Об инверсных образах точки Фейербаха, полюсах треугольника и теореме Куланина
Решения

0. Вспомогательные факты

0.1 Поскольку $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, то точки, симметричные H относительно BC и середины BC, лежат на описанной окружности треугольника. При гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ описанная окружность переходит в окружность Эйлера.

0.2 Серединные перпендикуляры исходного треугольника являются высотами серединного, а значит O — ортоцентр серединного треугольника. Гомотетия с центром M и коэффициентом $-1/2$ переводит исходный треугольник в серединный, и H переходит в O. Отсюда M лежит на отрезке HO и $HM : MO = 2$. Из решения предыдущей задачи E лежит на отрезке HO и $HE : EO = 1 : 1$. Равенство $HE : EM : MO = 3 : 1 : 2$ следует из двух доказанных.

0.3 Пусть три из прямых образуют треугольник ABC и пусть прямые AB, AC, BC пересекают четвертую прямую в точках D, E, F соответственно. Обозначим через P точку пересечения описанных окружностей треугольников ABC и CEF, отличную от точки C. Докажем, что P принадлежит описанной окружности треугольника BDF. Для этого достаточно проверить, что $\angle(BP, PF) = \angle(BD, DF)$. Ясно, что $\angle(BP, PF) = \angle(BP, PC) + \angle(PC, PF) = \angle(BA, AC) + \angle(EC, EF) = \angle(BD, AC) + \angle(AC, DF) = \angle(BD, DF)$. Аналогично доказывается, что P принадлежит описанной окружности треугольника ADE.

0.4 Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Заметим, что I_aA, I_bB, I_cC — высоты треугольника $I_aI_bI_c$. Стороны треугольников $I_aI_bI_c$ и $G_aG_bG_c$ параллельны, т.е. эти треугольники гомотетичны. Поэтому их прямые Эйлера параллельны. Точка I является центром описанной окружности треугольника $G_aG_bG_c$ и ортоцентром треугольника $I_aI_bI_c$. Поэтому прямые Эйлера этих треугольников проходят через I и параллельны, т.е. совпадают. Точка O является центром окружности Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$, а значит лежит на его прямой Эйлера.

0.5 Следует из решения следующей задачи (или из легкого счета углов).

0.6 Сделаем гомотетию с центром P и коэффициентом 2. Пусть P'_a, P'_b, P'_c и H'_a, H'_b, H'_c — точки, симметричные P и H относительно соответствующих сторон треугольника. Достаточно доказать, что P'_b, H, P'_c лежат на одной прямой (доказательство того, что P'_a, H, P'_c лежат на одной прямой, аналогично). Из симметрии относительно AB имеем $\angle(P'_cH, HB) = \angle(BH'_c, H'_cP)$ и $\angle(CH, HP'_b) = \angle(PH'_b, H'_bC)$. Используя то, что P, H'_b, H'_c лежат на описанной окружности, получаем $\angle(P'_cH, HP'_b) = \angle(P'_cH, HB) + \angle(HB, CH) + \angle(CH, HP'_b) = \angle(BH'_c, H'_cP) + \angle(HB, CH) + \angle(PH'_b, H'_bC) = \angle(BA, AP) + \angle(HB, CH) + \angle(PA, AC) = \angle(BA, AC) + \angle(HB, CH) = 0$, т.е. P'_b, H, P'_c лежат на одной прямой.

0.7 Пусть P'_a, P'_b, P'_c — точки, симметричные P относительно соответствующих сторон треугольника. Несложно проверить, что прямая, симметричная AP относительно AI — серединный перпендикуляр к $P'_bP'_c$. Поэтому искомая точка P' — центр описанной окружности треугольника $P'_aP'_bP'_c$.

0.8 Докажем свойства изогонального сопряжения:

- Следует из решения предыдущей задачи и того, что точки, симметричные H относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности.
- Применяя к гомотетию с центром P и коэффиентом $1/2$ к утверждению из решения предыдущей задачи, получим, что середина PP' является центром педальной окружности точки P. Поскольку расстояния от середины PP' до проекций P и P' на любую прямую равны, то педальная окружность точки P' совпадает с педальной окружностью точки P.
- Из предыдущей задачи точка, изогонально сопряженная P, должна быть пересечением серединных перпендикуляров к $P'_aP'_b$, $P'_bP'_c$, $P'_cP'_a$. Но все эти серединные перпендикуляры перпендикулярны прямой Симсона точки P.
- Ясно

0.9 По предыдущей задаче точки P_b, P_c, Q_b, Q_c лежат на окружности с центром в середине PQ. Пусть точки X и Y симметричны P_b и P_c соответственно относительно центра окружности. Тогда X лежит на QQ_b, а Y лежит на QQ_c. По теореме Паскаля для шестиугольника $P_bQ_cYP_cQ_bX$ середина PQ, точка Q и точка пересечения P_bQ_c с P_cQ_b лежат на одной прямой. Значит, прямые P_bQ_c, P_cQ_b, PQ пересекаются в одной точке.

0.10 Поскольку $ABCH$ — невыпуклый четырехугольник, то коника, проходящая через его вершины является гиперболой. Пусть P, Q — ее бесконечно удаленные точки. Нужно показать, что напрвления на P и Q перпендикулярны. Запишем теорему Паскаля для шестиугольника $ABCHPQ$. Пусть X — точка пересечения AB и HP, а Y — точка пересечения CH и QA. Тогда XY проходит через точку пересечения BC и PQ, т.е. $XY \parallel BC$, т.е. $XY \perp AH$. Значит, Y — ортоцентр треугольника AHX, откуда $AY \perp HX$. Т.е. $AQ \perp HP$, что и требовалось.

0.11 Пусть дана прямая ℓ. Выберем на ней три точки P, Q, R. Проведем через их изогональные образы P', Q', R' и вершины B, C конику. Рассмотрим два преобразования прямой ℓ на конику, сохраняющих двойные отношения. Первое сопоставляет точке X прямой ℓ прямую BX, затем отражает эту прямую относительно биссектрисы угла B, и пересекает полученную прямую с коникой. Второе преобразование аналогично, только вершина B заменена на C. Эти преобразования совпадают в трех точках P, Q, R, а значит, совпадают всюду. Поэтому изогональный образ ℓ — коника, проходящая через вершины B и C. Ясно, что она также проходит через A.

1. Теорема Фейербаха

1.1 Т.к. S_{ab} — точка пересечения λ_a со средней линией M_aM_b, то треугольник BM_aS_{ab} равнобедренный, и $\angle S_{ab}BM_a = \frac{1}{2}\angle S_{ab}M_aC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle IBC$. Значит, S_{ab} лежит на BI.

Поскольку $BS_{ab}C$ прямой, то точки I, G_b, S_{ab}, C лежат на одной окружности (с диаметром CI). Значит, $\angle S_{ab}G_bC = \angle S_{ab}IC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle AG_bC$. Поэтому S_{ab} лежит на прямой G_bG_c (см. рис. 1).

1.2 Искомый угол между прямой H_aM_a и окружностью ε равен половине дуги H_aM_a окружности ε, т.е. равен $\angle H_aM_bM_a = |\angle CM_aM_b - \angle CH_aM_b| = |\angle CBA - \angle H_aCM_b| = |\angle B - \angle C|$.

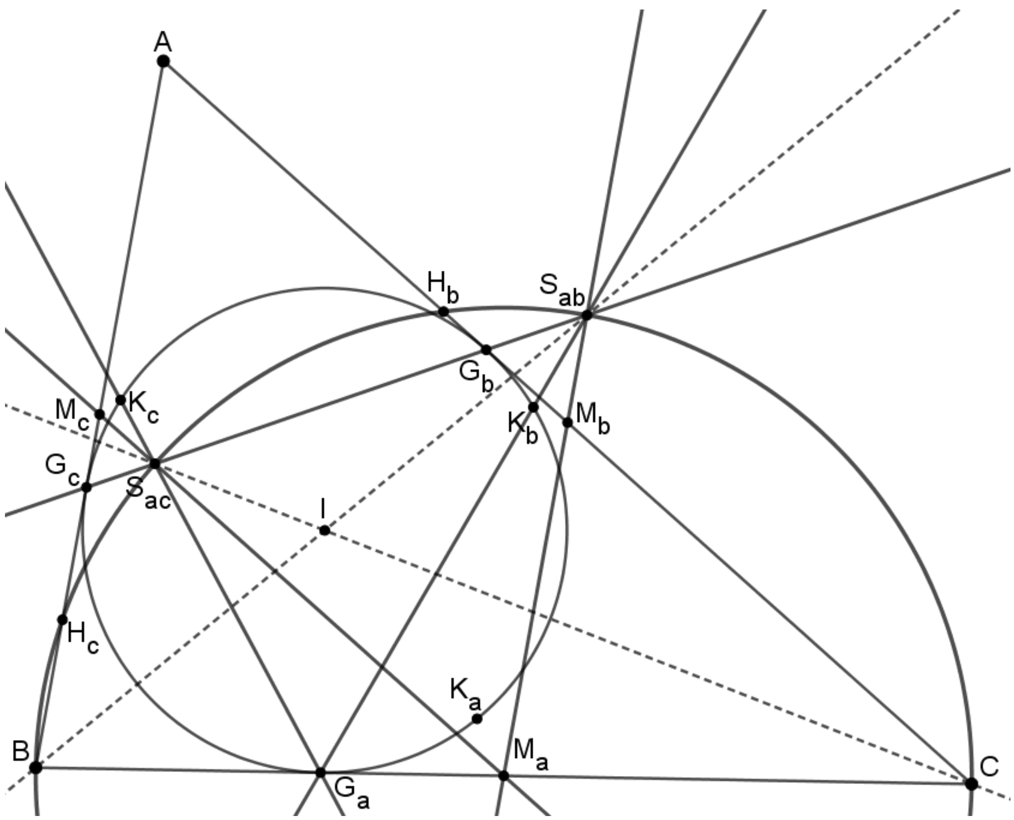

Рис. 1.

