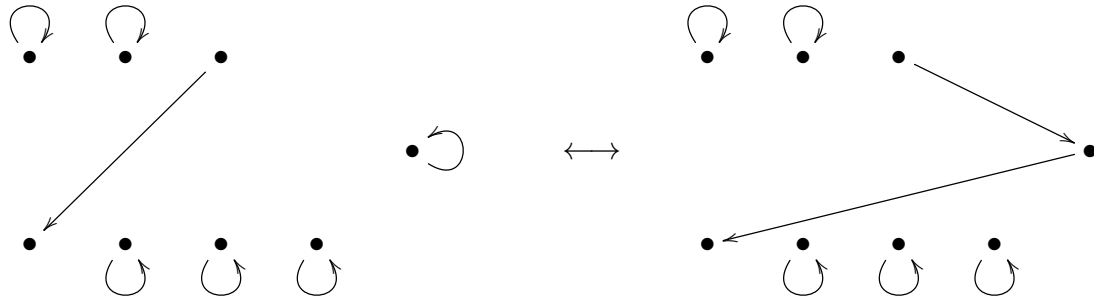


Рис. 18.

Второй способ подсчёта использует определение определителя через одновалентные графы. На рис. 18 справа изображен граф, одновалентные подграфы которого и пересчитывает $\det M$. В этом графе сверху изображены $\ell - 1$ вершина первой доли, снизу $k - 1$ вершина второй доли, а также одна особая вершина справа.

Во-первых, разобьем на пары одновалентные графы, которые содержат хотя бы 2 ребра, идущих из второй доли в первую. А именно, среди всех рёбер, идущих из второй доли в первую, выберем два, концы которых имеют наименьшие номера, и поменяем местами концы этих рёбер. Тогда перестановка сменит чётность. Нетрудно понять, что это соответствие биективно на заданном множестве, следовательно, все соответствующие графы сократятся.

Во-вторых, разобьем на пары одновалентные графы, содержащие ровно одно ребро, идущее из второй доли в первую. Раз имеется ровно одно ребро, выходящее из второй доли, то имеется и ровно одно ребро, входящее во вторую долю, либо двузвенный путь через особую вершину. Тогда в зависимости от того, откуда ведет это ребро, и выполним перестройку:



Итак, остались одновалентные графы, в которых во вторую долю не ведёт ни одного ребра. Нетрудно понять, что единственный граф, обладающий этим свойством, — граф, состоящий из всех петель. Вес этого графа, а следовательно и $\det M$, равен $-k^{l-1}l^{k-1}$.

4.8. Воспользуемся матричной теоремой о деревьях. Распишем $\det L^-$ по комбинаторному определению через одновалентные графы. Если в одновалентном графе есть хотя бы одна петля, то соответствующий одновалентный граф имеет чётный вес. Иначе, так как число вершин в одновалентном графе нечётно, найдётся цикл длины хотя бы 3. Следовательно, если изменить направление всех стрелок, то получится другой одновалентный граф такого же веса. Итак, мы разбили некоторые одновалентные графы на пары равного веса, про остальные поняли, что они дают чётный вклад. Из этого мгновенно следует, что соответствующий определитель чётен.

5.1. Из формулы определителя следует, что если G не имеет совершенного паросочетания, то $\det \tilde{B}$ — тождественный нуль.

Чтобы показать обратное, зафиксируем перестановку π , которая задаёт совершенное паросочетание, и дадим переменным в $\det \tilde{B}$ следующие значения: $x_{i,\pi(i)} := 1$ при $i = 1, 2, \dots, n$, а все остальные x_{ij} равны 0. Тогда $\text{sgn}(\pi) \cdot x_{1,\pi(1)}x_{2,\pi(2)} \cdots x_{n,\pi(n)} = \pm 1$.

Для каждой другой перестановки $\sigma \neq \pi$ найдётся i , для которого $\sigma(i) \neq \pi(i)$, поэтому $x_{i,\sigma(i)} = 0$, так что все остальные слагаемые в разложении $\det \tilde{B}$ равны 0. Таким образом, для данного выбора x_{ij} мы получаем $\det \tilde{B} = \pm 1$. Утверждение доказано.

5.2. Проведём индукцию по m . Случай одной переменной очевиден, так как по общеизвестной алгебраической теореме $p(x_1)$ имеет не более d корней. (Это доказывается индукцией по d : если $p(\alpha) = 0$, то можно разделить $p(x)$ на $x - \alpha$, понизив степень.)

