

# Теория узлов и зацеплений для пользователя \*

представляют А. Глебов, Д. Елисеев, А. Еннэ, Р. Живалевич, Е. Морозов,  
А. Скопенков, М. Фёдоров, Н. Хорошавкина †

## Аннотация.

Мы определим простые инварианты узлов и зацеплений (коэффициент зацепления, инварианты Арфа и Кэссона, полиномы Александера-Конвея), мотивированные интересными результатами, формулировки которых доступны неспециалистам или школьникам (например, теоремы 1.1.3 и 1.2.2). Мы покажем как простейшие инварианты появляются естественным образом в результате попыток развязать узел или расцепить зацепление. Затем мы представим некоторые рекурсивные скейн-соотношения для простейших инвариантов, которые позволяют ввести более сильные инварианты. Мы сформулируем теорему Васильева-Концевича способом, удобным для подсчета самих инвариантов, а не только размерности пространства инвариантов. Мы также представим инварианты раскрасок, для определения которых мы не знаем элементарной мотивации.

Мы дадим строгие определения основных понятий, не препятствующие их интуитивному пониманию. Для изучения этого текста не требуется никаких предварительных знаний.

## Рекомендации участникам.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Если задача выделена словом «теорема» («лемма», «следствие» и т. д.), то её утверждение более важное. Как правило, мы приводим (в виде задачи) *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* его *доказательством*. В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться последующие задачи. Мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Вообще, если Вы застряли на какой-то задаче, попробуйте перейти к следующим, они могут оказаться полезными. *Замечания* формально не используются в дальнейшем.

В тексте определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы затем было проще их найти. Мы рекомендуем всем участникам, работающим над проектом, *консультироваться* с жюри по любым вопросам, касающимся проекта. Те, кто успешно работают над проектом, получают интересные *дополнительные задачи (пункты, помеченные звездочками)*.

Участник (или группа участников) конференции, решающий задачи проекта, получает «боб» за каждое записанное решение, оцененное в «+» или «+». Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных задач или оформление некоторых решений в

---

\*Мы благодарны А. Рябичеву, А. Сосинскому и С. Чмутову за полезные обсуждения, а также В. Прасолову и издательству МЦНМО за возможность использовать некоторые задачи и рисунки из [Pr95]. Этот текст основан на курсе лекций А. Скопенкова, прочитанном в Независимом Московском Университете (включая программу Math in Moscow) и Московском Физико-Техническом Институте.

†А. Глебов: Новосибирский Государственный университет.

Д. Елисеев: Самарский университет.

А. Еннэ: Петрозаводский Государственный университет.

Р. Живалевич: <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/>, Институт математики в САНУ, Белград.

Е. Морозов, М. Фёдоров, Н. Хорошавкина: Высшая Школа Экономики, Москва.

А. Скопенков: <http://www.msme.ru/~skopenko>, Московский Физико-Технический Институт, Независимый Московский Университет.

системе ТрХ. У жюри бесконечно много бобов. Решения можно сдавать и устно, отдавая один боб за каждые пять попыток (не важно, удачных или нет).

Пожалуйста, сообщите нам, если Вы знаете решения каких-то из предложенных задач. Если Вы подтвердите свои знания, сообщив нам решения некоторых из них, Вам будет разрешено пользоваться ими при решении остальных, не получая по ним плюсы.

# 1 Задачи до промежуточного финиша

## 1.1 Основные определения и результаты об узлах

Начнем с неформального описания основных понятий (строгие определения даны после задачи 1.1.1). *Узел* можно представить себе как тонкую эластичную веревку, концы которой склеены — см. рис. 1. Как и на этом рисунке, узлы обычно изображаются с помощью их «удобной» проекции на плоскость, которая называется диаграммой узла. Представьте, что вы раскладываете веревку на столе, тщательно записывая как она пересекает себя (т.е. какая часть веревки лежит сверху). Необходимо помнить, что проекции одного и того же узла на разные плоскости могут иметь разный вид.