1.3 Пусть I_a — центр вневписанной окружности, касающейся отрезка BC. Тогда BI и BI_a — биссектрисы внутреннего и внешнего угла ABL_a. Поэтому четверка точек A, I, L_a, I_a — гармоническая. Ортогонально проектируя на BC, получаем утверждение задачи.

1.4 Из предыдущей задачи следует, что при инверсии относительно окружности с диаметром $G_aG'_a$ окружность девяти точек ε переходит в прямую ℓ, проходящую через L_a. С другой стороны, эта инверсия оставляет вписанную и вневписанную окружности ω и ω_a на месте, т.к. обе они ортогональны окружности инверсии. Так как инверсия — конформное преобразование, угол между прямыми ℓ и BC равен углу между окружностью ω и BC, т.е. $|\angle B - \angle C|$. Прямая, симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI образует такой же угол с BC. Поэтому ℓ симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI, а значит, ℓ касается окружностей ω и ω_a (см. рис. 2).

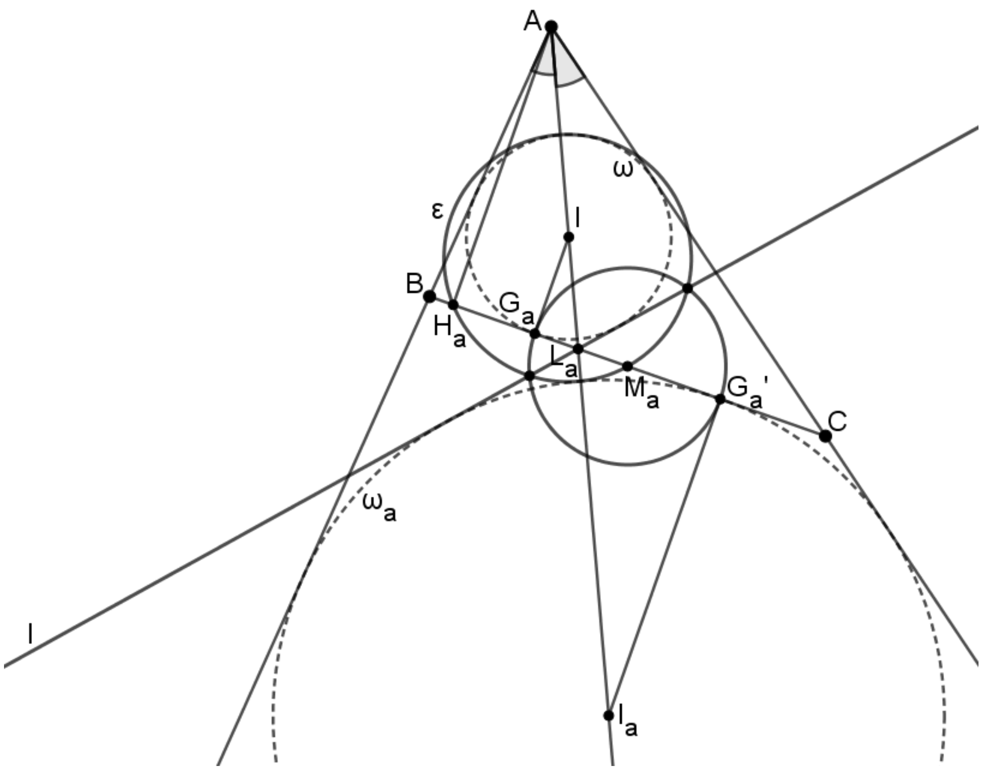

Рис. 2.

1.5 Касание окружности Эйлера и вневписанной окружности ω_a в некоторой точке F_a следует из решения предыдущей задачи. Точка L_a — центр отрицательной гомотетии окружностей ω и ω_a. Поэтому перспективность следует из теоремы о трех центрах гомотетии для вписанной, вневписанной окружностей и окружности Эйлера.

1.7 Сделаем гомотетию с центром F, переводящую вписанную окружность в окружность Эйлера. Прямая H_aM_a перейдет в прямую, параллельную H_aM_a и касающуюся окружности Эйлера в некоторой точке X. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к H_aM_a точка X — середина дуги H_aM_a окружности Эйлера. Значит, FX является биссектрисой угла $\angle H_aFM_a$ Утверждение задачи следует из того, что при гомотетии G_a переходит в X.

1.8 Будем обозначать середину отрезка XY через M_{XY}. Пусть даны точки A, B, C, P. Пусть X — точка пересечения окружностей Эйлера треугольников ABP и BCP, отличная от M_{BP}.

Тогда $\angle(M_{AP}X, XM_{CP}) = \angle(M_{AP}X, XM_{BP}) + \angle(M_{BP}X, XM_{CP}) = \angle(M_{AP}M_{AB}, M_{AB}M_{BP}) + \angle(M_{BP}M_{BC}, M_{BC}M_{CP}) = \angle(BP, AP) + \angle(CP, BP) = \angle(CP, AP) = \angle(M_{AP}M_{AC}, M_{AC}M_{CP})$.
Т.е. X лежит на окружности Эйлера треугольника ACP. Аналогично, X лежит на окружности Эйлера треугольника ABC см. рис. 3).

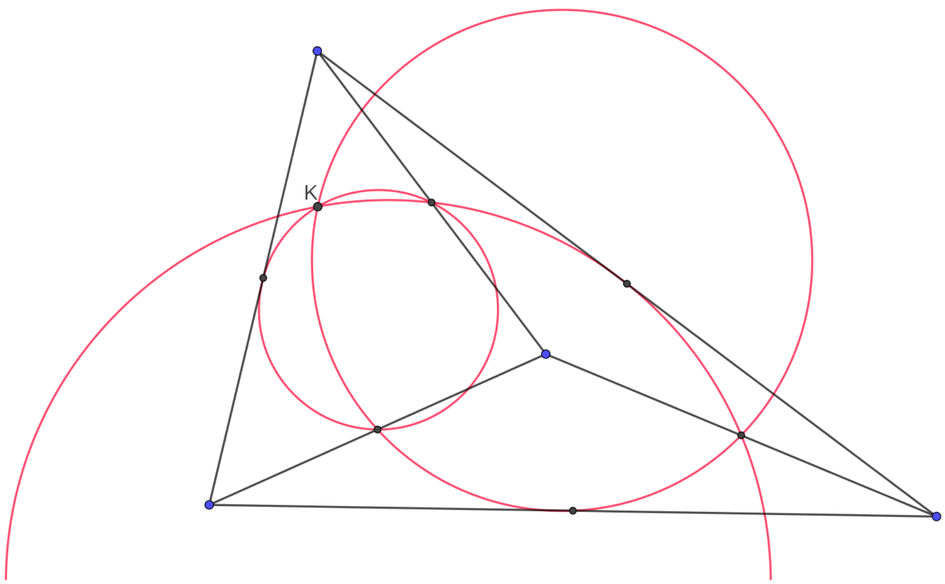

Рис. 3.

1.9 Пусть P_a, P_b, P_c — проекции P на соответствующие стороны треугольника ABC. В обозначениях из решения предыдущей задачи
$\angle(P_cX, XP_a) = \angle(P_cX, XM_{BP}) + \angle(M_{BP}X, XP_a) = \angle(P_cM_{AB}, M_{AB}M_{BP}) + \angle(M_{BP}M_{BC}, M_{BC}P_a) = \angle(P_cA, AP) + \angle(PC, CP_a) = \angle(P_cP_b, P_bP) + \angle(PP_b, P_bP_a) = \angle(P_cP_b, P_bP_a)$.

1.10 Сначала докажем, что соответствующие стороны треугольников $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ параллельны. Хорды G_aK_b и G_bG_c симметричны относительно BI, поэтому они равны. Аналогично, хорды G_bG_c и G_aK_c симметричны относительно CI и потому также равны. Тогда треугольник $K_cG_aK_b$ равнобедренный, откуда следует, что $\angle G_aK_cK_b = \angle G_aK_bK_c = \angle CG_aK_b$. Отсюда очевидна параллельность прямых BC и K_bK_c. Для двух оставшихся пар сторон рассуждения аналогичны. По теореме Дезарга треугольники $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ гомотетичны. Точка пересечения прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c является центром этой гомотетии, а значит и центром гомотетии вписанной окружности и окружности Эйлера, то есть точкой Фейербаха F (см. рис. 4).

1.11 Следует из теоремы Фейербаха и задач **1.8**, **1.9** для четырехугольника $ABCI$ (см. рис. 5).

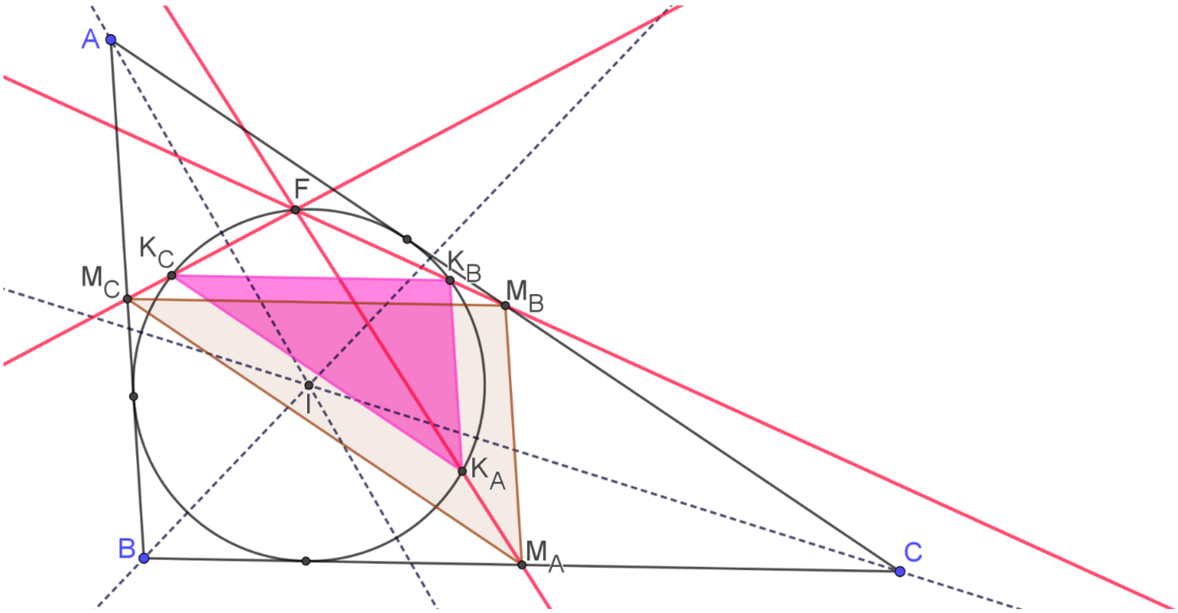

Рис. 4.

