Метод перераспределения зарядов*

Егор Бакаев, Вера Буланкина,
Александр Полянский, Андрей Рябичев, Григорий Челноков

1 Подсчёт двумя способами

1.1. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

Решение. Заменим каждую звёздочку числом $1/k$, где k — количество звёздочек в ее строке (столбце). Тогда сумма чисел в каждой непустой строке равна 1, следовательно, сумма всех чисел в таблице равна числу непустых строк. Но, аналогично, она равна и числу непустых столбцов.

1.2. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф — не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них — соперников-гномов. Докажите, что $D \leqslant \frac{10}{11}E$.

Решение. Дадим каждому эльфу заряд 1, тогда суммарный заряд равен E. Если эльф подрался с k гномами, то пусть отдаст каждому из них заряд $\frac{1}{k}$.

Если гном подрался с m эльфами, то каждый из них подрался не больше чем с $m-1$ гномами ($m \leqslant 11$), а значит отдаст ему заряд не меньше $\frac{1}{m-1}$. Значит каждый гном получит заряд не меньше $\frac{m}{m-1}$, что не меньше $\frac{11}{10}$.

Тогда суммарный заряд гномов не меньше $\frac{11}{10}D$, при этом он равен E. Отсюда получаем неравенство $\frac{11}{10}D \leqslant E$, которое легко преобразуется к требуемому виду.

1.3. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.

Решение. Дадим каждому непустому столбцу заряд -1, а каждой непустой строке заряд 1. Тогда сумма зарядов отрицательна. Теперь пусть каждый ряд (столбец или строка) раздаст свой заряд поровну всем звездочкам, которые в нем стоят. Так как суммарный заряд отрицательный, то найдется звездочка с отрицательным зарядом. Она и является искомой, ведь ее столбец дал ей больший по модулю заряд, чем дала ее строка, а значит, в столбце меньше звездочек чем в строке.

1.4. В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k+1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.

Решение. В этом решении будем следить только за изменением заряда книг. Пусть если книга сначала стоит на полке с n книгами, то она забирает у этой полки заряд $\frac{1}{n}$, и если в конце стоит на полке с m книгами, то она отдает полке заряд $\frac{1}{m}$. Тогда суммарный заряд книг уменьшился на k. Но заряд книги не может измениться больше чем на 1.

*Вопросы и замечания пишите на alexander.polyanskii@yandex.ru

Значит, есть по крайней мере $k+1$ книг, которые отдали больше чем получили. Это как раз те книги, количество которых требовалось оценить.

1.5. Таблица $n \times n$ заполнена **а)** нулями и единицами **б)** целыми неотрицательными числами так, что если число в какой-то клетке таблице равно 0, то сумма всех чисел в ее кресте[1] не меньше 1000. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в таблице.

Решение. **а)** Пусть в таблице стоит x единиц. Поместим в каждую клетку c с 1 заряд, равный $2n$. Раздадим заряд n поровну между нулями столбца клетки c, а другой заряд n — между нулями строки клетки c. Отметим, что суммарный заряд равен $2nx$.

Нулей всего $n^2 - x$. Пусть столбце с нулевой клеткой c' стоит s единиц, а в строке — t единиц. Тогда $s + t \geqslant 1000$. Итоговый заряд, который получит клетка c', равен $sN/(N - s) + tN/(N - t)$. Докажите самостоятельно, что он не меньше $1000n/(n - 500)$. Значит,

$$2nx \geqslant \frac{1000n(n^2 - x)}{n - 500`}.$$

Из последнего неравенства следует, что $x \geq 500n$.

1.6. Пусть есть выпуклый n-угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Тогда

$$m \geqslant n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\right).$$

Решение. В этом решении будем следить только за изменением заряда книг. Пусть если книга сначала стоит на полке с n книгами, то она забирает у этой полки заряд $\frac{1}{n}$, и если в конце стоит на полке с m книгами, то она отдает полке заряд $\frac{1}{m}$. Тогда суммарный заряд книг уменьшился на k. Но заряд книги не может измениться больше чем на 1. Значит, есть по крайней мере $k+1$ книг, которые отдали больше чем получили. Это как раз те книги, количество которых требовалось оценить.

1.7. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

Решение. Дадим каждой точке пересечения заряд 1. Если она в пересечении k окружностей, то пусть отдаст им по $1/k$. Покажем, что теперь у каждой окружности заряд не менее 1.

Выберем на произвольной окружности s точку P, которая отдала этой окружности не больше, чем другие точки, пусть $1/m$. Тогда через P проходит $m - 1$ окружностей, пересекающихся с s в каких-то $m - 1$ различных точках, отличных от P. Таким образом, на s не менее m точек пересечения, и все они отдали ей хотя бы по $1/m$. Значит, каждая окружность получила заряд не менее 1. Следовательно, количество окружностей не превышает количество точек пересечения.

1.8. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдётся два с общей стороной.

Решение. Предположим, нашлось разбиение, в котором никакие два треугольника не имеют общей стороны. Присвоим каждой вершине разрезания заряд, равный сумме сходящихся в ней углов треугольников. Таким образом, вершины бывают трех видов:

1. вершины квадрата — с зарядом $\frac{\pi}{2}$;

2. вершины, лежащие на стороне квадрата или на стороне одного из треугольников — с зарядом π;

[1] *Крестом* клетки называется объединение её столбца и её строки.

3. вершины, не лежащие на стороне квадрата или треугольника – с зарядом 2π.

Пусть есть a вершин второго типа и b вершин третьего типа. Тогда заряды в сумме дают $(a + 2b + 2)\pi$, следовательно, число треугольников равно $a + 2b + 2$.

Построим следующий плоский граф. Возьмём все вершины треугольников в качестве вершин. Проведём в каждом треугольнике по три ребра (см. рис. 1) и посадим на получившуюся треугольную грань заряд π. Остальные грани имеют не менее 3 вершин, разобьём их диагоналями на треугольники и посадим на каждый из них заряд 0.

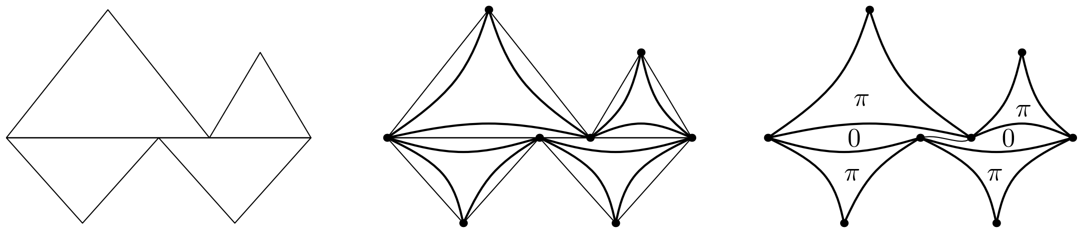

Рис. 1: Построение графа по разрезанию квадрата на треугольники.

Итак, в полученном плоском графе Γ все грани треугольные и имеют заряд 0 или π. По построению сумма зарядов равна $(a + 2b + 2)\pi$ и никакие две грани с зарядами π не граничат по ребру. Из равенства $2E(\Gamma) = 3F(\Gamma)$ и формулы Эйлера получаем соотношение

$$E(\Gamma) = 3V(\Gamma) - 6 = 3(a + b + 4) - 6.$$

Теперь пусть каждая грань отдаст по трети своего заряда смежным с нею рёбрам. Средний заряд рёбер будет равен $\frac{(a+2b+2)\pi}{3a+3b+12-6} \geqslant \frac{1}{3}\pi$. Но как минимум одно ребро имеет заряд 0. Именно, хотя бы одно ребро было проведено за пределами квадрата, его-то заряд точно нулевой. Следовательно, найдётся ребро, по которому граничат два треугольника с зарядом π, противоречие.