**Тривиальный узел** — это контур (граница) треугольника.

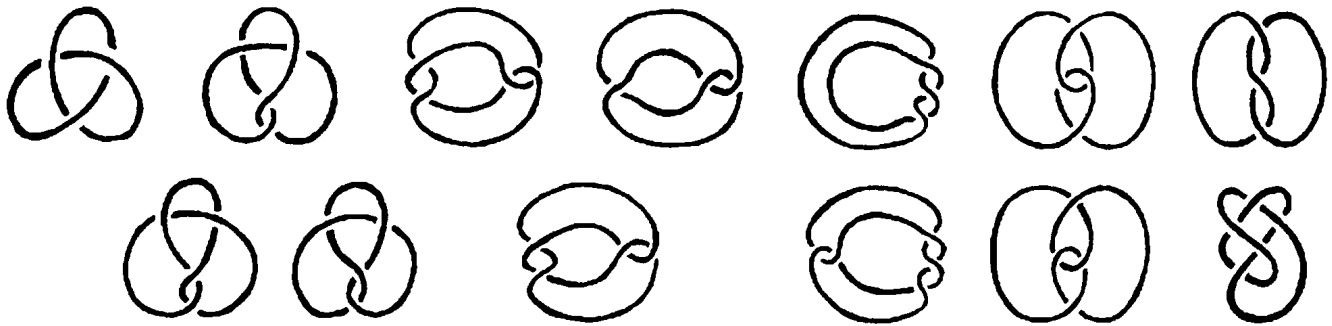


Рис. 1: Узлы, изотопные трилистнику (верхний ряд) и восьмерке (нижний ряд)

Под *изотопией* узла понимается его непрерывная деформация в пространстве как тонкой эластичной нити. В процессе деформации самопересечения не допускаются. Два узла называются *изотопными*, если один из них можно преобразовать в другой с помощью изотопии. В качестве доказательства изотопности конкретных узлов жюри принимает большую и понятную картинку или эксперимент с веревкой, воспроизводимый членом жюри.

**Задача 1.1.1.** (а) Некоторые два узла из верхнего ряда рис. 1 изотопны самому левому узлу. Для одного из этих двух узлов представьте изотопию с помощью движений Рейдемайстера (см. рис. 5).

(b)\* Все узлы, представленные в верхнем ряду рис. 1 изотопны друг другу.

(c,d\*) То же верно для узлов в нижнем ряду рис. 1.

(e) Все узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

**Замечание.** Здесь мы покажем необходимость строгого определения изотопии.

На рис. 2 показана изотопия между трилистником и тривиальным узлом. Действительно ли это изотопия? Это так называемая «кусочно-линейная необъемлемая изотопия», которая *отличается* от «кусочно-линейной объемлемой изотопии», определенной и используемой далее. (Первое понятие лучше отражает идею непрерывной деформации без самопересечений, но ма-

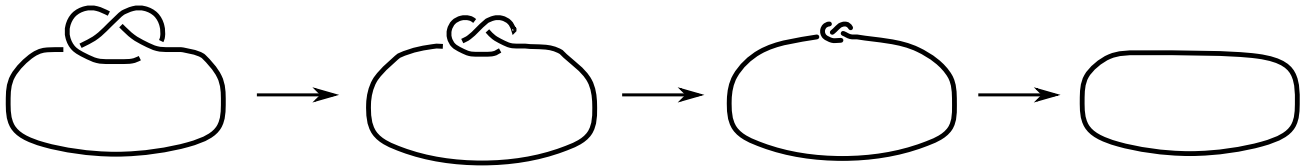


Рис. 2: Необъемлемая изотопия между трилистником и тривиальным узлом

лодоступно для старшеклассников, ср. [Sk16i].) На самом деле, любые два узла кусочно-линейно необъемлемо изотопны!

Обычная проблема с интуитивно понятными определениями не в том, что их трудно формализовать, а в том, что это можно сделать несколькими способами.

**Узел** — это пространственная замкнутая несамопересекающаяся ломаная.

**Диаграмма узла** — это его проекция общего положения<sup>1</sup> на плоскость<sup>2</sup>, вместе с информацией, какая часть узла «проходит под» (проход), а какая — «проходит над» (переход) в каждом конкретном перекрестке.

**Задача 1.1.2.** Для любой диаграммы узла существует узел, проецирующийся на эту диаграмму. (Такой узел не обязательно единственный; см. впрочем задачу 1.1.1.e.)