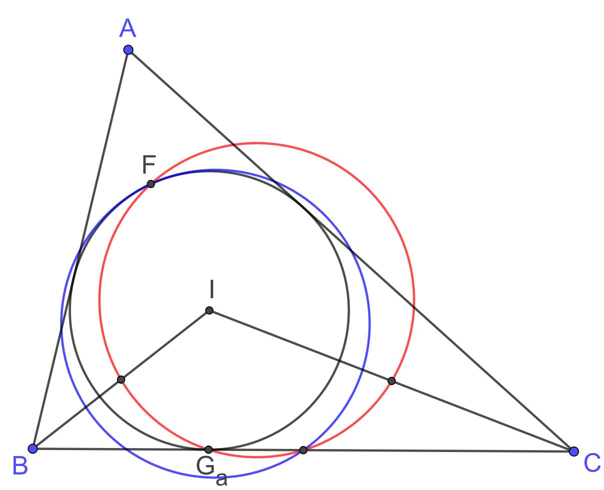

Рис. 5.

1.12 Из предыдущей задачи точка Фейербаха F лежит на окружности Эйлера треугольника AIC. Середина X отрезка AI там тоже лежит. Достаточно доказать, что $\angle(G_bF, FX) = \angle(G_bF, F\widetilde{G}_a)$. Имеем
$\angle(G_bF, FX) = \angle(G_bM_b, M_bX) = \angle(G_bC, CI) = \angle(G_bG_a, G_aI) = \angle(G_bG_a, G_a\widetilde{G}_a) = \angle(G_bF, F\widetilde{G}_a)$ (см. рис. 6).

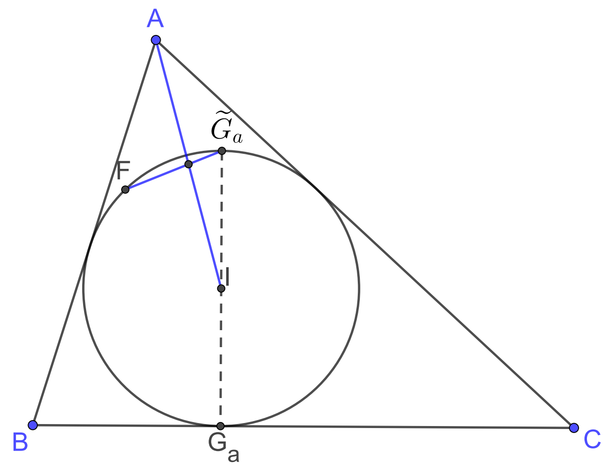

Рис. 6.

2. Инверсные образы точки Фейербаха

2.1 При инверсии относительно λ_a окружность Эйлера ε перейдет в прямую H_bH_c, окружность ε_a перейдет в прямую $S_{ab}S_{ac}$. Поскольку точка F является точкой пересечения окружностей ε и ε_a, то точка F'_a является точкой пересечения прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$, которые являются радикальными осями λ_a и ε, λ_a и ε_a (см. рис. 7).

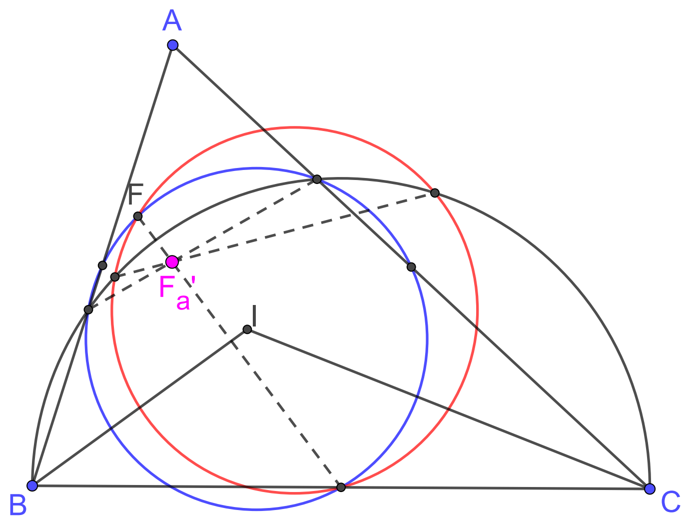

Рис. 7.

2.2 Сначала докажем, что четыре точки F, F'_a, K_b, K'_b лежат на одной окружности (рассуждения для четверки точек F, F'_a, K_c, K'_c аналогичны). Рассмотрим инверсию Inv_{K_a} с центром в точке K_a, переводящую точку F'_a в точку F. Тогда композиция инверсий $\mathrm{Inv}_{K_a} \circ \mathrm{Inv}_{\lambda_a}$ переводит окружность Эйлера ε в некоторую окружность ω', проходящую через точки F и K_a. В силу того, что инверсия — конформное преобразование, эта композиция сохраняет углы между прямыми и окружностями. Раз центры обеих инверсий лежат на прямой FF'_a, то окружности ε и ω' образуют с прямой FF'_a равные углы. Но это означает, что окружности ε и ω' касаются в точке F. Отсюда следует, что окружности ω и ω' совпадают, поскольку существует единственная окружность, проходящая через точку K_a и касающаяся окружности ε в точке F.

Далее, заметим, что точка K'_b пересечения луча K_aK_b с прямой H_bH_c — это образ точки K_b при инверсии Inv_{K_a}. Значит, точки F, F'_a, K_b и K'_b лежат на одной окружности.

Осталось загнать на окружности точки S_{ab} и S_{ac}. Для этого используем вписанные углы. Во-первых, $\angle K_aFK_b = \angle K_aK_cK_b$. Во-вторых, пусть прямая FK_b вторично пересекает окружность ε_a в точке R. Тогда $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$. Прямые M_aS_{ac} и K_aK_c параллельны, поэтому вторые лучи равных углов $\angle M_aS_{ac}R$ и $\angle M_aFR$ также параллельны, т.е. $S_{ac}R \parallel K_bK_c \parallel BC$. Отсюда сразу следует равенство углов $\angle M_aFR$ и $\angle S_{ac}S_{ab}G_a$. Значит, точки F, F'_a, K_b, K'_b и S_{ab} лежат на одной окружности. Для точки S_{ac} рассуждения аналогичны (см. рис. 8).

2.3 Из решения предыдущей задачи окружности ψ_{ab} и λ_a ортогональны. Поэтому прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab}.

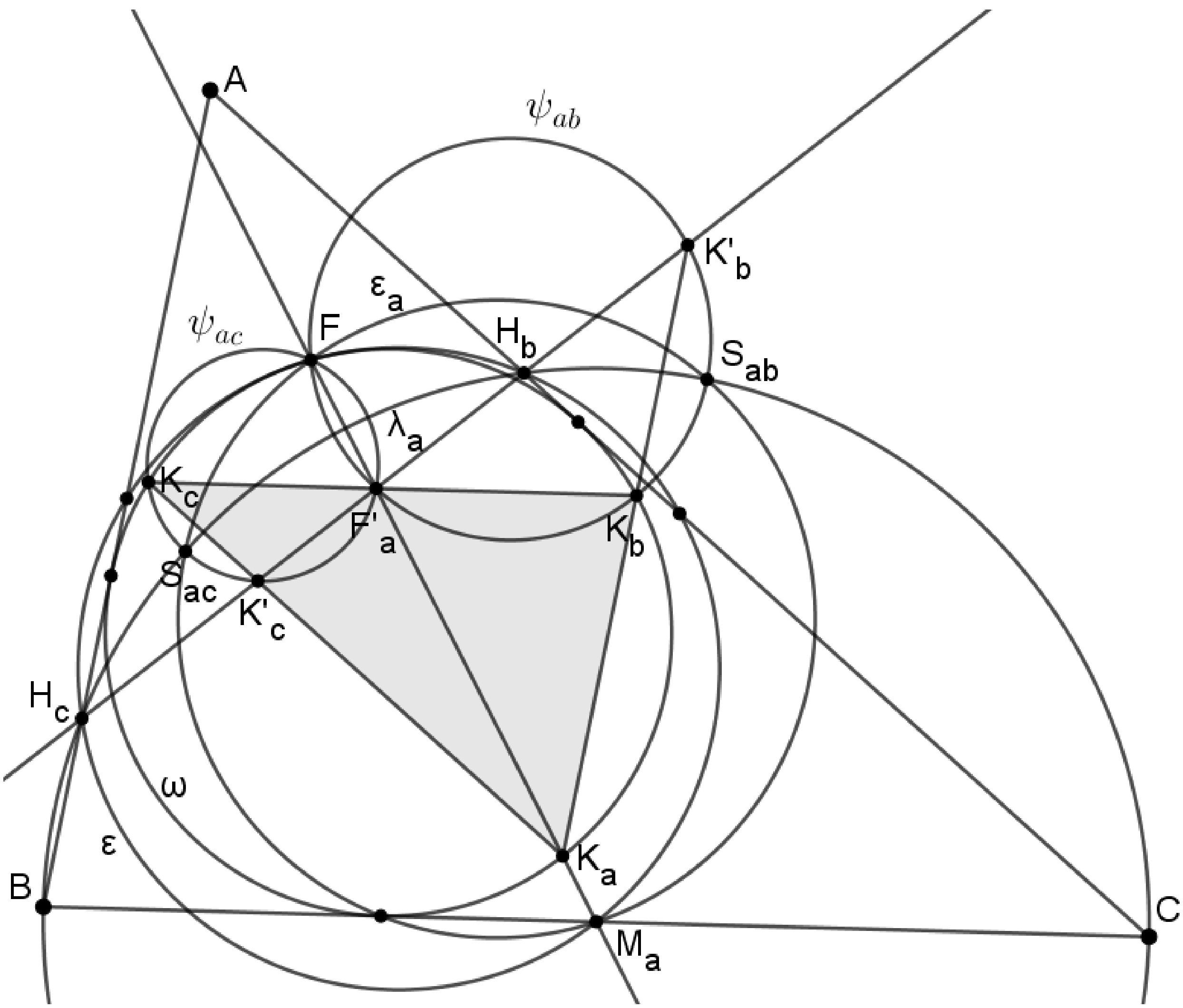

Рис. 8.

