Об инверсных образах точки Фейербаха, полюсах треугольника и теореме Куланина

П. В. Бибиков, М. И. Бидва, В. Д. Попов, А. А. Шевцов
Проект представляют А. А. Заславский, О. А. Заславский, П. А. Кожевников, И. И. Фролов

Введение

Точка Фейербаха является одной из наиболее известных замечательных точек треугольника. Она определяется как точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера. Соответствующую теорему доказал Карл Вильгельм Фейербах в 1822 году. С тех пор было придумано свыше 300 других доказательств этой теоремы, причем многие из них используют инверсию. Многочисленность таких доказательств свидетельствует о том, что при изучении геометрических свойств точки Фейербаха инверсия является довольно полезным инструментом. В первой части проекта мы предлагаем новый способ изучения точки Фейербаха, основанный на рассмотрении ее инверсных образов относительно некоторых окружностей. Этот подход позволит нам не только получить ряд новых красивых результатов, но и значительно упростить доказательства некоторых уже известных фактов.

Во второй части проекта будет предложен способ обобщить многие утверждения, полученные в первой части, на более общие конфигурации. Грубо говоря, мы утверждаем, что многие свойства точки Фейербаха являются лишь *частными случаями* значительно более общих теорем, связанных с совершенно иными конструкциями, ранее особо не привлекавшимися для ее исследования. Стартуя с одного красивого утверждения (так называемой теоремы Куланина), мы последовательно построим теорию, обобщающую различные свойства точки Фейербаха.

Техника, требующаяся для решения задач данного проекта, весьма разнообразна, поэтому от решателей предполагается знакомство со следующими методами и конструкциями:

- инверсия и ее свойства;
- полюсы и поляры, гармонические четверки;
- линейные движения точек;
- сведения о кривых второго порядка (необязательно);
- комплексные числа (необязательно).

Также зафиксируем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всего проекта.

- A, B, C — вершины треугольника;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- L_a, L_b, L_c — основания биссектрис треугольника ABC, проведенных из вершин A, B, C соответственно;

- ω — вписанная окружность треугольника ABC с центром I;
- G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB;
- G'_a, G'_b, G'_c — точки касания вневписанных окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB;
- K_a, K_b, K_c — точки, симметричные точкам G_a, G_b, G_c относительно прямых AI, BI, CI соответственно;
- λ_a — окружность, построенная на стороне BC как на диаметре;
- S_{ab}, S_{ac} — точки Шарыгина, т.е. точки пересечения окружности λ_a со средними линиями M_aM_b и M_aM_c соответственно;
- ε, ε_a — окружности девяти точек треугольника ABC и треугольника IBC соответственно;
- F — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек треугольника ABC (точка Фейербаха).

0. Вспомогательные факты

Задачи этого раздела содержат достаточно известные факты, и сдавать их необязательно. Тем не менее, если какие-то из задач вам неизвестны, рекомендуем их решить. Это поможет вам при решении последующих задач проекта.

0.1 (Окружность Эйлера) Докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.

0.2 (Прямая Эйлера) Докажите, что центр E этой окружности, точки O, H и M лежат на одной прямой, причем $HE : EM : MO = 3 : 1 : 2$.

0.3 (Точка Микеля) Рассмотрим четыре прямые общего положения, которые образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников проходят через одну точку.

0.4 Докажите, что прямая Эйлера треугольника $G_aG_bG_c$ проходит через точку O.

0.5 (Прямая Симсона) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки, лежащей на описанной окружности Ω треугольника ABC, на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой.

0.6 Докажите, что прямая Симсона точки P делит отрезок PH пополам.

0.7 (Изогональное сопряжение) Рассмотрим треугольник ABC и точку P, отличную от его вершин. Докажите, что прямые, симметричные прямым AP, BP и CP относительно биссектрис AI, BI, CI соответственно, пересекаются в одной точке P'.

0.8 Докажите, следующие свойства изогонального сопряжения:

- точки O и H изогонально сопряжены;

- педальные окружности (т.е. окружности, проходящие через основания перпендикуляров, опущенных из данных точек на стороны треугольника) изогонально сопряженных точек P и P' совпадают, причем центр этой окружности лежит в середине отрезка PP';
- точки, изогонально сопряженные точкам описанной окружности, являются бесконечно удаленными, причем они лежат в направлениях, перпендиклярных прямой Симсона данной точки;
- точка A изогонально сопряжена точкам прямой BC, отличным от B и C.

0.9 Докажите, что если точки P и Q изогонально сопряжены, а точки P_b, P_c, Q_b, Q_c — их проекции на стороны AC и AB соответственно, то прямые P_bQ_c, P_cQ_b и PQ пересекаются в одной точке.

0.10 Докажите, что коника, проходящая через точки A, B, C и H, является равнобокой гиперболой.

0.11 Докажите, что изогональный образ прямой является коникой.