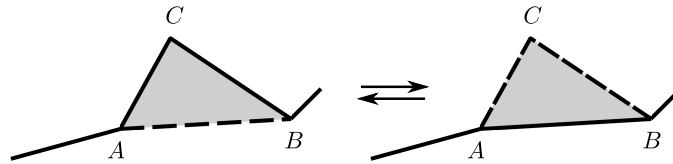


Рис. 3: Элементарное движение

Предположим, что стороны  $AC$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  — ребра некоторого узла. Кроме того, предположим, что узел и часть плоскости, ограниченная треугольником  $ABC$ , ни в каких других точках не пересекаются. **Элементарное движение**  $ACB \rightarrow AB$  — это замена двух ребер  $AC$  и  $CB$  ребром  $AB$ , либо обратная операция  $AB \rightarrow ACB$  (рис. 3).<sup>3</sup> Два узла  $K, L$  называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если существует последовательность узлов  $K_1, \dots, K_n$  такая, что  $K_1 = K$ ,  $K_n = L$ , и каждый узел последовательности  $K_{j+1}$  получен из предыдущего узла  $K_j$  элементарным движением.

**Теорема 1.1.3.** (a) Тривиальный узел не изотопен трилистнику.

(b) Тривиальный узел не изотопен восьмерке.

(c) Трлистник не изотопен восьмерке.

(d) Существует бесконечное число попарно не изотопных узлов.

Эта теорема доказывается с использованием *инвариантов Арфа* и *Кэссона*, см. §1.4 и §2.1, или с использованием *правильных раскрасок*, см. §2.2 (так что нет необходимости тратить много времени, доказывая эти результаты прямо сейчас).

**Замечание.** Это замечание может быть полезным в качестве подсказки и предостережения к задачам 1.1.4 и 1.1.5.

<sup>1</sup>Ломаная на плоскости называется ломаной *общего положения*, если существует ломаная  $L$  с тем же объединением ребер такая, что никакие три вершины ломаной  $L$  не лежат на одной прямой и никакие три отрезка, соединяющие некоторые вершины ломаной  $L$ , не имеют общей внутренней точки.

<sup>2</sup>Терминология университетской математики — «образ общего положения при проекции на плоскость».

<sup>3</sup>Если треугольник  $ABC$  вырожденный, то элементарное движение является либо разбиением ребра, либо обратной этому операцией.

В следующем абзаце мы докажем, что *если узел лежит в плоскости, то он изотопен тривиальному узлу*.

Обозначим узел, лежащий в плоскости, через  $M_1M_2 \dots M_n$ . Возьмем точку  $Z$  вне этой плоскости. Переведем  $M_1M_2 \dots M_n$  в тривиальный узел  $M_1ZM_n$  следующей последовательностью элементарных движений:

$$M_1M_2 \rightarrow M_1ZM_2, \quad ZM_2M_3 \rightarrow ZM_3, \quad ZM_3M_4 \rightarrow ZM_4, \quad \dots, \quad ZM_{n-1}M_n \rightarrow ZM_n.$$

Следующий результат показывает, что промежуточные узлы изотопии, переводящей узел, лежащий в плоскости, в тривиальный узел, можно выбрать также лежащими в плоскости.

*Теорема Шёнфлиса.* Любая ломаная без самопересечений в плоскости изотопна (в этой плоскости) треугольнику.

Это усиленная версия следующего выдающегося результата.

*Теорема Жордана.* Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная  $L$  в плоскости  $\mathbb{R}^2$  разбивает эту плоскость в точности на две части, т.е.  $\mathbb{R}^2 - L$  — не связное множество, являющееся объединением двух связных множеств.

Подмножество плоскости называется *связным*, если любые две точки этого подмножества можно соединить ломаной, в нем лежащей.

Алгоритмическое объяснение почему теорема Жордана (а значит и теорема Шёнфлиса) нетривиальна, и доказательство теоремы Жордана см. в §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ [Sk18], [Sk].