2.4 Поскольку прямые M_aS_{ab} и M_aS_{ac} касаются окружностей ψ_{ab} и ψ_{ac} соответственно, и пары прямых (M_aS_{ab}, K_aK_b) и (M_aS_{ac}, K_aK_c) параллельны, то $K_bS_{ab} = K'_bS_{ab}$ и $K_cS_{ac} = K'_cS_{ac}$ (параллельные прямые высекают на окружности равные хорды). Тогда $\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab}$, что и требовалось.

2.5 Точка F'_a лежит на K_bK_c следует из предыдущей задачи.

Заметим, что прямые L_bK_b и L_cK_c касаются вписанной окружности в точках K_b и K_c соответственно. Следующее утверждение является вырожденным случаем теоремы Брианшона:

Пусть четырехугольник $K_cG_bK_bG_c$ вписан в окружность, касательные к которой в вершинах четырехугольника образуют другой четырехугольник. Тогда у этих двух четырехугольников точки пересечения диагоналей совпадают.

Применяя его, получаем, что прямые K_bK_c, G_bG_c, L_bL_c пересекаются в одной точке.

Прямая $G'_bG'_c$ проходит через эту точку из задачи **1.3**.

2.6 Приведем доказательство для окружности ψ'_{ab}, для окружности ψ'_{ac} рассуждения аналогичны. $\angle M_aFM_b = \angle M_aM_cM_b = \angle ACB = \angle G_aS_{ab}T_a$ (последнее равенство следует из того, что точки C, G_a, G_b, S_{ab} лежат на окружности с диаметром CI). По задаче **1.11** $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$. Тогда $\angle T_aFM_b = \angle M_aFM_b + \angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}T_a + \angle G_aS_{ab}M_a = \angle T_aS_{ab}M_b$ (см. рис. 9).

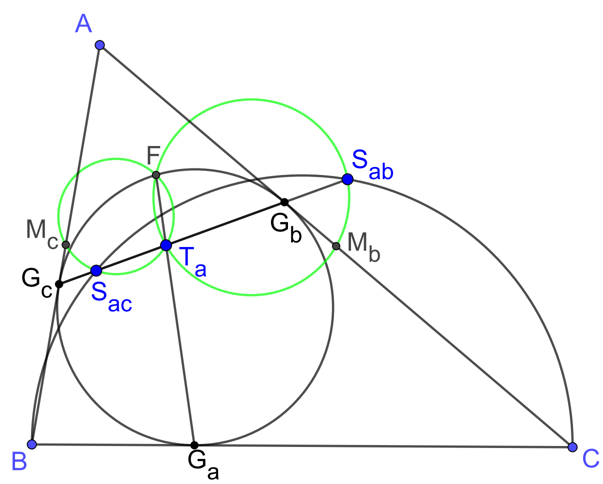

Рис. 9.

2.7 Точка F лежит на описанной окружности треугольников $M_aM_bM_c$ и $S_{ab}M_aS_{ac}$.

2.8 Следует из предыдущих двух задач (см. рис. 10).

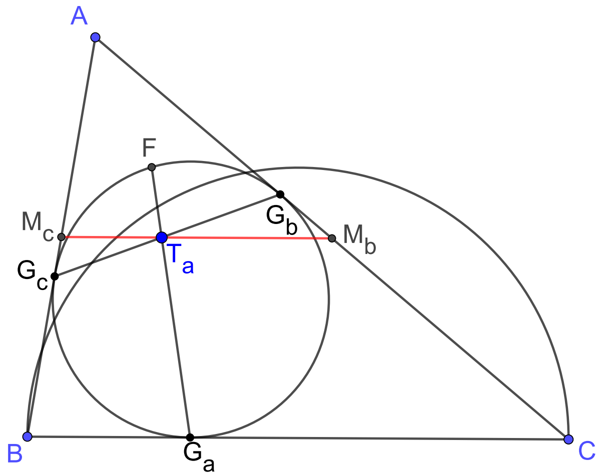

Рис. 10.

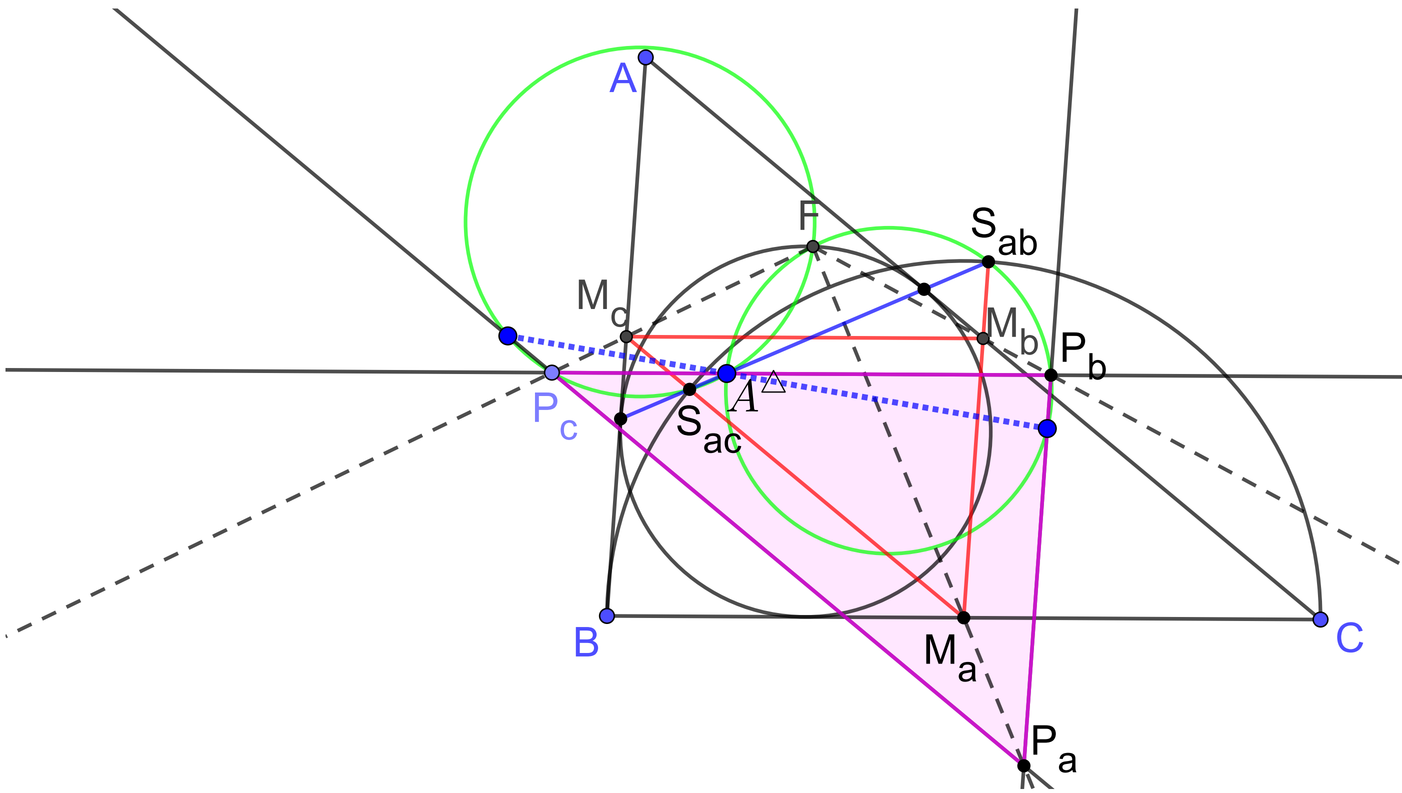

Рис. 11.

2.9 Используя окружность ψ'_{ab} из задачи **2.6** имеем: $\angle A^{\triangle}P_bF = \angle T_aM_bF = \angle T_aS_{ab}F = \angle A^{\triangle}S_{ab}F$. Отсюда следует, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi^{\triangle}_{ab}$. Аналогично доказывается, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi^{\triangle}_{ac}$ (см. рис. 11).

2.10 Вначале докажем, что четверка точек $(H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca})$ лежит на одной окружности. Заметим, что прямые BS_{ca} и H_bS_{ac} параллельны, т.к. обе они перпендикулярны биссектрисе угла $\angle BAC$. Аналогично, прямые BS_{ac} и G_bS_{ca}. Поэтому четырехугольник $BS_{ac}H_bS_{ca}$ является параллелограммом и $H_bS_{ac} = BS_{ca} = G_bS_{ca}$. Значит, $S_{ac}H_bG_bS_{ca}$ — равнобокая трапеция, и потому вокруг нее можно описать окружность (см. рис. 8).

Теперь докажем, что точка Фейербаха также лежит на этой окружности. По лемме Архимеда следует, что $\angle H_bFG_b = \frac{1}{2}\angle H_bFM_b = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C|$. Далее, $\angle H_bS_{ac}S_{ca} = \angle S_{ca}G_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}$ и $\angle G_bS_{ac}S_{ca} = \angle AG_bS_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}$, поэтому

$$\angle H_bS_{ac}G_b = |\angle H_bS_{ac}S_{ca} - \angle G_bS_{ac}S_{ca}| = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C| = \angle H_bFG_b,$$

откуда следует, что точка F лежит на описанной окружности трапеции $H_bG_bS_{ca}S_{ac}$.