Пусть $m > 1$. Предположим, что x_1 появляется с ненулевым коэффициентом хотя бы в одном слагаемом из $p(x_1, \dots, x_m)$ (в противном случае перенумеруем переменные). Запишем $p(x_1, \dots, x_m)$ как многочлен от x_1 , коэффициенты которого — многочлены от x_2, \dots, x_m :

$$p(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^k x_1^i p_i(x_2, \dots, x_m),$$

где k — наибольший показатель при x_1 в $p(x_1, \dots, x_m)$.

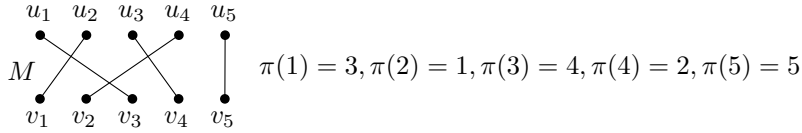
Наборы вида (r_1, \dots, r_m) , где $p(r_1, \dots, r_m) = 0$, мы разделим на два класса. Обозначим первый класс R_1 и включим в него наборы, для которых $p_k(r_2, \dots, r_m) = 0$. Поскольку многочлен $p_k(x_2, \dots, x_m)$ не равен тождественно нулю и имеет степень не выше $d - k$, количество вариантов для (r_2, \dots, r_m) по предположению индукции не превосходит $(d - k)|S|^{m-2}$, и потому $|R_1| \leq (d - k)|S|^{m-1}$.

Другой класс R_2 состоит из остальных наборов, т. е. тех, для которых $p(r_1, r_2, \dots, r_m) = 0$, но $p_k(r_2, \dots, r_m) \neq 0$. Их мы подсчитаем так: значения переменных от r_2 до r_m можно выбрать не более чем $|S|^{m-1}$ способами, и если зафиксированы r_2, \dots, r_m , для которых $p_k(r_2, \dots, r_m) \neq 0$, то r_1 должно быть корнем многочлена от одной переменной $q(x_1) = p(x_1, r_2, \dots, r_m)$. Этот многочлен имеет степень (ровно) k , поэтому у него не больше k корней. Значит, второй класс содержит не более $k|S|^{m-1}$ наборов, и потому общее количество наборов не превосходит $d|S|^{m-1}$. На этом шаг индукции закончен, а с ним и доказательство теоремы Шварца — Зиппеля.

5.3. Предположим, что G имеет совершенное паросочетание и, значит, $\det \tilde{B}$ — ненулевой многочлен степени n . Согласно теореме Шварца — Зиппеля, если вычислить $\det \tilde{B}$ для значений переменных x_{ij} , независимо выбранных случайным образом из множества $S := \{1, 2, \dots, 2n\}$, то вероятность получить 0 не превосходит $\frac{1}{2}$.

Как обычно, вероятность неудачи можно понизить до 2^{-k} , повторяя алгоритм k раз.

6.1. Пусть S_n обозначает множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Каждое совершенное паросочетание M в графе G соответствует однозначно определённой перестановке $\pi \in S_n$, где $\pi(i)$ — тот индекс j , для которого ребро $u_i v_j$ лежит в M . Пример показан на рисунке.