1.9*. На плоскости нарисовано n прямых в общем положении (любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдётся не менее $n - 2$ треугольников.

Решение. Нетрудно убедиться в том, что на этих прямых будет образовано $n(n - 2)$ отрезков, а на плоскости будет $m = \frac{n^2-3n+2}{2}$ конечных граней. Пусть среди них t треугольников.

Рассмотрим отрезок AB. Пусть две другие данные прямые, кроме AB, проходящие через A и B, пересекаются в точке C. Назовем ту полуплоскость относительно AB, в которой лежит точка C, *верхней* для отрезка AB.

Дадим каждому отрезку AB заряд 1 и передадим этот заряд в ту смежную с ним грань, которая лежит в верхней для AB полуплоскости. Каждый треугольник получит заряд 3. Докажем, что остальные грани получат не больше 2. Если грань получает заряд от стороны AB, то внешние углы A и B этой грани в сумме больше 180°. Сумма внешних углов многоугольника равна 360°, так что получить заряд от трех ребер можно, только когда все эти три ребра попарно соседние, то есть только в случае треугольника.

Исходная сумма зарядов отрезков равна получившейся сумме зарядов граней, откуда получаем неравенство: $n(n-2) \leqslant 3t + 2(m - t) = 2m + t$. Преобразовав, получим $n^2 - 2n \leqslant n^2 - 3n + 2 + t$. Отсюда $n - 2 \leqslant t$.

Другое решение см. статье [1].

2 Задачи о графах

Планарные графы

Выделим общую идею решения задач этого раздела.

Напомним формулу Эйлера для плоского графа Γ: $|V(\Gamma)|-|E(\Gamma)|+|F(\Gamma)|=2$. Домножив обе части на (-2) и учитывая, что

$$2|E(\Gamma)|=\sum_{v\in V(\Gamma)}\deg v=\sum_{f\in F(\Gamma)}\deg f,$$

представим ее в виде

$$\sum_{v\in V(\Gamma)}(\alpha\deg v-2)+\sum_{f\in F(\Gamma)}((1-\alpha)\deg f-2)=-4. \qquad (1)$$

Теперь, выбирая каждый раз подходящее α, будем получать различные тождества. Назначаем вершинам и граням заряды согласно тождеству, при этом суммарный заряд будет отрицательным. Решаем задачу от противного. Исходя из заданных на граф ограничений, указываем правила перераспределения зарядов так, чтобы в итоге заряд каждой вершины и каждой грани стал неотрицательным. Таким образом мы будем получать противоречие.

2.1. Дан выпуклый многогранник, у которого нет четырехугольных и пятиугольных граней. Докажите, что у него по крайней мере 4 треугольные грани.

Решение. Спроектируем многогранник на плоскость так, чтобы получился плоский граф. Умножив (1) при $\alpha=\frac{2}{3}$ на 3, получаем:

$$\sum_{v\in V(\Gamma)}(2\deg v-6)+\sum_{f\in F(\Gamma)}(\deg f-6)=-12.$$

Дадим вершинам и граням заряды согласно получившемуся тождеству: назначим каждой вершине v заряд $(2\deg v-6)$, а каждой грани f заряд $(\deg f-6)$. Так как у любой вершины степень не менее 3, то заряд у нее неотрицательный. Если $\deg f=3$, то ее заряд -3, а при $\deg f\geqslant 6$ ее заряд неотрицательный. Так как суммарный заряд равен -12, то найдется хотя бы 4 грани с зарядом -3, то есть 4 треугольные грани.

Заметим, что достаточно было назначить заряды и провести подсчет, а их перераспределение не понадобилось.

2.2. Дан планарный граф с $\delta(\Gamma)\geqslant 2$, все циклы в котором длины по крайней мере 7. Докажите, что найдется ребро веса не больше 5.

Решение. Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha=\frac{1}{3}$, получаем

$$\sum_{v\in V(\Gamma)}(\deg v-6)+\sum_{f\in F(\Gamma)}(2\deg f-6)=-12.$$

Так как все грани треугольные, то второе слагаемое равно нулю:

$$\sum_{v\in V(\Gamma)}(\deg v-6)=-12.$$

Дадим каждой вершине v заряд $\deg v-6$. Пусть каждая вершина степени по крайней мере 7 отдаст заряд равный $\frac{1}{3}$ в каждую соседнюю с ней вершину степени 5.

Предположим, что нет грани $(5,6,6)$. Тогда у вершины степени 5 не более двух соседей имеют степень 6; т.е. у нее по крайней мере три соседа степени не меньше 7. При $n\geqslant 7$ вершина степени n инцидентна не более $\frac{n}{2}$ вершинам степени 5, т.к. все грани треугольные и нет ребёр вида 5–5.

Тогда заряд каждой вершины степени 5 станет не менее $-1+3\cdot\frac{1}{3}=0$. Заряд вершины степени 6 останется 0. Заряд вершины степени 7 останется не менее $1-3\cdot\frac{1}{3}=0$. При $n\geqslant 8$ заряд вершины степени n останется не менее $n-6-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{6}n-6\geqslant\frac{5}{6}\cdot 8-6>0$.

2.3. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma)\geqslant 5$, все грани которого — треугольники, а также нет двух соседних вершин степени 5. Докажите, что найдётся грань, степени вершин которой равны 5, 6 и 6 соответственно.

Решение.

Подставим $\alpha = \frac{1}{3}$ в равенство (1) и умножим на 3, получим

$$\sum_{v \in V}(\deg v - 6) + \sum_{f \in F}(2\deg f - 6) = -12.$$

Т.к. все грани треугольные, то второе слагаемое равно нулю:

$$\sum_{v \in V}(\deg v - 6) = -12.$$

Дадим каждой вершине v заряд $\deg v - 6$. Пусть каждая вершина степени по крайней мере 7 отдаст заряд равный $\frac{1}{3}$ в каждую соседнюю с ней вершину степени 5.

Предположим, что нет грани $(5, 6, 6)$. Тогда у вершины степени 5 не более двух соседей имеют степень 6; т.е. у нее по крайней мере три соседа степени не меньше 7. При $n \geqslant 7$ вершина степени n инцидентна не более $\frac{n}{2}$ вершинам степени 5, т.к. все грани треугольные и нет ребёр вида 5–5.

Тогда заряд каждой вершины степени 5 станет не менее $-1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Заряд вершины степени 6 останется 0. Заряд вершины степени 7 останется не менее $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. При $n \geqslant 8$ заряд вершины степени n останется не менее $n - 6 - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}n - 6 \geqslant \frac{5}{6} \cdot 8 - 6 > 0$.

2.4. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 5$. Докажите, что найдется ребро веса не больше 11.

Решение. Умножая на 2 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)}(\deg v - 4) + \sum_{f \in F(\Gamma)}(\deg f - 4) = -8.$$

Дадим каждой вершине v заряд $(\deg v - 4)$, а каждой грани f заряд $(\deg f - 4)$.

Пусть каждая вершина степени 5 отдает всем граням, которым принадлежит, по $\frac{1}{5}$, степени 6 — по $\frac{1}{3}$, степени не меньше 7 — по $\frac{2}{5}$.

У вершин степени 5 и 6 заряд станет равным 0. При $n \geqslant 7$ у вершины степени n заряд станет равным $n - 4 - \frac{2}{5}n = \frac{3}{5}n - 4 \geqslant \frac{3}{5} \cdot 7 - 4 > 0$.

У всех граней степени больше 3 заряд изначально неотрицательный и при перераспределении не уменьшается. Теперь рассмотрим треугольную грань. Предположим, что у каждого ребра вес не меньше 12. Тогда набор степеней вершин треугольной грани имеет вид либо $(5, 7+, 7+)$, либо $(6+, 6+, 6+)$[2]. В первом случае грань получает от вершин заряд $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$, во втором $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, что делает ее заряд равным 0.

2.5.

Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 3$. Докажите, что найдется такая пара из грани f и вершины v в ней, что $\deg(v) = 3$ и $\deg(f) \leqslant 5$ или $\deg(v) \leqslant 5$ и $\deg(f) = 3$.

Решение. Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)}(\deg v - 4) + \sum_{f \in F(\Gamma)}(\deg f - 4) = -8.$$

Дадим каждой вершине v заряд $(\deg v - 4)$, а каждой грани f заряд $(\deg f - 4)$.

Предположим, что у каждой грани степени 3 все вершины имеют степень не меньше 6, и вершины степени 3 есть только у граней степени не меньше 6.

Пусть каждая вершина степени не меньше 6 отдает, граням в которых она лежит, по $\frac{1}{3}$. Заряд таких вершин останется неотрицательным, а у треугольных граней станет равным 0. Также пусть каждая грань, у которой не менее 6 вершин, отдает своим вершинам по $\frac{1}{3}$. У таких граней заряд останется неотрицательным, а у вершин степени 3 он станет равным 0. У остальных вершин и граней заряд неотрицательный изначально и он не уменьшится.

[2] Под $k+$ подразумеваем число, не меньшее k.

2.6. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geqslant 3$. Докажите, что у Γ есть не более чем 5-угольная грань, в которой степени всех вершин, кроме возможно одной, не превосходят 11.

Решение. Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{2}{3}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (2 \deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (\deg f - 6) = -12.$$

Дадим вершине v заряд, равный $2 \deg v - 6$, а грене f заряд, равный $\deg f - 6$.

Предположим противное, то есть у каждой грани степени по крайней мере 5 найдётся хотя бы 2 вершины степени не менее 12.

Пусть каждая вершина степени $n \geqslant 12$ отдаст заряд $\frac{3}{2}$ каждой гране, в которую она входит. Тогда её заряд становится равным $2n - 6 - \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n - 6 \geq 0$. Каждая грань степени не более 5 тогда получит заряд от по крайней мере двух вершин. Поэтому её заряд будет не менее $-3 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$. Все остальные вершины и грани изначально имели неотрицательный вес, а в процессе перераспределния зарядов их заряд не уменьшился. Противоречие.

Легкие раскраски

2.7. а) Докажите, что любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов правильным образом.

б) Пусть для любого подграфа некоторого графа найдётся вершина графа степени не превосходящей $d-1$ или индуцированный чётный цикл, степень каждой вершины которого не превосходит d. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в d цветов.

Решение. а) В каждой грани не менее трех ребер, значит, $3F \leqslant 2E$. Подставив это неравенство в формулу Эйлера, получим: $6 = 3V - 3E + 3F \leqslant 3V - 3E + 2E = 3V - E$. Отсюда $0 < 3V - E$ и $2E < 6V$. Таким образом, сумма степеней вершин меньше чем $6V$. Значит, в любом планарном графе найдется вершина со степенью меньше 6.

Докажем по индукции, что любой планарный граф на n вершинах можно правильным образом раскрасить в 6 цветов. База очевидна. Докажем переход: пусть это верно для всех графов на k вершинах. Рассмотрим произвольный граф Γ на $k+1$ вершине, пусть v — его вершина степени меньше 6. Раскрасим граф $\Gamma \setminus v$ в 6 цветов, после чего покрасим вершину v — для нее найдется доступный цвет.

б) Докажем это утверждение для всех подграфов Γ по индукции по количеству вершин n. База очевидна. Докажем переход: пусть это верно для всех графов на не более чем k вершинах. Рассмотрим произвольный подграф Γ на $k+1$ вершине графа Γ.

Если в Γ найдётся вершина v степени не превосходящей $d-1$, то раскрасим граф $\Gamma \setminus v$, затем раскрасим вершину v.

Иначе в Γ найдётся чётный цикл $v_1 v_2 \ldots v_k$, степень каждой вершины которого не превосходит d. Обозначим как C множество его вершин. Правильно раскрасим граф $\Gamma \setminus C$. Теперь покажем, как покрасить C. Из каждой вершины множества C выходит не более $d-2$ ребер в множество $\Gamma \setminus C$, значит для этих вершин остается хотя бы по 2 варианта, в какие цвета их можно покрасить.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Если каждой вершине четного цикла назначен список из 2 цветов, в которые ее возможно покрасить, то этот цикл можно раскрасить правильным образом согласно спискам.*

Предположим, это сделать нельзя. Если у всех вершин списки одинаковые, то цикл можно раскрасить, чередуя цвета. В противном случае найдутся две соседние вершины с разными списками, пусть это v_1 и v_k. Покрасим v_1 в цвет, которого нет в списке v_k. Для вершины v_2 останется хотя бы один доступный цвет, покрасим ее. Потом покрасим v_3, v_4 и так далее до v_k. Таким образом, любые две соседние вершинып покрашены в разные цвета, включая пару v_1 и v_k.

2.8. **а)** Докажите, что для любого заданного k найдется такое n, что полный двудольный граф $K_{n,n}$ не будет k-выбираемым. Хотя и является 2-раскрашиваемым, как любой двудольный граф.

б) Докажите, что цикл четной длины не только 2-раскрашиваем, но и 2-выбираем.

Решение. **а)** Пусть в первой доле будут вершины с номерами от 1 до k, у вершины номер i список $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik})$ для всех i, и пусть все эти k^2 цветов различны. А во второй доле — k^k вершин со всеми возможными списками вида $(c_{1x_1}, c_{2x_2}, \ldots, c_{kx_k})$, где x_i это число от 1 до k для всех i.

Тогда для любой раскраски вершин первой доли найдется вершина второй доли, список которой состоит как раз из этих цветов, и ее не получится раскрасить. По условию требовалось, чтобы в долях было поровну вершин, но этого легко достичь, добавляя вершины с произвольными списками в меньшую долю.

б) См. лемму из решения задачи 2.7б.

2.9. а) Дан планарный граф, внешняя грань которого это цикл $v_1 \ldots v_k v_1$, остальные грани треугольные. Вершинам v_1 и v_2 соответствуют списки из двух цветов, каждой другой вершине внешней грани приписан список из трех цветов, а каждой внутренней вершине приписан список из 5 цветов. Докажите, что существует правильная списочная раскраска, соответствующая этим спискам.

б) Докажите, что для планарного графа Γ выполняется $\mathrm{ch}(\Gamma) \leqslant 5$.

Решение. См. теорему 5.4.2 книгу Дистеля [2]

2.10. Пусть Γ — планарный граф с $\Delta(\Gamma) \geqslant 11$. Каждой вершине назначен список из $\Delta(\Gamma)$, а каждому ребру — из $(\Delta(\Gamma)+2)$. Тогда можно так выбрать цвета из списков, чтобы получить тотальную списочную покраску.

Решение. Сперва докажем следующую лемму:

Лемма. *В планарном графе* Γ*, у которого степени всех вершин не менее 3, есть ребро с весом не больше 11 или цикл из 4 вершин, проходящий через 2 вершины степени 3 и соседнюю с ними вершину степени не больше 10.*

Доказательство леммы. Назовем ребро *лёгким*, если его вес не больше 11. Пусть в Γ нет лёгких рёбер и специальных 4-циклов, описанных в условии.

Если у какой-то грани больше 3 ребер, в ней можно провести нелёгкую диагональ. Действительно, средний вес диагоналей в грани равен среднему весу рёбер её периметра, следовательно найдётся диагональ с весом хотя бы 12.

Заметим, что после добавления ребра специальные 4-циклы из условия леммы появиться не могут. Добавляя нелегкие рёбра, получим граф Γ' (возможно, имеющий кратные рёбра), у которого все грани треугольные. Из формулы Эйлера получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma')} (\deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma')} (2 \deg f - 6) = -12.$$

Назначим каждой вершине v вес $(\deg v - 6)$, а грани f вес $(2 \deg f - 6)$.