1. Теорема Фейербаха

1.1 (Задача 255) Докажите, что тройки прямых (G_bG_c, BI, M_aM_b) и (G_bG_c, CI, M_aM_c) пересекаются в точках S_{ab} и S_{ac}. Эти точки лежат на окружности λ_a, построенной на стороне BC как на диаметре

1.2 Докажите, что угол между прямой BC и окружностью Эйлера ε равен $|\angle B - \angle C|$.

1.3 Докажите, что четверка точек (H_a, L_a, G_a, G'_a) образует гармоническую четверку.

1.4 Докажите теорему Фейербаха, т.е. факт касания вписанной окружности ω и окружности Эйлера ε

1.5 Обобщите доказательство из предыдущей задачи на случай вневписанных окружностей. Докажите, что треугольник с вершинами в точках касания окружности Эйлера с вневписанными окружностями перспективен треугольнику $L_aL_bL_c$ с центром в точке F.

1.6 (*) Найдите другие замечательные окружности, касающиеся окружности Эйлера. Какими интересными свойствами обладают точки касания?

1.7 Докажите, что прямая FG_a является биссектрисой угла $\angle H_aFM_a$.

1.8 Докажите, что для произвольного четырехвершинника (т.е. четверки точек общего положения, соединенными прямыми) окружности Эйлера возникающих треугольников с вершинами в вершинах четырехсторонника пересекаются в одной точке (точке Понселе).

1.9 Пусть P — произвольная точка, отличная от O и H. Докажите, что педальная окружность точки P проходит через точку Понселе четырехсторонника $ABCP$.

1.10 Докажите, что треугольник $K_aK_bK_c$ гомотетичен треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке F

1.11 Докажите, что точка F лежит на окружности Эйлера ε_a треугольника BIC

1.12 Пусть $\widetilde{G}_a$ — точка, диаметрально противоположная точке G_a относительно вписанной окружности ω. Докажите, что прямая $F\widetilde{G}_a$ пересекает отрезок AI в его середине

2. Инверсные образы точки Фейербаха

Теперь перейдем к содержательной части программы, которая, наконец, будет использовать инверсию. Рассмотрим уже знакомую нам окружность λ_a, построенную на отрезке BC как на диаметре. Рассмотрим точку F'_a — образ точки F при инверсии относительно окружности λ_a. Точка F'_a будет основным объектом наших дальнейших рассуждений в этом разделе.

Также в этой серии задач будут активно использоваться точки K_a, K_b и K_c, симметричные точкам G_a, G_b и G_c относительно биссектрис соответствующих углов.

2.1 Докажите, что точка F'_a является радикальным центром окружностей λ_a, ε и ε_a

2.2 Пусть K'_b и K'_c — точки пересечения лучей K_aK_b и K_aK_c с прямой H_bH_c. Докажите, что пятерки точек $(F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab})$ и $(F, F'_a, K_c, K'_c, S_{ac})$ лежат на окружностях ψ_{ab} и ψ_{ac}

2.3 Докажите, что прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab}.

2.4 Докажите, что прямая $S_{ab}S_{ac}$ является биссектрисой угла $\angle K_bF'_aH_b$.

2.5 Точка F'_a лежит на прямых K_bK_c, L_bL_c и $G'_bG'_c$.

2.6 Пусть T_a — точка пересечения прямых FG_a и $S_{ab}S_{ac}$. Тогда четверки точек (F, T_a, M_b, S_{ab}) и (F, T_a, M_c, S_{ac}) лежат на окружностях ψ'_{ab} и ψ'_{ac}

2.7 Докажите, что F является точкой Микеля для треугольника $M_aM_bM_c$ и прямой $S_{ab}S_{ac}$.

2.8 Докажите, что точки T_a, T_b и T_c лежат на средних линиях M_bM_c, M_cM_a и M_aM_b соответственно

2.9 Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F. Рассмотрим окружности $\psi^{\triangle}_{ab}$ и $\psi^{\triangle}_{ac}$, проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Докажите, что точка их пересечения, отличная от F, совпадает с точкой пересечения $A^{\triangle}$ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$

2.10 Докажите, что в случае, когда точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой G_b, окружность $\psi^{\triangle}_{ac}$ проходит через точки F, H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca} и точку, симметричную I относительно $S_{ac}S_{ca}$.

2.11 (*) Докажите, что перпендикуляры, восстановленные к прямым BC, CA и AB в точках их пересечения с прямыми $FA^{\triangle}$, $FB^{\triangle}$, $FC^{\triangle}$, соответственно, пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на прямой OI. Более того, окружность, проходящая через эти точки пересечения, проходит через точку Фейербаха F.

При каком положении треугольника $\triangle$ конфигурация из задачи **2.9** переходит в конфигурации из задач **2.2** и **2.6** ?

Последняя задача является очень сложной. Следующий раздел будет посвящен конструкции, позволяющей не только решить ее, но и обобщить на другие аналогичные конфигурации.