Несложно видеть, что точка I является ортоцентром треугольника $S_{ac}S_{ca}G_b$. Значит, точка, симметричная I относительно $S_{ac}S_{ca}$ лежит на описанной окружности треугольника $S_{ac}S_{ca}G_b$.

2.11 Будем двигать треугольник $P_aP_bP_c$ линейно. Точки $A^{\triangle}, B^{\triangle}, C^{\triangle}$ двигаются дробно-линейно. Точка X_a пересечения $FA^{\triangle}$ с BC (и аналогично определяемые точки X_b, X_c) двигаются дробно-линейно. Точки пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника в точках $A^{\triangle}, B^{\triangle}, C^{\triangle}$ с OI будет двигаться дробно-линейно. Чтобы доказать, что они все совпадают, достаточно 3 положений. Два положения $P_aP_bP_c = K_aK_bK_c$ и $P_aP_bP_c = M_aM_bM_c$ следуют из предыдущих задач. Третье положение — когда треугольник $P_aP_bP_c$ вырождается в 3 прямые, проходящие через F параллельно сторонам исходного треугольника. В этом положении все перпендикуляры уходят на бесконечность. Утверждение про окружность будет следовать из задачи **3.1**.

Или же можно вывести все сразу из основной теоремы (см. задачу **3.4**).

3. Обобщенные полюсы треугольника и теорема Куланина

3.1 Из задач **0.11** и **0.10** (и первого пункта **0.8**) точка P', изогонально сопряженная точке P, движется по равнобокой гиперболе, проходящей через вершины треугольника ABC. По второму пункту задачи **0.8** достаточно доказать, что педальные окружности точки P' проходят через центр этой гиперболы. Используя задачи **1.9** и **1.8**, сводим к следующему хорошо известному утверждению: если треугольник вписан в равнобокую гиперболу, то его окружность Эйлера проходит через центр гиперболы (см. рис. 12).

3.2 Пусть точка P двигается линейно по прямой ℓ. Тогда точки P_a, P_b, P_c движутся линейно по сторонам треугольника. Значит, точка A_{op} пересечения $F_\ell P_a$ со средней линией M_bM_c, двигается линейно по M_bM_c. Нужно доказать, что точки P_b, P_c, A_{op} лежат на одной прямой. Достаточно проверить три положения точки P. Случай $P = O$ очевиден. Два случая, когда P лежит на описанной окружности, следуют из теоремы Куланина (педальная окружность точки P вырождается в прямую Симсона) (см. рис. 13).

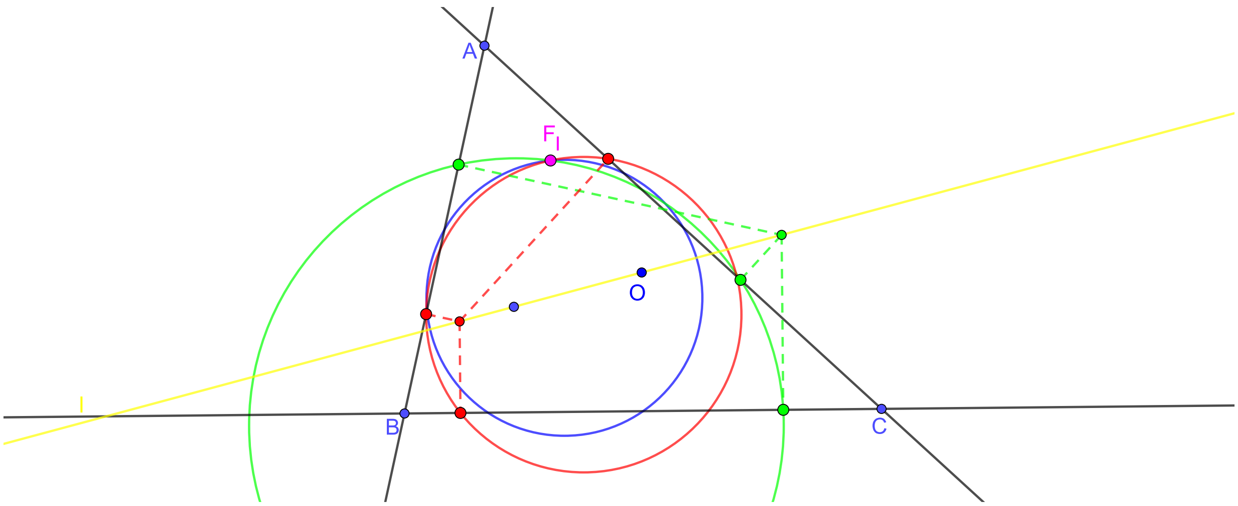

Рис. 12.

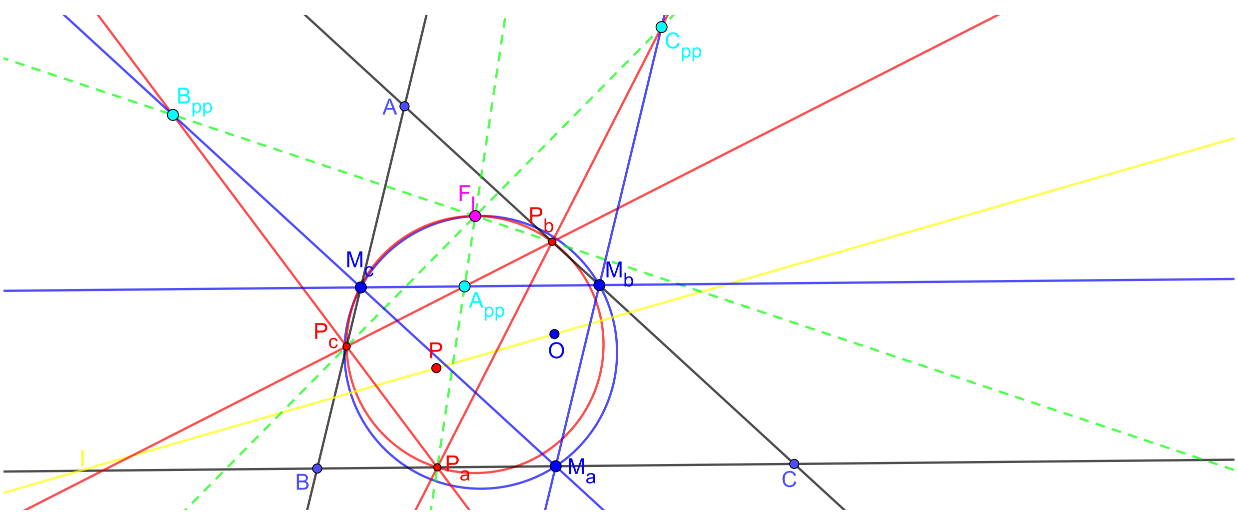

Рис. 13.

3.3 Будем линейно двигать точку P по прямой ℓ. Обозначим через t ориентированную длину отрезка OP (т.е. выберем положительное направление на прямой ℓ и будем считать длину t отрезка OP положительной, если точка P находится на положительном луче, и отрицательной в противном случае). Введем декартову систему координат с началом в точке F_ℓ и обозначим через $(X_a(t), Y_a(t))$, $(X_b(t), Y_b(t))$, $(X_c(t), Y_c(t))$ координаты точек A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} соответственно. Докажем, что каждая из этих координатных функций является рациональной по переменной t, причем степень числителей равна 2, а степень знаменателей равна 1.

Для определенности рассмотрим точку A_{pq} (рассуждения для точек B_{pq} и C_{pq} аналогичны). Ясно, что точки P_b, P_c будут двигаться линейно, поэтому их координаты являются линейными функциями от переменной t. Далее, запишем явный вид уравнения прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Отсюда следует, что коэффициенты при x и y уравнения прямой P_bP_c также линейно зависят от t, а свободный член этого уравнения является квадратичным по t. Наконец, пересекая прямую P_bP_c с неподвижной прямой $F_\ell Q_a$, получаем искомые координаты точки A_{pq} пересечения этих прямых. Аналогично доказывается, что координаты точек B_{pq} и C_{pq} имеют аналогичный вид.

Теперь докажем, что при линейном движении точки P прямые $A_{pq}B_{pq}$, $B_{pq}C_{pq}$, $C_{pq}A_{pq}$ будут двигаться параллельно (но не линейно). Это условие равносильно равенствам

$$F_\ell A_{pq} = \alpha \cdot F_\ell C_{pq} \quad \text{и} \quad F_\ell B_{pq} = \beta \cdot F_\ell C_{pq},$$

где α и β — некоторые константы, не зависящие от t (например, можно вычислить их для некоторого конкретного момента времени t_0, а затем доказать, что они остаются неизменными в любой другой момент времени).

Будем доказывать только первое равенство, поскольку второе доказывается абсолютно аналогично. Чтобы доказать истинность первого равенства, перепишем его в координатном виде:

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad \text{и} \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

(здесь α_1 и α_2 — фиксированные константы). Вспомним, что каждая из функций, фигурирующих в этих соотношениях, является отношением многочленов степеней 2 и 1. Поэтому, домножая каждое из равенств на знаменатели соответствующих функций, получаем, что данные равенства равносильны обращению в 0 двух кубических многочленов, зависящих от t. Ясно, что для проверки этого условия необходимо найти четыре различных значения t, или, что то же самое, четыре различных положения точки P, при которые утверждение теоремы (равносильное занулению этих кубических многочленов) верно (поскольку если у многочлена степени не выше 3 есть 4 различных корня, то этот многочлен тождественно равен 0). Укажем эти положения.

Во-первых, рассмотрим два момента времени, в которые точка P совпадает с O (этот случай соответствует $t = 0$) и с Q. Из предыдущей задачи следует, что точки $\{A_{pq}, C_{pq}\}$ совпадают в эти два момента времени, причем они отличны от начала координат F_ℓ. Поэтому, если определить константы α_1 и α_2 по формулам $\alpha_1 = X_a(0)/X_c(0)$ и $\alpha_2 = Y_a(0)/Y_c(0)$, то равенства

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad \text{и} \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

верны при двух моментах времени t.