Пусть каждая вершина v степени не больше 5 забирает вес $\frac{6-\deg v}{\deg v}$ от каждой соседней вершины степени не меньше 7, после чего вес v становится равным нулю. Покажем, что после перераспределения остальные веса останутся неотрицательными, и, поскольку суммарный вес отрицателен, получим противоречие.

Γ' — это триангуляция без легких ребер, то каждая вершина степени k имеет не более $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ соседей, которым она отдаёт вес. Вершина степени 7 отдает вес только вершинам степени 5, поэтому она отдает веса не больше $3 \cdot \frac{1}{5}$ и ее вес остается положительным. Вершина степени 8 отдает вес только вершинам степени не меньше 4, поэтому всего отдает веса не больше $4 \cdot \frac{1}{2}$ и ее вес остается неотрицательным. Если у вершины w степень не меньше 11, то не более чем $\lfloor \frac{\deg w}{2} \rfloor$ её соседей забирают не больше чем по 1, и вес w остается не менее $\lceil \frac{\deg w}{2} \rceil - 6$, то есть остается неотрицательным.

Осталось рассмотреть случай, когда степень вершины w равна 9 или 10. Так как все грани треугольные, то соседи w образуют замкнутый маршрут длины $\deg w$. Ни одна вершина степени 3 не встречается в таком маршруте дважды, поскольку кратные рёбра не могут выходить из вершины степени 3. Так как нет легких ребер и запрещены некоторые специальные 4-циклы, то в этом маршруте между двумя вершинами степени 3 должно быть хотя бы три ребра.

Итак, у вершины w степени 9 не более трёх соседей степени 3, и когда их ровно 3, то у w остается вес 0, т.к. больше никакие вершины не отдают ей вес. Если у неё 2 соседа степени 3, то не больше двух соседей степени 4 или 5, и снова вес останется неотрицательным. Если у неё 1 сосед степени 3, то не больше 3 соседей степени 4 или 5, и снова вес останется положительным. Случаи для вершины степени 10 рассматриваются аналогично.

Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Предположим, что есть графы, не удовлетворяющие условию задачи, рассмотрим минимальный (по количеству ребер) такой граф Γ и соответствующие списки вершин.

Либо у Γ есть вершина степени не больше 2, либо к нему применима лемма. Рассматривая степени вершин у лёгких рёбер, имеем три возможных случая:

1. В Γ есть ребро uv с $\deg u \leqslant 2$.

2. В Γ есть ребро uv с $\deg u = 3$ и $\deg v \leqslant 10$.

3. В Γ есть ребро uv с $\deg u \leqslant 5$ и $\deg(u) \leqslant 7$.

Так как Γ минимальный граф, для которого нет раскраски, то для графа $\Gamma - uv$ раскраска есть. Временно удалим цвет вершины u, мы вновь раскрасим ее после того, как выберем цвет ребра uv.

Рассмотрим, в каждом из случаев во сколько цветов могут быть покрашены элементы, смежные с ребром uv (считая, что u не имеет цвета). В первом случае оно не больше $\Delta(\Gamma) + 1$, во втором — не больше $2 + 1 + 9$, в третьем — $4 + 1 + 6$. Длина списка цветов у ребра $\Delta(\Gamma) + 2 \geqslant 13$, так что для ребра uv останется свободный цвет.

Осталось покрасить вершину u. Так как $\deg u \leqslant 5$, то недоступно не более 10 цветов, а количество цветов в списке $\Delta(\Gamma) \geqslant 11$, так что и для u найдется свободный цвет.

3 Серьезные задачи

3.1 Спичечные графы

Ключевая задача 1. Докажите, что не существует 5-регулярного спичечного графа.

3.1.1. Дан граф минимальных расстояний на n вершинах, все вершины которого находятся в общем положении[3]. Докажите, что а) число рёбер меньше $5n/2$; б) найдётся постоянная c меньшая $5/2$ такая, что число рёбер не больше cn.

в) Граф называется *интересным*, если он является графом минимальных расстояний и для любой вершины графа она и все её соседи находятся в общем положении[4]. Докажите, что для любого $c < 5/2$ найдется интересный граф с не менее чем $c|V(\Gamma)|$ ребрами.

Решение. б) На протяжении этого доказательства Γ всегда обозначает какой-либо граф минимальных расстояний. Поместим по единичному заряду в каждую вершину и каждую грань. Теперь заряд каждой грани поровну раздадим ее вершинам.

Т.к. Γ это граф минимальных расстояний, то степень каждой вершины не больше 5. Кроме того, в таком графе треугольная грань не может граничить с двумя другими треугольными гранями (в этой конструкции три вершины лежат на одной прямой).

[3]То есть никакие три не лежат на одной прямой.

[4]при этом все вершины графа не обязаны быть в общем положении

Таким образом, никакая вершина не может иметь заряд больше $1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}$, и заряд $\frac{5}{2}$ может быть только у вершины степени 5, смежной с гранями, степени которых это 3, 3, 4+, 3, 4+ с точностью до перестановки по циклу. Назовем такую вершину *регулярной*.

Максимальный из зарядов нерегулярных вершин обозначим $\frac{5}{2} - \varepsilon$. Как уже доказано, $\varepsilon > 0$. Дальнейшее решение будет заключаться в том, что мы применим следующую лемму (докажите ее).

Лемма 1. Если для некоторого $\delta > 0$ в Γ есть хотя бы $\delta V(\Gamma)$ нерегулярных вершин, то $E(\Gamma) \leqslant (\frac{5}{2} - \delta\varepsilon)V(\Gamma)$.

Теперь докажем, что Γ удовлетворяет условиям леммы 1 для некоторого $\delta > 0$. Для этого понадобятся еще некоторые определения.

Назовем k-*окрестностью* вершины O такое множество вершин графа Γ, что до каждой из них есть путь из O не более чем из k ребер. Количество вершин в этом множестве обозначим $s(\Gamma, O, k)$. Назовем такую окрестность *достаточно большой*, если в ней есть нерегулярная вершина.

Лемма 2. Докажите, что существует оценка сверху количества вершин в k-окрестности, не зависящая от выбора вершины O графа Γ. Иными словами, есть функция $S(k)$ такая, что $s(\Gamma, O, k) \leqslant S(k)$ для любых Γ и O.

Докажите эту лемму самостоятельно. Подсказка: степени вершин ограничены сверху.

Теперь возьмем такое k, что для каждой регулярной вершины ее k-окрестность является достаточно большой. В каждой из них есть нерегулярная вершина. Таким образом, каждой регулярной вершине X сопоставлена нерегулярная вершина Y такая, что путь XY содержит не более k ребер. Тогда каждая нерегулярная вершина Y сопоставлена не более чем $S(k)$ регулярным вершинам. Таким образом, отношение количества регулярных вершин к количеству нерегулярных не больше $S(k)$, и можно применить лемму 1 для $\delta = \frac{1}{S(k)+1}$.

Осталось доказать, что такое k, не зависящее от графа, действительно можно рассмотреть:

Лемма 3. Докажите, что существует такое k, что любая k-окрестность любого графа минимальных расстояний является достаточно большой.

в) Указание: Соберите граф из конструкций из 3.

3.1.2. Решите ключевую задачу 1.

Решение. Данное решение взято из статьи [3].

Предположим противное, пусть такой граф Γ существует.

Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{3}$, получаем

$$-12 = \sum_{v \in V(\Gamma)} (\deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (2\deg f - 6) = \sum_{v \in V(\Gamma)} (-1) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (2\deg f - 6). \qquad (2)$$

Раздадим каждой вершине заряд (-1), а каждой грани f — заряд, равный $(2\deg f - 6)$. Из (2) следует, что суммарный заряд по всем вершинам и граням отрицательный.