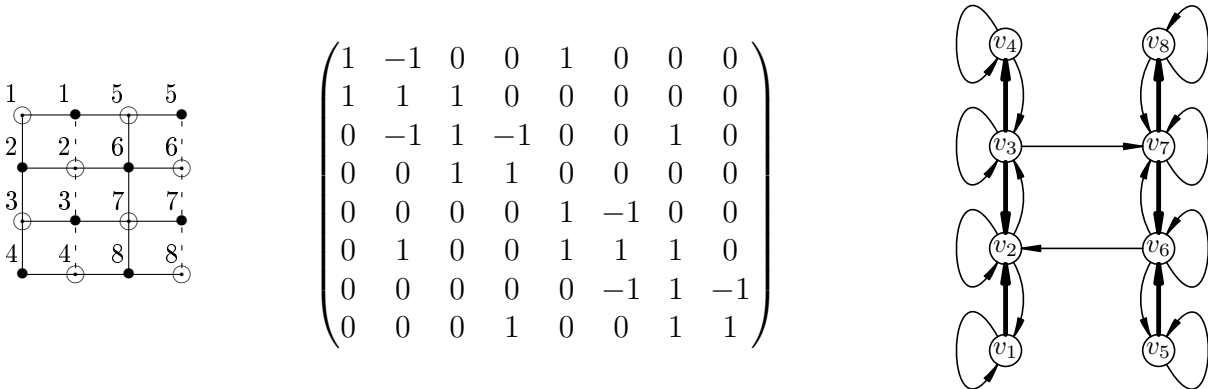


Обратно: когда в G существует совершенное паросочетание, соответствующее данной перестановке $\pi \in S_n$? В точности тогда, когда $b_{1,\pi(1)} = b_{2,\pi(2)} = \dots = b_{n,\pi(n)} = 1$. Следовательно, количество совершенных паросочетаний в G равно

$$\sum_{\pi \in S_n} b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \dots b_{n,\pi(n)},$$

а это и есть перманент матрицы B .

6.2. Конечно, задача решается подсчётом определителя, но только не в нашем проекте! Пронумеруем вершины долей, выпишем двудольную матрицу смежности (черные вершины соответствуют столбцам, белые — строкам) и нарисуем граф, для которого эта матрица является обычной матрицей смежности:



Ребра, имеющие вес -1 , нарисованы жирными стрелками. Осталось проверить, что любой чётный цикл любого одновалентного подграфа этого графа содержит нечётное число отрицательных рёбер (а нечётных циклов, кроме петель, здесь нет). Для этого графа это очевидно.

6.3. Пусть зафиксирована расстановка знаков σ из условия леммы, и пусть M — совершенное паросочетание в графе G , отвечающее перестановке π . В качестве его знака возьмём знак соответствующего слагаемого в $\det(B^\sigma)$; в явном виде:

$$\text{sgn}(M) := \text{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)}^\sigma b_{2,\pi(2)}^\sigma \dots b_{n,\pi(n)}^\sigma = \text{sgn}(\pi) \prod_{e \in M} \sigma(e).$$

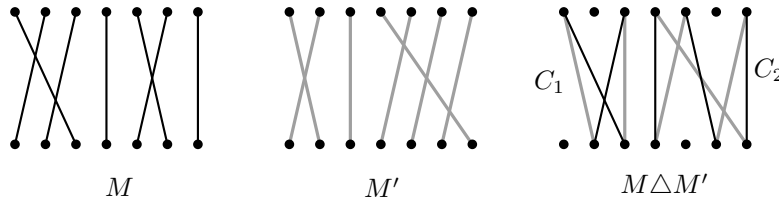
Легко видеть, что расстановка знаков σ будет кастелейновой тогда (и только тогда), когда все совершенные паросочетания в графе G имеют одинаковый знак.

Пусть M и M' — два совершенных паросочетания в графе G , а π и π' — соответствующие перестановки. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(M)\operatorname{sgn}(M') &= \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi') \left(\prod_{e \in M} \sigma(e) \right) \left(\prod_{e \in M'} \sigma(e) \right) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi') \prod_{e \in M \Delta M'} \sigma(e), \end{aligned}$$

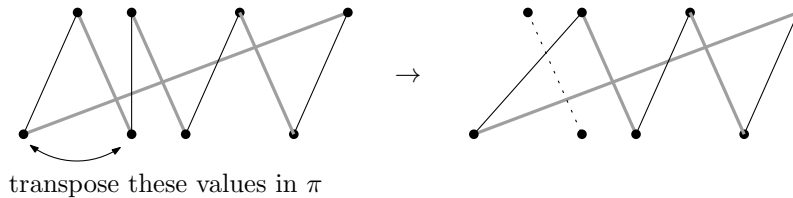
где Δ обозначает симметрическую разность.

Симметрическая разность $M \Delta M'$ является дизъюнктивным объединением удачно размещённых циклов, как видно из рисунка.



Пусть C_1, C_2, \dots, C_k — эти циклы, причём длина C_i равна $2\ell_i$. Поскольку C_i удачно размещён, он согласно условию леммы правильно помечен, откуда $\prod_{e \in C_i} \sigma(e) = (-1)^{\ell_i - 1}$. Таким образом, $\prod_{e \in M \Delta M'} \sigma(e) = (-1)^t$, где $t = \ell_1 - 1 + \ell_2 - 1 + \dots + \ell_k - 1$.