Во-вторых, рассмотрим два положения точки P, являющихся концами диаметра описанной окружности Ω треугольника ABC, содержащегося на прямой ℓ. В это случае точки A_{pq} и C_{pq} совпадают с F_ℓ, а потому их координаты равны 0 и требуемые равенства также верны.

Таким образом, мы нашли четыре момента времени, при которых соотношения между координатами точек A_{pq} и C_{pq} верны. Значит, эти соотношения верны в любой момент времени

t, откуда следует параллельность прямых вида $A_{pq}C_{pq}$. Аналогично доказывается параллельность прямых $A_{pq}B_{pq}$ и $B_{pq}C_{pq}$. Таким образом, все треугольники вида $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ гомотетичны с центром в точке F_ℓ при всевозможных положениях точки P.

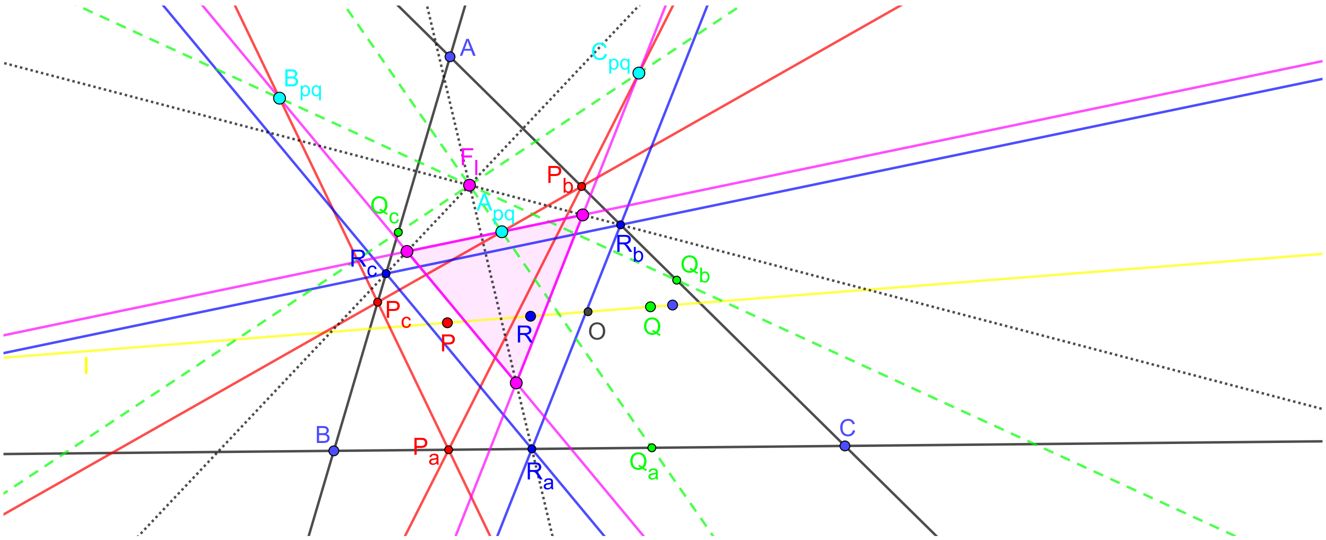

Рис. 14.

Осталось понять, почему при проведении через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямых, параллельных R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b соответственно, треугольник, образованный этими прямыми, будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ. Для этого рассмотрим момент времени, в который точка P совпадает с R. Тогда точки $A_{pq} = A_{rq}$, $B_{pq} = B_{rq}$ и $C_{pq} = C_{rq}$ будут лежать на прямых R_bR_c, R_cR_a и R_aR_b соответственно. Для произвольного положения точки P рассмотрим гомотетию с центром в F_ℓ, которая переведет A_{rq} в A_{pq}. Тогда по доказанному выше эта же гомотетия переведет B_{rq} в B_{pq} и C_{rq} в C_{pq}. Поэтому прямая R_bR_c перейдет в прямую, проходящую через A_{pq} параллельно ей. Аналогичное произойдет с двумя оставшимися прямыми R_cR_a и R_aR_b (см. рис. 14).

3.4 Задачи **2.5** и **2.8** несложно доказываются и без использования основной теоремы, поэтому мы только упомянем, что конструкция задачи **2.5** — случай $P = I$, $Q = O$ в основной теореме, а конструкция задачи **2.8** — случай $P = Q = I$, $R = O$. Выведем задачу **2.11**. Пусть перпендикуляр к прямой BC в точке ее пересечения с $FA^{\triangle}$ пересекает OI в точке Q. Прямая P_bP_c проходит через точку $A^{\triangle} = A_{iq}$. Применим основную теорему к I, Q, $R = O$. Получим, что прямые P_aP_b и P_aP_c проходят через точки C_{iq} и B_{iq} соответственно. Следовательно, $B^{\triangle} = B_{iq}$ и $C^{\triangle} = C_{iq}$. Поэтому основание перпендикуляров из Q на AB и AC — точки пересечения AB и AC с $FC^{\triangle}$ и $FB^{\triangle}$ соответственно. Утверждение про окружность следует из теоремы Куланина. (см. рис. 15, 16, 17).