Перераспределение зарядов будет следующим Рассмотрим грань $f \in F$ и вершину $x \in V$, принадлежащую этой грани. Пусть α — мера внутреннего угла грани f при вершине x. Если $\alpha > \frac{\pi}{3}$ мы забираем у грани f заряд, равный $\min\{1, \frac{3}{\pi}\alpha - 1\}$ и отдаем его вершине x. Покажем, что после такого перераспределения заряды каждой грани и каждой вершины будут неотрицательны.

Рассмотрим вершину $x \in V$. Обозначим через ℓ количество внутренних углов граней при этой вершине, которые больше, чем $\frac{\pi}{3}$, обозначим их величины через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$. Так как $\deg x = 5$, то $\ell > 0$. Если через какой-то из этих углов от грани его содержащей вершине x передастся заряд 1, то заряд в x уже будет неотрицателен. С другой стороны, если через каждый из этих углов вершине x передался заряд $\frac{3}{\pi}\alpha_i - 1$, где $i = 1, \ldots, \ell$, то общий заряд вершины увеличился на $\frac{3}{\pi}\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i - \ell$. При этом сумма углов при вершине x равна $2\pi \leq \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i + (5-\ell)\frac{\pi}{3}$, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i \geq 2\pi - (5-\ell)\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(\ell+1).$$

Но тогда заряд, полученный вершиной x по крайней мере $\frac{3}{\pi}\frac{\pi}{3}(\ell+1)-\ell = 1$. Таким образом заряд в вершине x после перераспределения неотрицательный.

Теперь докажем неотрицательность зарядов граней. Сначала рассмотрим случаи ограниченных граней. Начальный заряд грани $f \in F$ был равен $2\deg f - 3 \geq 0$. Тогда, если после перераспределения, заряд грани стал отрицательным, то значит по крайней мере один из ее внутренних углов больше, чем $\frac{\pi}{3}$.

Если $\deg f = 3$, то грань f — равносторонний треугольником (в силу спичечности графа), все углы в котором равны $\frac{\pi}{3}$. Но тогда ее заряд остается неотрицательным.

Если $\deg f = 4$, то грань f — ромб. Если только два его внутренних угла больше, чем $\frac{\pi}{3}$, то тогда отданный этой гранью заряд не больше 2, что оставляет общий заряд грани неотрицательным. Если все четыре угла больше $\frac{\pi}{3}$,, то заряд, отданный гранью, опять же не больше, чем $\frac{3}{\pi}2\pi - 4 = 2$. Тогда заряд снова остается неотрицательным.

Случай $\deg f = 5$ разбивается на два. Если не более четырех углов больше, чем $\frac{\pi}{3}$, то отдаваемый заряд не больше 4, то есть суммарный остается неотрицательным. Если же все углы больше, чем $\frac{\pi}{3}$, то, так как сумма углов в пятиугольнике равна 3π, отданный заряд не более $\frac{3}{\pi}3\pi - 5 = 4$. Опять же заряд грани остается неотрицательным.

Наконец, если $\deg f \geq 6$, то отдаваемый заряд не более, чем $\deg f$ и оставшийся заряд неотрицателен: $2\deg f - 3 - \deg f \geq 0$.

Осталось рассмотреть случай внешней грани $f \in \Gamma$. Если $\deg f \geq 6$, то он аналогичен случаю ограниченной грани. Случаи, когда $\deg f \leq 5$, также легко исключаются. С другой стороны, даже не рассматривая их подробно, можно заметить, что для таких случаев общий отданный заряд не превосходит 5, то есть, оставшийся заряд не менее -5 (а на самом деле не менее -3), что со всеми остальными неотрицательными зарядами граней и вершин, никак не даст в сумме изначально посчитанный общий заряд равный -12. Получаем противоречие. Следовательно, такого спичечного графа не существует.

3.1.3*. Докажите, что в 4-регулярном спичечном графе не менее 20 вершин.

Решение. См. раздел 3 и теорему 3.6 в статье [3].

3.2 Квазипланарные графы

Ключевая задача 2. а) Квазипланарный граф на n вершинах содержит не более $8n-20$ ребер.

б) Попробуйте усилить утверждение предыдущей задачи. Интересуют как улучшения оценки, так и обобщения для других классов графов.

Решение. С полным решение задачи можно познакомиться в статье [4].

Основная идея в том, чтобы свести задачу к рассмотрению плоского графа, и применить к нему метод перераспределения зарядов.

Рассмотрим следующий плоский граф Γ'. Его множество вершин состоит из вершин квазипланарного графа Γ, а также точек пересечения рёбер Γ. Рёбрами Γ будут пары вершин, являющиеся концами участков кривых, определявших рёбра Γ. Обозначим через V, E, F, V', E', F' количества вершин, ребер и граней в графах Γ и Γ' соответственно. Вершины $V(\Gamma)$ будем называть *старыми*, а остальные — *новыми*. Под степенями вершин и граней будем понимать их степени в новом графе Γ'.

Нетрудно убедиться (докажите это самостоятельно), что $E' - E = 2(V' - V)$, т.е. что количество ребер увеличилось на удвоенное количество новых вершин. Итак,

$$2E' = 2E + 4(V' - V). \tag{3}$$

Именно последнее равенство является ключевым новым моментом решения.

Теперь запишем формулу Эйлера для графа Γ', домноженную на (-2):

$$-2V' + 2E' - 2F' = -4. \tag{4}$$

Тогда, используя равенства $2E' = \sum_{v\in V(\Gamma')} \deg v$, $2E' = \sum_{f\in F(\Gamma')} \deg f$, а также (3) и (4), получим (поймите самостоятельно, как это делается):

$$2\gamma E + \sum_{v\in V(\Gamma')\setminus V(\Gamma)} (\alpha \deg v - 2 + 4\gamma) + \sum_{v\in V(\Gamma)} (\alpha \deg v - 2) + \sum_{f\in F(\Gamma')} (\beta \deg f - 2) = -4, \tag{5}$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Далее в каждом конкретном случае будем по-своему подбирать коэффициенты α, β и γ. Во всех трёх задачах новым вершинам мы будем давать нулевой заряд (и они вообще не будут участвовать в перераспределении зарядов). Для этого нам потребуется выполнение равенства $4\alpha - 2 + 4\gamma = 0$, т.к. степень каждой новой вершины равна 4. Тогда $\beta = 0.5$ и (5) преобразуется в

$$2\gamma E + \sum_{v\in V(\Gamma)} \big((0.5-\gamma)\deg v - 2\big) + \sum_{f\in F(\Gamma')} (0.5 \deg f - 2) = -4. \tag{6}$$

3.2.1. Пусть граф удовлетворяет дополнительному условию: не существует тройки ребер e_1, e_2, e_3 такой, что e_1 и e_2 выходят из одной вершины A, а ребро e_3 пересекает их во внутренних точках B и C, причем нет других точек пересечения на участках AB и AC. Докажите, что число ребер не больше $4n - 8$.

Решение. В этом случае возьмём[5] $\gamma = 0.25$. Учитывая, что нам нужно доказать, что $E \leqslant 4V - 8$, преобразуем (6) в

$$-E + 4V - 8 = \sum_{v\in V(\Gamma)} 0.5 \deg v + \sum_{f\in F(\Gamma')} (\deg f - 4).$$

Покажем, что правая часть неотрицательна. Дадим каждой старой вершине v заряд, равный $0.5 \deg v$, а каждой грани Γ' — заряд, равный $(\deg f - 4)$. Покажем, как перераспределить заряды, чтобы у каждого элемента он стал неотрицательным. От каждой вершины дадим заряд, равный 0.5, в каждую из граней, в которых она лежит.

Отрицательный заряд мог остаться только у треугольников с двумя или тремя новыми вершинами. Но, как несложно убедиться, вспомнив условие задачи, таких граней в графе Γ' нет.