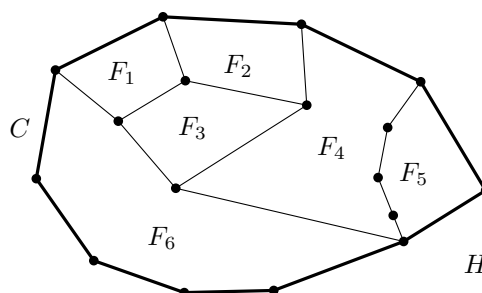
Осталось проверить, что π можно преобразовать в π' за t транспозиций (тогда в силу свойств знака перестановки $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^t \operatorname{sgn}(\pi')$, откуда $\operatorname{sgn}(M) = \operatorname{sgn}(M')$, что и требуется). Это можно проделать по очереди для каждого цикла C_i . Как показано на рисунке для цикла длины $2\ell_i = 8$, применив к π подходящую транспозицию, можно “вычеркнуть” из цикла два ребра и перейти к циклу длины $2\ell_i - 2$ (чёрные рёбра принадлежат множеству M , серые — множеству M' , а пунктирное ребро на правом рисунке принадлежит теперь обоим множествам).



Выполнив $\ell_i - 1$ таких шагов, мы вычеркнем C_i и можем перейти к следующему циклу. В итоге хватит t шагов.

6.4. Пусть C — удачно размещённый цикл в графе G ; согласно задаче 6.3 нужно доказать, что он правильно помечен.

Пусть длина цикла C равна 2ℓ ; F_1, \dots, F_k — внутренние области, расположенные внутри C ; C_i ($i = 1, \dots, k$) — граничный цикл области F_i , имеющий длину $2\ell_i$; H — подграф в G , полученный удалением всех вершин и рёбер, начерченных вне C ; иначе говоря, H — объединение всех C_i .



Нужно понять, как чётность числа ℓ связана с чётностями ℓ_i . Количество вершин в H равно $r + 2\ell$, где r — количество вершин, лежащих внутри C . Каждое ребро в H принадлежит ровно двум циклам из C, C_1, \dots, C_k , так что количество рёбер в H равно $\ell + \ell_1 + \dots + \ell_k$. Наконец, изображение графа H содержит $k + 1$ областей: F_1, \dots, F_k и одну внешнюю.

Применим теперь формулу Эйлера, согласно которой на любом изображении связного планарного графа количество вершин плюс количество областей равно количеству рёбер плюс 2. Значит,

$$r + 2\ell + k + 1 = \ell + \ell_1 + \dots + \ell_k + 2. \quad (12)$$

Теперь используем условие, что C удачно размещён. Поскольку граф, полученный удалением из G этого цикла и всех смежных с C рёбер, обладает совершенным паросочетанием, количество r вершин внутри C должно быть чётным. Поэтому из (12) вытекает

$$\ell - 1 \equiv \ell_1 + \dots + \ell_k - k \pmod{2}. \quad (13)$$

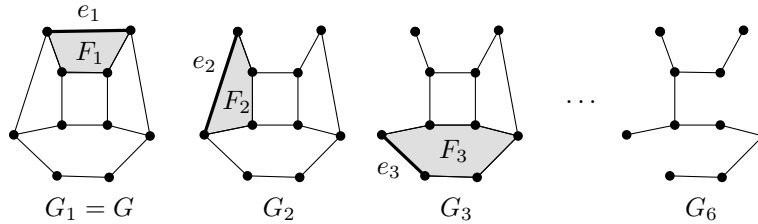
Пусть n_C — количество отрицательных рёбер в C , и аналогично определим n_{C_i} . Сумма $n_C + n_{C_1} + \dots + n_{C_k}$ чётна, поскольку в неё включены по два раза все отрицательные рёбра, т.е.

$$n_C \equiv n_{C_1} + \dots + n_{C_k} \pmod{2}. \quad (14)$$

Наконец, $n_{C_i} \equiv \ell_i - 1 \pmod{2}$, поскольку циклы C_i правильно помечены. Соединив это с (13) и (14), получаем $n_C \equiv \ell - 1 \pmod{2}$. Значит, C правильно помечен, что и требовалось.