3. Обобщенные полюсы треугольника и теорема Куланина

Целью этого раздела является обобщение понятия точки Фейербаха и доказательство представленных выше утверждений (в частности, задачи **2.11**) в более общем случае. Мы будем дополнительно использовать следующие обозначения.

- O — центр описанной окружности Ω треугольника ABC;
- ℓ — произвольная прямая, проходящая через точку O;
- A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ — точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно;
- $P_aP_bP_c$ — педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC, а Ω_P — его педальная окружность;
- F_ℓ — обобщенная точка Фейербаха (см. теорему Куланина).

Для того, чтобы сформулировать необходимые понятия, нам потребуется следующая теорема. В дальнейшем ее можно использовать без доказательства.

Теорема 1 (Куланин)**.** Пусть P — произвольная точка прямой ℓ, проходящей через точку O. Тогда все педальные окружности Ω_P проходят через одну точку.

3.1 (*) Докажите эту теорему.

Общую точку всех педальных окружностей Ω_P точек прямой ℓ мы будем обозначать через F_ℓ и называть *обобщенной точкой Фейербаха.* Эта точка зависит от прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности O треугольника ABC. В случае $\ell = OI$ точка F_ℓ совпадает с обычной точкой Фейербаха F. Отметим также, что все точки F_ℓ лежат на окружности Эйлера ε треугольника ABC (поскольку окружность Эйлера является педальной окружностью точки O).

3.2 Рассмотрим произвольный треугольник ABC, прямую ℓ, проходящую через O, и точку P на ней. Обозначим через A_{pp} точку пересечения прямых P_bP_c и M_bM_c. Тогда точки P_a, A_{pp} и F_ℓ лежат на одной прямой.

3.3 (*) (Основная теорема) Рассмотрим произвольную прямую ℓ, проходящую через центр O описанной окружности треугольника ABC. Пусть P и Q — произвольные точки на этой прямой. Обозначим через A_{pq} точку пересечения прямых P_bP_c и $F_\ell Q_a$. Аналогично определим точки B_{pq} и C_{pq}. Возьмем произвольную точку R на прямой ℓ и проведем через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямые, параллельные R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b соответственно. Тогда получившийся треугольник будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ.

3.4 Выведите из основной теоремы результаты задач **2.5** , **2.8** , **2.11** .

3.5 Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного прямыми $A_{pq}A_{qp}$, $B_{pq}B_{qp}$, $C_{pq}C_{qp}$, проходит через точку F_ℓ.

3.6 Докажите, что прямые, симметричные прямой ℓ относительно средних линий треугольника ABC, пересекаются в точке F_ℓ.

3.7 Пусть A_ℓ, B_ℓ и C_ℓ точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно. Докажите, что окружности, построенные на отрезках AA_ℓ, BB_ℓ, CC_ℓ как на диаметрах, пересекаются в двух точках: F_ℓ и F'_ℓ, причем точка F'_ℓ лежит на описанной окружности Ω треугольника ABC, а ортоцентр H этого треугольника принадлежит прямой $F_\ell F'_\ell$.

3.8 Пусть OH — прямая Эйлера треугольника ABC. Докажите, что полюсы A_{hh}, B_{hh}, C_{hh} образуют автополярный треугольник относительно окружности Эйлера ε, причем вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$.

3.9 Пусть треугольники $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$ перспективны треугольнику ABC, а их вершины лежат на соответствующих сторонах треугольника ABC. Пусть A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} — точки пересечения соответствующих сторон треугольников $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$. Тогда:

a) Вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$;

b) Треугольник $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ автополярен относительно коники Ω, проходящей через точки P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c;

c) Треугольник $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ перспективен треугольникам $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$, причем центры перспективы лежат на конике Ω.

3.10 Пусть X_a — произвольная точка на прямой BC. Обозначим через X_b точку пересечения прямых X_aB_{hh} и AC, а через X_c — точку пересечения прямых X_aC_{hh} и AB. Докажите, что

- прямая X_bX_c проходит через точку A_{hh};
- прямые AX_a, BX_b и CX_c пересекаются в одной точке X;
- описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через точку F_{OL}, где L — точка Лемуана треугольника ABC.

В заключение сформулируем ряд вопросов, ответы на которые получить пока не удалось.

3.11 Определение полюсов A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} зависит от порядка выбора точек P и Q на прямой ℓ. Возникает вопрос: как связаны полюсы A_{pq} и A_{qp}, т.е. полюсы, соответствующие одним и тем же точкам, взятым в разном порядке? Имеет место следующая гипотеза. *Точки пересечения Z_a, Z_b, Z_c соответствующих сторон треугольников $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ и $A_{qp}B_{qp}C_{qp}$ образуют треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке F_ℓ.*

3.12 Существенный интерес представляет такой выбор точек P и Q на прямой ℓ, при котором вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$. Всегда ли на прямой ℓ можно выбрать такую пару точек? Эксперименты показывают, что такие точки существуют всегда, однако они не могут располагаться слишком далеко от точки O. Как можно точно описать положения точек P и Q, при которых вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$?