3.2.2. Без дополнительного условия из прошлой задачи докажите оценку на число ребер $10n - 20$.

Решение. В этом случае возьмём[6] $\gamma = 0.1$. Учитывая, что нам нужно доказать, что $E \leqslant 10V - 20$, преобразуем (6) в

$$-E + 10V - 20 = \sum_{v\in V(\Gamma)} 2 \deg v + \sum_{f\in F(\Gamma')} (2.5 \deg f - 10).$$

Покажем, что правая часть неотрицательна. Дадим каждой старой вершине v заряд, равный $2 \deg v$, а каждой грани Γ' — заряд, равный $(2.5 \deg f - 10)$. Перераспределение зарядов будет следующим. От каждой вершины дадим заряд, равный 2, в каждую из граней, в которых она лежит. Таким образом, заряд всех вершин станет равным 0. От каждой грани $f \in F(\Gamma')$ с $\deg f \geqslant 5$ отдадим заряд, равный 0.5, в каждую из смежных по ребру граней. Если соседняя по ребру грань является четырехугольником без старых вершин (такие четырехугольные грани будем называть *новыми*, а другие — *старыми*), то передадим от неё заряд через противоположное ребро в следующую грань (рис. 2), если следующая вновь новый четырехугольник, то будем передавать заряд дальше до тех пор, пока не встретим грань, отличную от нового четырехугольника (убедитесь в том, что этот процесс закончится).

[5] Обратите внимание, что в искомой оценке свободный член равен -8.

[6] Обратите внимание, что в искомой оценке свободный член равен -20.

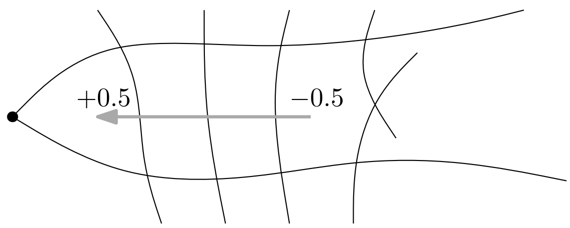

Рис. 2: Передача заряда по цепочке новых четырехугольников.

После этого мы совершим вторую фазу перераспределения зарядов. Заметим, что старые четырехугольники будут иметь заряды по крайней мере 2, которые они получили от инцидентных им вершин. Тогда раздадим их заряды поровну (по 0.5) во соседние по стороне грани. Если соседняя по ребру грань является новым четырехугольником, то передадим от неё заряд через противоположное ребро в следующую грань, а если следующая грань вновь новый четырехугольник, то передадим заряд дальше аналогичным образом до тех пор, пока вновь не встретится грань, отличная от нового четырехугольника.

У граней степени не меньше 4 заряд окажется неотрицательным. Рассмотрим треугольную грань. Если у нее две старые вершины, то в итоге у них положительный заряд. Треугольников без старых вершин возникнуть не могло по определению квазипланарных графов. Убедитесь самостоятельно, что у треугольников с одной старой вершиной будет в итоге тоже неотрицательный заряд.

3.2.3. Решите ключевую задачу 2a. Скорее всего, при решении предыдущего пункта вы использовали такую систему зарядов, которая сработает и здесь.

Решение. Попробуйте самостоятельно решить эту задачу. Для этого воспользуйтесь решением предыдущей задачи. Ключевой момент, за счёт которого удаётся решить задачу: среди граней, примыкающих к старым вершинам, имеется по крайней мере две грани, не являющиеся треугольниками с в точности одной старой вершиной.

3.3 Списочные покраски ребер

Ключевая задача 3. Докажите, что Γ является реберно $(\Delta(\Gamma)+1)$-выбираемым, если $\Delta(\Gamma) \geqslant 6$.

Решение. С полным доказательством можно познакомиться в статье [5].

3.3.1.

Докажите, что при $\Delta(\Gamma) \geqslant 7$ граф Γ является реберно $(\Delta(\Gamma)+1)$-выбираемым.

Решение. Достаточно доказать что найдется ребро с весом не больше $\Delta(\Gamma)+2$ (такие ребра будем называть легкими), это позволит сделать легкую раскраску ребер.

Если в графе есть вершины степени 1 или 2, то ребра из них автоматически легкие, значит достаточно рассмотреть случай $\delta(\Gamma) \geq 3$. Присвоим каждой вершине v и каждой грани f заряды $(\deg(v)-4)$ и $(\deg(f)-4)$ соответственно. Тогда по формуле Эйлера сумма всех зарядов равна -8. Наш план — придумать такое правило перераспределения зарядов, чтобы из отсутствия легкого ребра следовала неотрицательность зарядов у всех элементов, что привело бы к противоречию.

Правило следующее. Пусть каждая вершина степени не менее 5 отдаст $\frac{1}{2}$ каждой треугольной грани, в которой находится. Кроме того, каждая вершина степени $\Delta(\Gamma)$ отдаст по $\frac{1}{3}$ заряда всем вершинам степени 3, с которыми соединена.

Докажем, что все заряды неотрицательны. Для граней это очевидно: заряд был отрицателен только у треугольных, но в каждой треугольной грани находятся хотя бы две вершины степени не меньшей, чем 5, иначе рядом стоят две вершины степени не больше 4 — ребро между ними легкое.

Теперь разберемся с вершинами.

- вершина степени 3 должна быть соединена только с вершинами степени $\Delta(\Gamma)$, иначе соответсвующее ребро легкое. Значит, эта вершина получила трижды по $\frac{1}{3}$ – заряд стал нулевым.
- Вершина степени 4 изначально имела заряд 0 и никому ничего не отдавала.
- Вершина степени t от 5 до $\Delta(\Gamma)-1$ отдает что-то только треугольным граням, которых у нее не больше чем $[\frac{t}{2}]$, легко проверить что при $t \geq 5$ выполняется $t-4-\frac{1}{2}[\frac{t}{2}] \geq 0$.
- Вершина степени $\Delta(\Gamma)$ отдает заряд соседним вершинам степени 3 и треугольникам, но в каждом треугольнике вершин степени 3 не больше одной. Итого, вершины этого типа отдают максимум $\frac{5}{6}$ заряда за каждую пару своих ребер, входящих в треугольник, и максимум $\frac{1}{3}$ за каждое не входящее в треугольник ребро. Также легко проверяется, что оставшийся заряд положителен. Кстати, это единственное место в доказательстве, где нужна строгость неравенства $\Delta(\Gamma) > 6$.

Таким образом, получили противоречие.

3.3.2. В случае $\Delta(\Gamma) = 6$ нас интересует еще одна конфигурация: вершина степени 6, входящая в три треугольника, два из которых с набором степеней $(6,6,3)$, а третий — $(6,6,3)$, $(6,5,4)$ или $(6,6,4)$. Докажите, что при наличии такой конфигурации, можно свести вопрос раскраски Γ к вопросу раскраски его подграфа.

Решение. Пусть описанная в условии конфигурация нашлась (можно считать, что нашлась вершина, принадлежащая треугольникам с набором степеней $(6,6,3)$, $(6,6,3)$ и $(6,6,4)$, остальные являются ее подмножествами). Выбросим ребра этой концфигурации, покрасим остальные по предположению индукции и попробуем докрасить выброшенные.

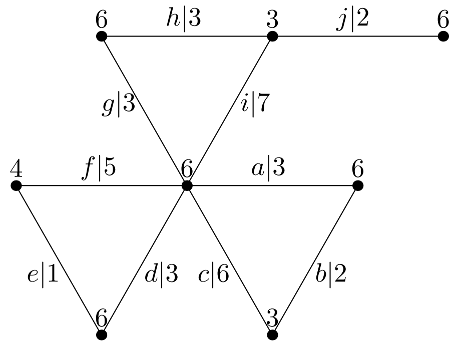

Рис. 3: Конфигурация.