6.5. Пусть дан связный двусвязный планарный двудольный граф G . Зафиксируем некоторое его изображение на плоскости. Мы хотим построить расстановку знаков как в задаче 6.4, т.е. чтобы граница каждой внутренней области была правильно помечена.

Сначала займёмся удалением рёбер из G , как показано на рисунке.



Положим $G_1 := G$, и пусть G_{i+1} получается из G_i удалением ребра e_i , отделяющего внутреннюю область F_i от внешней (неограниченной) области (в данном изображении). Процесс останавливается на некотором G_k , не имеющем такого ребра. Изображение G_k тогда имеет лишь внешнюю область.

Теперь на рёбрах графа G_k произвольно расставим знаки. Продолжим эту расстановку на все рёбра графа G обратным ходом, расставляя знаки на рёбрах $e_{k-1}, e_{k-2}, \dots, e_1$ в таком порядке. Каждое e_i содержится в границе ровно одной внутренней области F_i в изображении графа G_i , поэтому можно выбрать $\sigma(e_i)$ так, чтобы граница области F_i была правильно помечена. Теорема доказана.

6.6. Мы взяли эту задачу в [7].

а) Утверждение очевидно. Выбрав перестановку π , мы для каждого входа i определяем, к какому выходу $\pi(i)$ должен идти маршрут, при этом число способов выбрать маршрут равно $a_{i\pi_i}$. Тогда произведение $a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \dots a_{n\pi_n}$ равно количеству способов выбрать набор. Суммируя по всем π , получаем общее число наборов.

б) Как и в рассуждении в п. а), произведение $a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \dots a_{n\pi_n}$ равно количеству способов выбрать набор маршрутов. Наборы непересекающихся маршрутов учитываются лишь в произведении, заданном тождественной перестановкой, и в сумме, задающей определитель, это произведение засчитывается со знаком плюс. Остаётся проверить, что наборы пересекающихся маршрутов можно разбить на пары, засчитываемые с разными знаками, — тогда все они в этой сумме сократятся.

Припишем каждому пути номер, равный номеру входа, в котором он начинается. Для каждого набора из n пересекающихся путей, заданного перестановкой π , обозначим через i наименьший из номеров путей, которые пересекаются с другими путями. Обозначим через O первую точку пересечения i -го пути с каким-то другим путём, пусть это будет j -й путь.

Поменяем местами фрагменты i -го и j -го путей после точки O , полученный набор путей поставим в пару рассматриваемому набору. Перестановка, которая описывает полученный набор, отличается от исходной транспозицией (π_i, π_j) и поэтому имеет противоположный знак.

В приведенном рассуждении мы не использовали, что граф плоский, нам было существенно лишь, что он неперестановочный, т.е. в наборе из n непересекающихся путей у каждого пути номер выхода необходимо равен номеру входа.

6.7. а) Мы взяли эту задачу в [3]. Пусть A_{mn} — количество путей хромого короля из угла прямоугольника $m \times n$ в противоположный угол. Тогда

$$A_{n-1, n-1} = 2A_{n-2, n-1} + A_{n-2, n-2}$$

(чтобы убедиться в этом, рассмотрите три возможности первого хода короля). Аналогично,

$$B_n = A_{n-2, n-2} + A_{n-1, n-1} + 2A_{n-1, n-2}$$

(рассмотрим четыре варианта комбинации первого и последнего ходов). Подставляя первое равенство во второе, получаем требуемое.

Приведем рассуждение, дающее биективное доказательство требуемого равенства, родственное написанному выше формальному доказательству.

Величина B_n — это количество путей, ведущих из клетки a доски $n \times n$ в клетку b и не заходящих в клетки, отмеченные крестиками, и в клетку c . Число $2A_{n-1}$ — это количество путей, ведущих из клетки p в клетку e , плюс количество путей, ведущих из клетки q в клетку b . Взаимно однозначное соответствие между множествами таких путей устроено следующим образом. Рас-

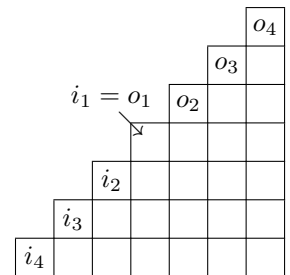
×	×	×	×	×	c	b
×					d	e
×						
×						
×						
×	q					
a	p					