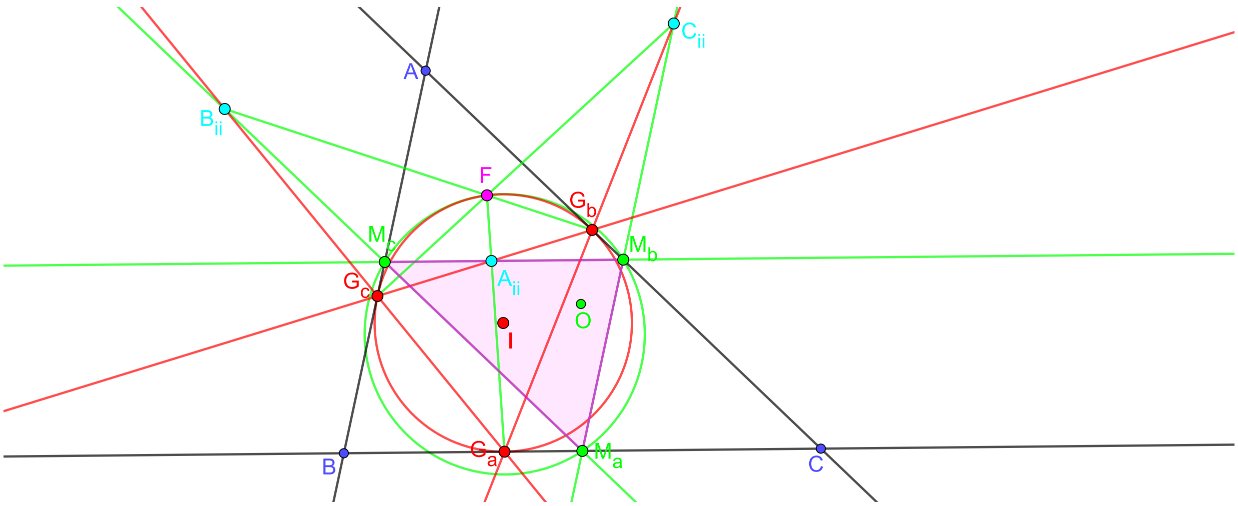

Рис. 15. Случай $P = Q = I$, $R = O$

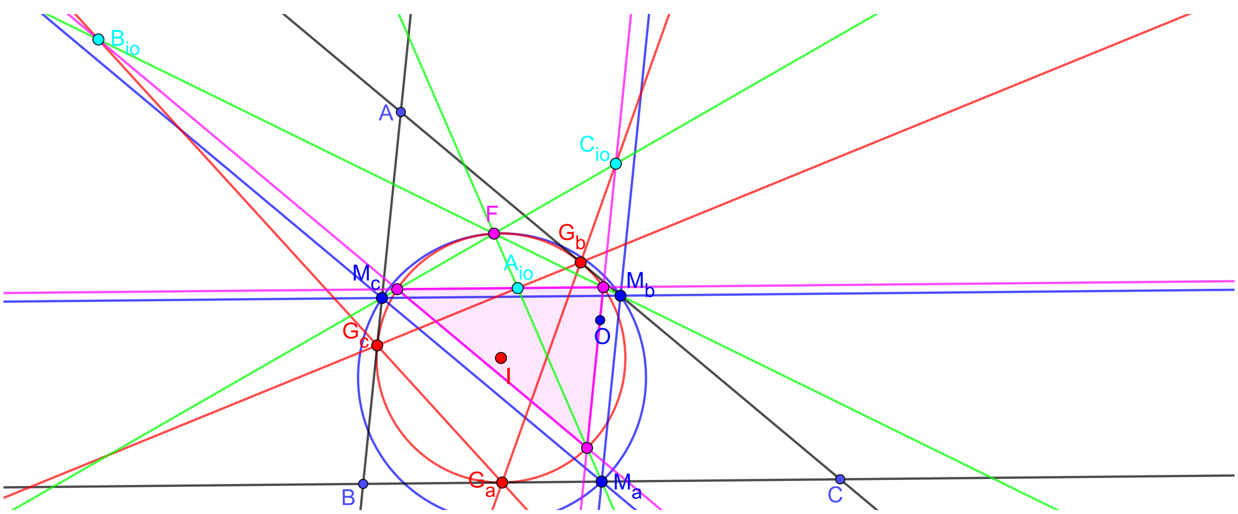

Рис. 16. Случай $P = I$, $Q = R = O$

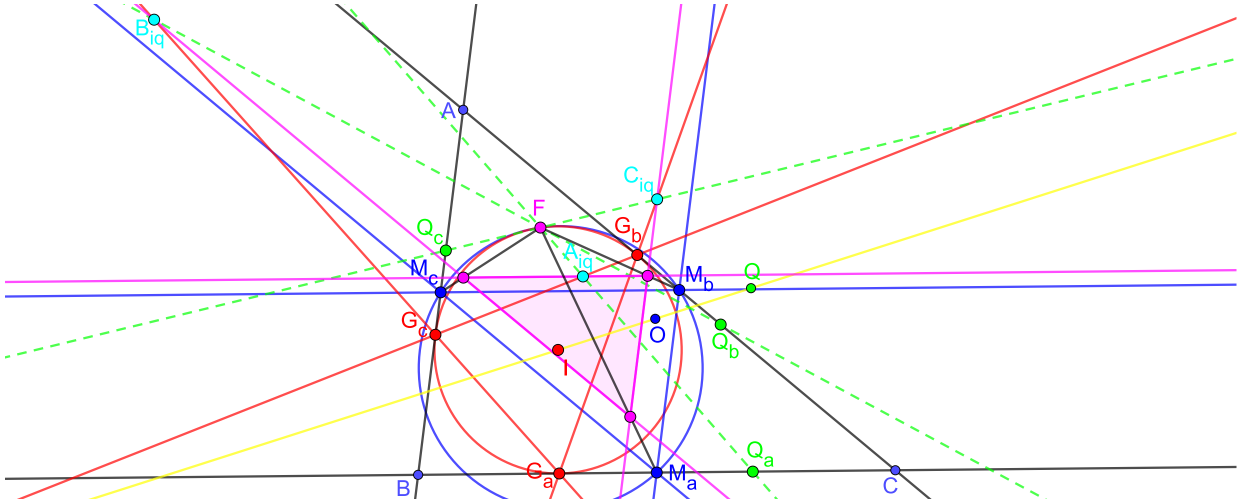

Рис. 17. Случай $P = I$***,*** $R = O$

3.5 Основная теорема равносильно равенству $FA_{rq}/FA_{pq} = FB_{rq}/FB_{pq} = FC_{rq}/FC_{pq}$. Аналогично, выполнено равенство $FA_{rp}/FA_{qp} = FB_{rp}/FB_{qp} = FC_{rp}/FC_{qp}$. Пусть точка R такова, что $R_bR_c \parallel A_{pq}A_{qp}$. Тогда существует гомотетия с центром F, переводящая R_bR_c в $A_{pq}A_{qp}$. Эта гомотетия переводит A_{rq} в A_{pq} и A_{rp} в A_{qp}. Из приведенных выше равенств следует, что эта гомотетия переводит треугольник $R_aR_bR_c$ в треугольник, образованный прямыми $A_{pq}A_{qp}$, $B_{pq}B_{qp}$, $C_{pq}C_{qp}$, откуда следует утверждение задачи.

3.6 Хорошо известно, что прямые, симметричные ℓ относительно средних линий треугольника пересекаются в некоторой точке X. При этом точка P, симметричная X относительно M_bM_c, лежит на прямой ℓ и на окружности (AM_bM_c). (Если прямая проходит через ортоцентр треугольника, то прямые, симметричные ей относительно сторон, пересекаются на описанной окружности). Используя задачу **3.2** и прямую Симсона точки P относительно треугольника AM_bM_c, получаем $PF_\ell \perp BC$. Ясно, что $PX \perp BC$. Аналогичные утверждения верны для точек, симметричных X относительно других средних линий. Значит, F_ℓ совпадает с X (см.рис. 18).

3.7 Точка F_ℓ лежит на этих окружностях по теореме Куланина для случая, когда P совпадает с A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ. Пусть A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно O. По теореме Паскаля точка пересечения $A'A_\ell$ и $B'B_\ell$ лежит на описанной окружности треугольника ABC. Значит, прямые $A'A_\ell$, $B'B_\ell$, $C'C_\ell$ пересекаются в некоторой точке F'_ℓ на описанной окружности. Т.к. $\angle A_\ell F'_\ell A = \angle A'F'_\ell A = 90°$, то точка F'_ℓ лежит на нужных окружностях. Точка H лежит на $F_\ell F'_\ell$, поскольку степени H относительно окружностей равны $HH_a \cdot HA = HH_b \cdot HB = HH_c \cdot HC$ (см. рис. 19).

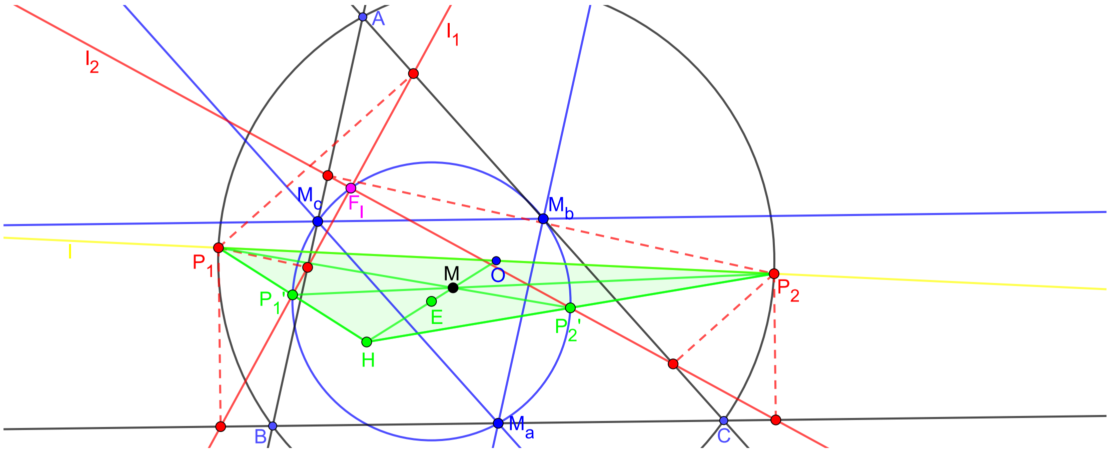

Рис. 18.

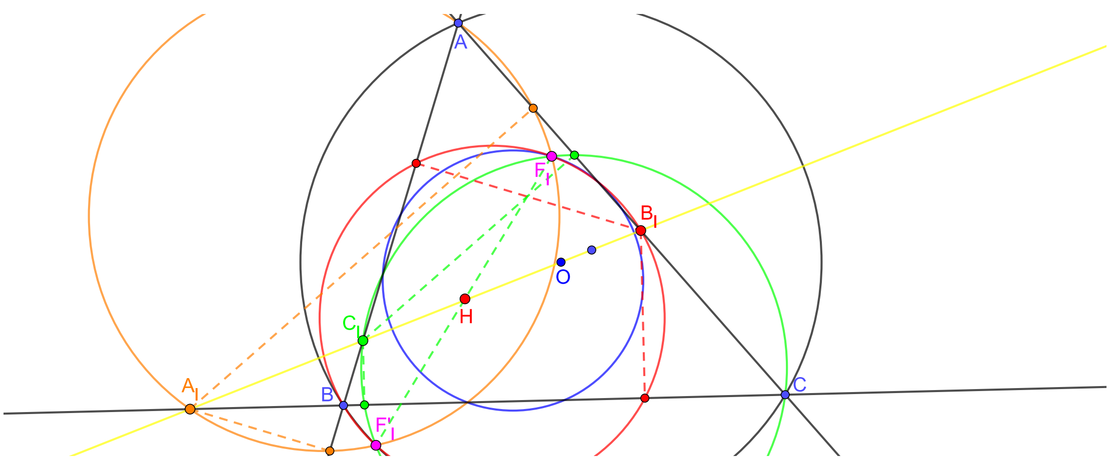

Рис. 19.

3.8 Рассмотрим четырехугольник $H_aH_bH_cF_\ell$, вписанный в окружность Эйлера ε. Его противоположные стороны H_aH_c и $F_\ell H_b$ пересекаются в точке B_{hh}, а стороны H_aH_b и $F_\ell H_c$ — в точке C_{hh}, в то время как диагонали H_aF_ℓ и H_bH_c пересекаются в точке A_{hh}. Отсюда следует, что треугольник $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$ является автополярным относительно окружности Эйлера ε.

Теперь докажем, что стороны этого треугольника содержат вершины треугольника ABC. В самом деле, рассмотрим четырехугольник $H_cM_cH_bM_b$, также вписанный в окружность ε. Его диагонали пересекаются в точке A_{hh}, а боковые стороны — в точке A, поэтому точка A лежит на поляре точки A_{hh}. Но полярой точки A_{hh} является прямая $B_{hh}C_{hh}$, поэтому точка A лежит на $B_{hh}C_{hh}$. Рассуждения для остальных вершин абсолютно аналогичны (см. рис. 20).

Кроме того, эта задача является частным случаем следующей.

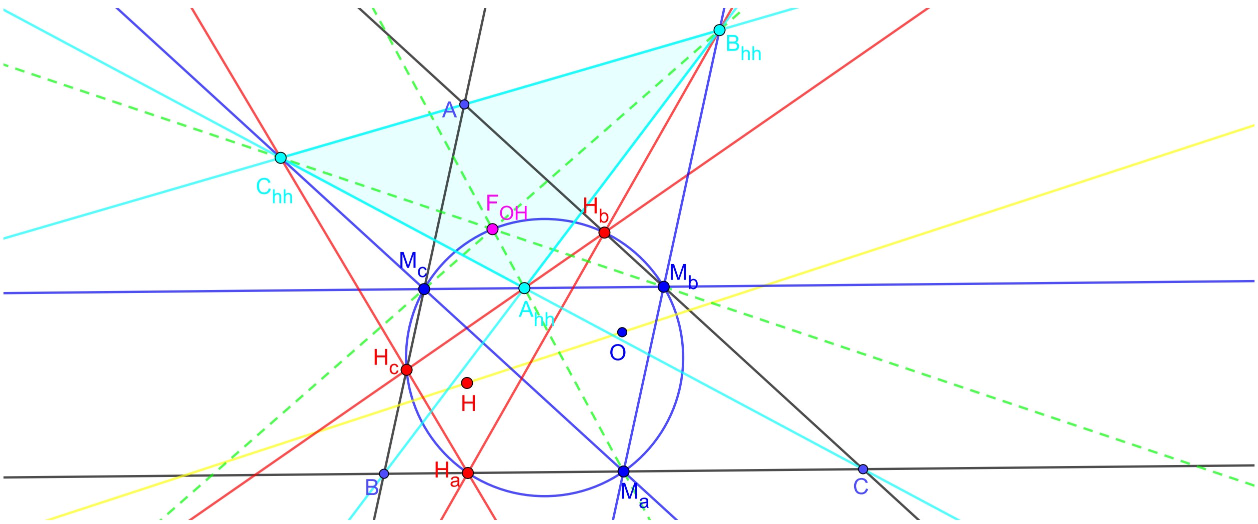

Рис. 20.