На рисунке ребра конфигурации пронумерованы латинскими буквами, и к каждому ребру приписано минимальное число доступных для него цветов. Если у какого-то ребра доступных цветов на самом деле больше – запретим лишний (любой). Будем красить ребра, при этом каждый раз на 1 уменьшая число доступных цветов у соседей, кроме специально оговоренных случаев. Если ни разу не опустились до нуля – все сработало.

Ребрам g и j доступно 3 и 2 цвета соответсвенно, а ребру h – только 3. Значит или есть цвет, доступный обоим ребрам g и j, или есть цвет, доступный одному из g и j но недоступный h.

В первом случае покрасим в этот общий цвет ребра g и j, и дальше красим ребра в порядке $ebdafcih$.

Во втором случае в тот цвет, который не доступен для h, красим то из ребер g и j для которого он доступен, потом оставшееся из двух – в любой (после этого для h все еще доступно минимум 2 цвета), дальше то же самое – красим ребра в порядке $ebdafcih$.

3.3.3. Наконец, докажите, что при $\Delta(\Gamma) = 6$ граф Γ содержит хотя бы один из трех типов подграфов[7], позволяющих свести вопрос раскраски графа к раскраске меньшего графа.

[7]Один их них вы нашли при решении задачи 3.3.1, другой подсказан в задаче 3.3.2, до третьего типа догадайтесь самостоятельно.

Решение. Докажем, что планарный граф Γ с $\Delta(\Gamma) = 6$ и без треугольников с общим ребром имеет одну из трех конфигураций:

(i) ребро веса не больше 8;

(ii) индуцированный 4-цикл $uvwx$, такой что $\deg(u) = \deg(w) = 3$;

(iii) 6-вершину A входящую в три треугольника с наборами степеней вершин $(6, 6, 3)$, $(6, 6, 3)$ и $(6, 6^-, 4^-)$[8].

Доказательство. Если в графе есть вершины степени 1 или 2, то ребра из них автоматически не тяжелее 8, далее рассматриваем случай $\delta(\Gamma) \geq 3$. Наш дальнейший план действий – раздать заряды с отрицательной суммой вершинам и граням и показать, что если запрещенных конфигураций нет, то есть способ пререспределить заряды так, что каждый заряд станет неотрицательным. Это противоречие докажет, что запрещенные конфигурации есть. В дальнейшем следует помнить, что вершина степени 3 смежна только с вершинами степени 6, иначе, опять же, появляется легкое ребро.

Раздадим в вершины v и грани f заряды $\deg(v) - 4$ и $\deg(f) - 4$ соответственно. Теперь перераспределим их по следующим правилам:

- 5- и 6-грани отдают по $\frac{1}{2}$ каждой 3-вершине, которая в них лежит;
- 5-вершина отдает $\frac{1}{2}$ каждому треугольнику, в котором лежит;
- 6-вершина, во-первых, отдает смежной с ней 3-вершине $\frac{1}{6}$, если эта 3-вершина лежит в 5- или 6-грани, иначе отдает $\frac{1}{3}$, во-вторых, отдает каждому треугольнику, в котором лежит, $\frac{1}{3}$ если этот треугольник не содержит 3- или 4-вершин, иначе отдает $\frac{1}{2}$.

Докажем что все получилось.

- В треугольнике не может быть двух 4^--вершин, ребро между ними было бы легким. Треугольник в котором есть одна 4^--вершина с каждой из двух других получает по $\frac{1}{2}$. Треугольник, в котором только 5^+-вершины с каждой из них получает минимум по $\frac{1}{3}$.
- Четырехугольник имеет изначально неотрицательный заряд и никому ничего не отдает.
- t-грань при $t \geq 5$ содержит не больше $[\frac{t}{2}]$ 3-вершин, легко проверить что

$$t - 4 - \frac{1}{2} \cdot [\frac{t}{2}] \geq 0$$

- 3-вершина или лежит в 5^+-грани, и тогда получает $\frac{1}{2}$ от нее и по $\frac{1}{6}$ от трех соседних 6-вершин, или не лежит, и тогда получает по $\frac{1}{3}$ от трех соседних 6-вершин.
- 4-вершина имеет изначально ненулевой заряд и никому ничего не отдает.
- 5-вершина отдает по $\frac{1}{2}$ максимум двум треугольникам, в которых лежит.
- Чтобы убедиться, что некоторая вершина B степени 6 имеет положительный заряд, придется отдельно рассмотреть четыре случая чему может быть равно число k треугольников, которым принадлежит B. Во всех случаях полезно помнить, что B может быть смежна не более чем с $6 - k$ вершинами степени 3 (потому что в треугольнике максимум одна).
  - $k = 0$ – B отдает максимум шести 3-вершинам по не более чем $\frac{1}{3}$ – остается неотрицательный заряд[9].

[8] Запись k^- обозначает «число, меньшее либо равное k»

[9] На самом деле можно показать, что в этом случае заряд строго положителен, но это не нужно.

- $k = 1$. Если B соединена не более чем с четырьмя 3-вершинами, то она отдает $\frac{1}{2}$ треугольнику и максимум $4 \cdot \frac{1}{3}$ вершинам степени 3 – остается положительный заряд. Если B соединена ровно с пятью, то какие-то два ребра в 3-вершины идут подряд по часовой стрелке (на самом деле, минимум 4 пары ребер идущих подряд). Пусть это ребра AB и BC. Тогда они в одной грани, и, чтобы это не был случай (ii), надо, чтобы грань, содержащая A, B и C, (вида $\ldots ABC \ldots$) содержала еще как минимум две вершины. Но тогда вершинам A и B положено отдавать только $\frac{1}{6}$ – снова остался положительный заряд.
- $k = 2$ разбирается аналогично предыдущему случаю.
- $k = 3$ Если из трех треугольников не более чем два имеют 4^- вершину – то B отдает не более чем $2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ треугольникам, и максимум двум 3-вершинам (третьей нет, потому что тогда был бы третитй треугольник с 4^--вершиной) по $\frac{1}{3}$ – сумма неотрицательна. Итого, если заряд отрицательный, то в каждом из трех треугольников есть 4^--вершина – треугольники утянули $\frac{3}{2}$ заряда. Значит, чтобы оставшийся стал отрицательным, минимум две из 4^--вершин должны быть ровно 3-вершинами. Это в точности конфигурация (iii).

3.4 Магические конфигурации

Ключевая задача 4. Описать все магические конфигурации.

Решение. Очень непросто записать кратко решение данной задачи (даже разбитой на большое количество вспомогательных шагов), поэтому ниже предлагаются, скорее, подсказки к решению, чем само решение.

Доказательство опиратается на ряд важных (но в тоже время несложных) свойств набора прямых на плоскости (теорема Сильвестра, её усиление, теорема Леви). Некоторые из них мы оставим читателю для самостоятельного изучения.

Полное доказательство можно найти в статье [6].

3.4.1. Докажите теорему Сильвестра, используя формулу Эйлера и двойственный язык.

Решение. Предположим, что для любых двух экваторов найдётся третий, проходящий через их точку пересечения. Рассмотрим плоский граф, с вершинами в точках пересечения экваторов, а рёбрами будут участки дуг между соседними точками на какой-то экваторе. Тогда у этого плоского графа степень каждой вершины будет по крайней мере 6, что возможно по формуле Эйлера только, если в графе есть кратные рёбра. Это означает, что все экваторы проходят через две диаметрально противоположные точки на сфере.

3.4.2. Пусть в магической конфигурации некоторой прямой (некоторому экватору) приписано число большее $\frac{1}{2}$. Докажите, что все остальные прямые (экваторы) пересекаются в одной точке (двух антиподальных точках).

Решение. Через e обозначим экватор с приписанным числом большим $\frac{1}{2}$. Заметим, что другим экваторам приписаны числа меньшие $\frac{1}{2}$, так как иначе в точке пересечения другого экватора с e сумма чисел была бы больше 1.

Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что найдётся два экватора, отличных от e, таких, что через одну из их точек пересечения не проходят другие экваторы (включая e). Это можно сделать, например, следующим образом. Рассматриваем рисунок на плоскости, соответствующий рисунку из экваторов на сфере, у которого образ e был бы бесконечно удалённой прямой. Далее применяется доказательство теоремы Сильвестра через минимальные расстояния между точкой пересечения и прямой, не проходящей через эту точку. Попробуйте самостоятельно восставновить доказательство. Например, можно посмотреть, как это делается в доказательстве леммы 5.6 в книге [7].

3.4.3. Докажите, что есть точка, в которой пересекаются ровно две синие и одна красная прямая (экватор). Напомним, что конфигурация состоит из прямых (экваторов), а не из точек.

Решение. Как мы знаем, по теореме Сильвестра для синих экваторов найдётся две синих экватора, через точку пересечения которых не проходит больше синих экваторов. Следовательно через их точку пересечения должна проходить красный экватор, так как сумма весов для каждой точки пересечения должна равняться 1.

3.4.4. Докажите, что в конфигурации есть синий четырехугольник разбиения с красными диагоналями.

Решение. Рассмотрим плоский граф, образованный точками пересечений синих экваторы, рёбрами которого будут пары вершин, лежащих на одном синем экваторе, между которыми на экваторе нет других вершин. Воспользуемся формулой (1) при $\alpha = \frac{1}{3}$. Дадим каждой вершине заряд равный $(\deg v - 6)$, а каждой грани заряд равный $(2\deg f - 6)$. Заметим, что для каждой вершины степени 4 (через которую проходят две синие прямые), найдётся красная прямая, проходящая через неё, так как суммарный заряд должен равняться 1.

Начнём перераспределять заряды (это процесс мы продолжим в последующих задачах). От каждой грани, для которой какой-то красный экватор является диагональю, передадим по заряду, равному 1, в концы этой диагонали.

Убедитесь самостоятельно, что если не найдётся синего четырёхугольника с красными диагоналями, то заряд каждой грани и каждой вершины будет неотрицательным. Таким образом, мы получаем противоречие.

3.4.5. Докажите, что найдется синий треугольник разбиения, имеющий общую сторону с плохим четырехугольником.

Решение. На текущий момент единственный граней с отрицательным зарядом — плохой четырехугольник (напомним, что у вершин заряды получаются неотрицательными). Точнее у плохого четырехугольника будет заряд равный (-2).

Далее передадим от каждой грани смежной с плохим четырехугольником по заряду равному $\frac{1}{2}$. Так как суммарный заряд отрицательный, то обязательно найдётся плохой треугольник.

3.4.6. Докажите, что если плохой треугольник имеет общие стороны сразу с двумя плохими четырехугольниками, то наша конфигурация является двойственной конфигурацией недоФано.

Решение. Убедитесь в этом самостоятельно. Это нетрудно следует из того, что один из красных экваторов будет пересекать синий экватор в двух точках (вершины двух плохих четырехугольников).

3.4.7. Докажите, что найдутся плохой треугольник t, его плохой четырехугольник d и их общая вершина A такие, что кусок разбиения, вертикальный[10] t относительно A, является четырехугольником.

Решение. На данный момент единственный тип граней с отрицательным зарядом — плохие треугольники. Заряд в каждом из них будет равен $-\frac{1}{2}$, так как мы предположили, что плохой треугольник соседствует всего с одни плохим четыреугольником.

Теперь от каждой грани степени по крайней мере 5, которая вертикальна плохому треугольнику и смежна его плохому четыреугольнику передадим по заряд равный $\frac{1}{2}$ в плохой треугольник. Убедитесь самостоятельно, что в этом случае каждая из граней степени по крайней мере 5 будет с положительным зарядом.

Из этого будет следовать наличие требуемая конструкция. На самом деле всегда можно найти плохой треугольник t смежный плохому четырехугольнику d, который либо будет смежен обычным четырехугольникам, вертикальным t, либо будет смежен плохому треугольнику и обычному четырехугольнику, которые вертикальны t. Только у таких треугольников t будут отрицательные заряды, равные $-\frac{1}{2}$. Плохие треугольники в последней конструкции будем называть *очень плохими*, смежные им плохие четырехугольник будем

[10] Два куска разбиения с общей вершиной A называются *вертикальными относительно* A, если их углы при A вертикальны

называть *очень плохими*, а хорошим четырехугольником будет называться четырехугольник вертикальный очень плохому треугольнику.

3.4.8. Рассмотрим разбиение проективной плоскости (сферы) синими прямыми (экваторами). Докажите, что найдётся такая прямая (экватор), что среди частей разбиения, примыкающих к этой прямой (экватору), ровно две (четыре) являются треугольными.

Решение. Итак, на текущий момент гранями с отрицательным зарядом являются очень плохие треугольники. Заряд каждого такого треугольника всё ещё $-\frac{1}{2}$. Далее мы хотим показать, что заряда в хороших четырехугольниках достаточно, чтобы компенсировать заряд во всех очень плохих треугольниках.

Теперь рассмотрим двудольный граф. Вершинами первой доли этого двудольного графа будут пары (b, e), где b — это очень плохой четырехугольник, а e — экватор, образующий смежную сторону с его очень плохим треугольником t. Вершины другой доли будут пары (g, e), где g — хороший четырехугольник, а e — экватор, который образует сторону g и сторону очень плохого четырехугольника (соотвествующего g), при этом g и его очень плохой четырехугольник лежат по одну сторону относительно e. Пары вершин (из разных долей) вида (b, e) и (g, e) соединим ребром, если b и g смежные и лежат по одну сторону относительно e. Степень каждой вершины в получившемся графе равна 1 или 2.

Если в получившемся графе рёбер больше, количества вершин в первой доле, то несложно убедиться (это предлагается сделать самостоятельно), что суммарный заряд неотрицательный.

Если же суммарный заряд отрицательный, то обязательно найдётся следующая конструкция: индуцированный путь (b_1, e), $(g_1, e), \ldots, (g_k, e), (b_{k+1}, e)$, где $b_1, g_1, \ldots, g_k, b_{k+1}$ — смежные четырехугольники, лежащие от ограничевающего их экватора e с одной стороны, а также четырехугольники b_1 и b_{k+1} смежны с треугольниками.

Теперь докажите самостоятельно, что найдется искомая прямаяю

3.4.9. Покажите, что случай, описанный в предыдущей задаче, тоже невозможен.

Решение. Докажите самостоятельно теорему Леви, утверждающую, что если есть семейство экваторов на сфере, то к каждому из них примыкает по крайней мере шесть треугольников (исключение состоит в случае, когда все прямые кроме возможно одной проходят через одну точку). См. предложение 5.13 в [7].

Список литературы

[1] А.Канель and А.Ковальджи. Треугольники и катастрофы. *Квант*, (11), 1992.

[2] Р Дистель. *Теория графов.* Изд-во Ин-та математики Новосибирск, 2002.

[3] Sascha Kurz and Rom Pinchasi. Regular matchstick graphs. *arXiv preprint arXiv:1401.4372*, 2014.

[4] Eyal Ackerman and Gábor Tardos. On the maximum number of edges in quasi-planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(3):563–571, 2007.

[5] Daniel W Cranston. Edge-choosability and total-choosability of planar graphs with no adjacent 3-cycles. *arXiv preprint math/0512518*, 2005.

[6] Eyal Ackerman, Kevin Buchin, Christian Knauer, Rom Pinchasi, and Günter Rote. There are not too many magic configurations. *Twentieth Anniversary Volume: Discrete & Computational Geometry*, page 1, 2009.

[7] Stefan Felsner. *Geometric graphs and arrangements: some chapters from combinatorial geometry.* Springer Science & Business Media, 2012.