смотрим произвольный путь хромого короля из p в e . Дополняя его шагами $a-p$ и $e-b$, получаем путь из a в b , не заходящий в запрещенные клетки. При этом первый шаг в полученном пути — горизонтальный, а последний шаг — вертикальный. Теперь рассмотрим произвольный путь хромого короля из q в b . Если он не проходит через клетку c , дополним его шагом $a-q$. Получится путь из a в b , не заходящий в запрещённые клетки, в котором первый шаг — диагональный, а последний шаг — диагональный или вертикальный. Если же этот путь проходит через клетку c , удалим из него шаг $c-b$, опустим полученный в результате путь $q-c$ на одну клетку вниз (получится путь из p в d) и достроим этот путь шагами $a-p$, $d-b$ до пути из a в b . В полученном пути первый шаг — горизонтальный, а последний — диагональный. То, что построенное соответствие является взаимно однозначным, очевидно.

б) Мы взяли это утверждение в [5, лемма 5.1]. Рассмотрим матрицу $B^{(n)} = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, где $B_{i,j}$ — количество маршрутов хромого короля на доске $i \times j$, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний, не заходящих в левую вертикаль и в верхнюю горизонталь (кроме начальной и конечной позиции). Аналогично утверждению предыдущего пункта доказывает-

ся, что $B^{(n)} = 2A^{(n)}$. По утверждению задачи 6.6, определители $\det A^{(n)}$ и $\det B^{(n)}$ подсчитывают одно и то же количество наборов маршрутов. Таким образом, $\det A^{(n)} = 2^n \det A^{(n-1)}$, откуда $\det A^{(n)} = 2^{n(n+1)/2}$.

6.8. Ответ: 1. Мы взяли эту задачу в [7]. Рассмотрим входы и выходы, указанные на рисунке. Количества путей от входов к выходам — это как раз числа Каталана. Тогда $\det H$ вычисляет количество наборов непересекающихся маршрутов от входов к выходам. Очевидно, что такой набор маршрутов единственен.



7.1. Распишем $\det A_G$ по комбинаторному определению через одновалентные графы. Так как в G нет циклов, то одновалентный граф входит с ненулевым весом только если в одновалентном графе все циклы длины 2, что соответствует совершенному паросочетанию G .

Из того, что в дереве существует не более одного совершенного паросочетания, и следует требуемое утверждение.

7.2. Распишем $\det \tilde{A}_G$ по комбинаторному определению через одновалентные графы. Так как в G нет циклов, то одновалентный граф входит с ненулевым весом только если в одновалентном графе нет циклов длины 3 и больше. Тогда одновалентные графы, состоящие из k кратных рёбер и $n - 2k$ петель, войдут с весом $(-1)^k x^{n-2k}$. Теперь видно, что многочлены $\chi G(x)$ и $m_G(x)$ перечисляют одни и те же комбинаторные объекты с соответствующими весами, так что эти многочлены совпадают.

Список литературы

- [1] *Аксенов В. Е., Кохась К. П.* Разбиения на домино и определители // Записки научн. семин. ПОМИ. 2013. Т 421. С. 5–18.
- [2] *Аксенов В. Е., Кохась К. П.* Удаление чипов. Urban Renewal revisited // Записки научн. семин. ПОМИ. 2015. Т 432. С. 5–29.
- [3] *Иванов С. В., Кохась К. П., Храбров А. И. и др.* Петербургские олимпиады школьников по математике. Задача 05.58. СПб: Невский диалект, 2007.
- [4] *Кохась К. П.* Разбиения на домино // Мат. просвещение. Третья серия. 2005. Вып. 9. С. 143–163.
- [5] *Кохась К. П.* Разбиения ацтекских алмазов и квадратов на домино // Записки научн. семин. ПОМИ. 2008. Т 360. С. 180–230.
- [6] *Кохась К. П.* Дележ денег в тайном обществе. В сб. *Берлов С. Л., Петров Ф. В., Смирнов А. В. и др.* Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. СПб: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2011. С. 81–103.
- [7] *Benjamin A. T., Cameron N. T.* Counting on determinants // American Mathematical Monthly. 2005. Vol. 112. № 6. P. 481–492.
- [8] *Brualdi R. A., Cvetković D.* A combinatorial approach to matrix theory and its applications. Taylor & Francis Group. 2009. P. 63–96.
- [9] *Matoušek J.* Thirty-three Miniatures. Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra. Providence: AMS. 2010. P. 77–83, 107–111.