3.9 a) Двойное отношение прямых $P_aB, P_aP_c, P_aA, P_aP_b$ равно -1. Пересекая с прямой AB_{pq} получаем, что точки $AB_{pq} \cap BC$, B_{pq}, A, $AB_{pq} \cap P_aP_b$ образуют гармоническую четверку. Аналогично, точки $AB_{pq} \cap BC$, B_{pq}, A, $AB_{pq} \cap Q_aQ_b$ образуют гармоническую четверку. Поэтому AB_{pq}, P_aP_b, Q_aQ_b пересекаются в одной точке, т.е. A лежит на прямой $B_{pq}C_{pq}$.

b,c) По теореме Паппа точка пересечения P_bQ_c с P_cQ_b лежит на PQ. Аналогично для точек пересечения P_aQ_c с P_cQ_a и P_aQ_b с P_bQ_a. По теореме Паскаля шестиугольник $P_aQ_bP_cQ_aP_bQ_c$ вписан в конику Ω. Пусть F — точка пересечения $B_{pq}P_b$ с $C_{pq}P_c$. По теореме Паскаля и пункту а) шестиугольник $FP_bQ_bQ_aQ_cP_c$ вписан в конику Ω. Аналогичное утверждение верно для точки пересечения $A_{pq}P_a$ с $C_{pq}P_c$, откуда прямые $A_{pq}P_a$, $B_{pq}P_b$, $C_{pq}P_c$ пересекаются на конике Ω. Это доказывает пункт с). Теперь пункт b) доказывается аналогично предыдущей задаче.

3.10 Пусть точка X_a движется дробно-линейно по BC. Тогда X_b и X_c тоже двигаются дробно-линейно по AC и AB соответственно.

- достаточно доказать для трех положений точки X_a. Случаи $X_a = B, C, M_a$ следуют из предыдущей задачи;

- Точка X пересечения BX_b и CX_c двигается дробно-линейно по некоторой конике, проходящей через B и C (доказательство аналогично решению задачи **0.11**). Эта коника проходит через A, т.к. X совпадает с A, когда X_a — точка пересечения BC с $B_{hh}C_{hh}$.

Поэтому достаточно доказывать, что AX проходит через X_a для трех положений точки X_a. Одно положение — $X_a = X = B$, второе — $X_a = X = C$, третье — $X_a = M_a$, $X = M$ (и четвертое — $X_a = H_a$, $X = H$).

- Точка X движется по равнобокой гиперболе $ABCHM$. Известно, что описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через центр этой гиперболы (простого доказательства этого факта нам не известно; см. книгу А.Акопян, А.Заславский "Геометрические свойства кривых второго порядка", Теорема 4.3). Центр этой гиперболы совпадает с обобщенной точкой Фейербаха для прямой, изогонально сопряженной данной гиперболе, т.е. с точкой F_{OL} (см. рис. 21).

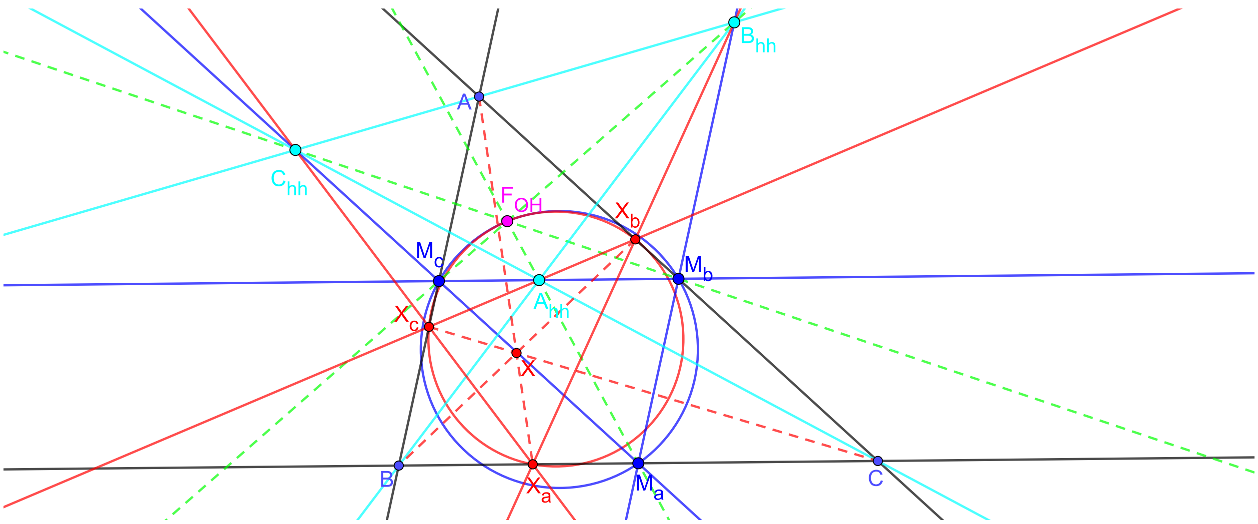

Рис. 21.

3.11 Приведем план доказательства того, что треугольники $Z_aZ_bZ_c$ гомотетичны (информации про центр гомотетии не будет).

Нужно доказать, что BC, Z_bZ_c, $A_{pp}A_{qq}$ параллельны (используем задачу 3.2: $A_{pp}A_{qq}$ — средняя линия). Сводим к проективному утверждению:

Даны треугольники $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$ и точка F. Пусть A_{pp} — точка пересечения P_bP_c с FP_a, точки $A_{pq}, B_{qp}, \ldots$ определяются аналогично (как в задаче 3.3). Пусть Z_b и Z_c — точки пересечения $A_{pq}C_{pq}$ с $A_{qp}C_{qp}$ и $A_{pq}B_{pq}$ с $A_{qp}B_{qp}$. Тогда прямые P_aP_b, $A_{pp}A_{qq}$ и Z_bZ_c пересекаются в одной точке.

Двойные отношения прямых $A_{qp}Q_c$, $A_{qp}B_{qp}$, $A_{qp}F$, $A_{qp}Q_a$ и прямых $A_{pq}P_b$, $A_{pq}C_{pq}$, $A_{pq}F$, $A_{pq}P_a$ равны — проецируем из A_{qp} на прямую Q_cQ_a, потом из F на прямую P_bP_a, потом из A_{pq} (и меняем порядок, не меняя двойное отношение). Аналогично, двойные отношения прямых $A_{qp}Q_c$, $A_{qp}C_{qp}$, $A_{qp}F$, $A_{qp}Q_a$ и прямых $A_{pq}P_b$, $A_{pq}B_{pq}$, $A_{pq}F$, $A_{pq}P_a$ равны. Поэтому можно применить следующий факт:

Пусть f — сохраняющее двойные отношения преобразование, сопоставляющее каждой прямой l через точку A_{qp} прямую $f(l)$ через точку A_{pq}. Пусть m и n — любые две прямые через A_{qp}. Рассмотрим прямую, соединяющую точку пересечения m и $f(n)$ с точкой пересечения n и $f(m)$. Тогда эта прямая проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора прямых m и n.

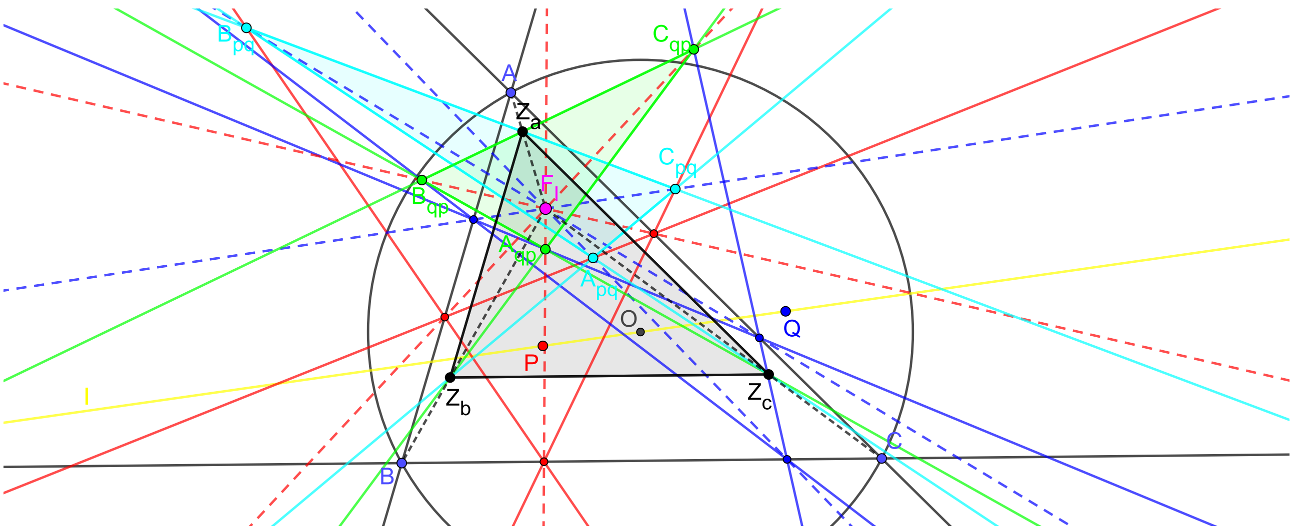

Рис. 22.