**Задача 1.1.4.** Предположим, что существует такая точка узла, что если мы идем вдоль узла, начиная с этой точки, то на некоторой диаграмме мы сначала встречаем только переходы, а затем только проходы. Тогда этот узел изотопен тривиальному узлу.<sup>4</sup>

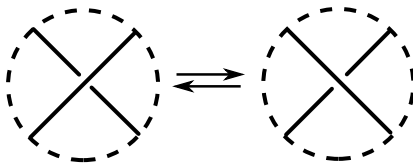


Рис. 4: Изменение перекрестка

**Изменение перекрестка** — такое изменение некоторого перекрестка, что проходы становятся переходами и наоборот, см. рис. 4.

Очевидно, после любого изменения перекрестка в диаграммах трилистника и восьмерки, показанных на рис. 1 мы получим диаграмму узла, изотопного тривиальному.

**Лемма 1.1.5.** Любая диаграмма узла может быть преобразована изменениями перекрестков в диаграмму узла, изотопного тривиальному.<sup>5</sup>

В этом тексте вместо изучения узлов с точностью до изотопии, мы будем изучать диаграммы узлов с точностью до эквивалентности, порожденной **движениями Рейдемейстера** (см. рис. 5<sup>6</sup>) и *движениями изотопии плоскости* (см. рис. 6 в середине и справа). Т.е. мы будем использовать без доказательства следующий результат.

<sup>4</sup>Эта задача будет мотивировкой для введения Арф-инварианта (§1.4). Доказательство иллюстрирует в малых размерностях основные идеи выдающегося доказательства Зимана многомерной теоремы о незаузленности сфер, см. обзор [Sk16c, Theorem 2.3].

<sup>5</sup>Эта простая лемма будет использована для индуктивного построения инвариантов, использующих скейн-соотношения, см. далее.

<sup>6</sup>Строгое определение первого движения Рейдемейстера легко дается с помощью рис. 6 (слева). У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. От участников *не* требуется использование этих строгих определений в решении задач. Вы можете использовать неформальное описание движений Рейдемейстера на рис. 5 и пропустить движения изотопии плоскости.

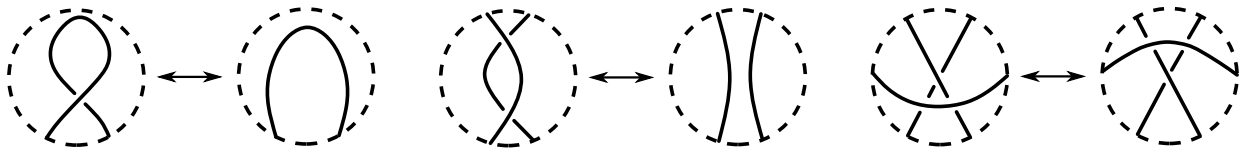


Рис. 5: Движения Рейдемейстера.

Даграммы узлов совпадают вне кругов, ограниченных пунктиром. Никакие другие части диаграмм, кроме нарисованных, не пересекаются с этими кругами. (То же верно для рис. 6, 4, 9 и 10.)

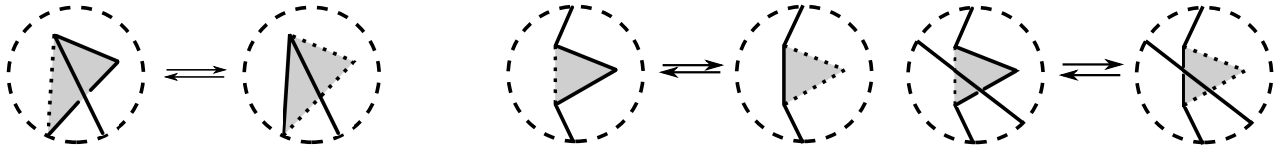


Рис. 6: (Слева) К строгому определению первого движения Рейдемейстера (В середине, справа) Движения изотопии плоскости

**Теорема 1.1.6** (Рейдемейстера). \* *Два узла изотопны тогда и только тогда, когда некоторая диаграмма первого узла может быть получена из некоторой диаграммы второго узла с помощью движений Рейдемейстера и движений изотопии плоскости.*

## 1.2 Основные определения и результаты о зацеплениях

**Зацепление** — это набор попарно непересекающихся узлов. Упорядоченные наборы называются упорядоченными или раскрашенными зацеплениями, в то время как неупорядоченные наборы называются неупорядоченными или нераскрашенными зацеплениями. В этом тексте под словом «зацепление» понимается «упорядоченное зацепление».

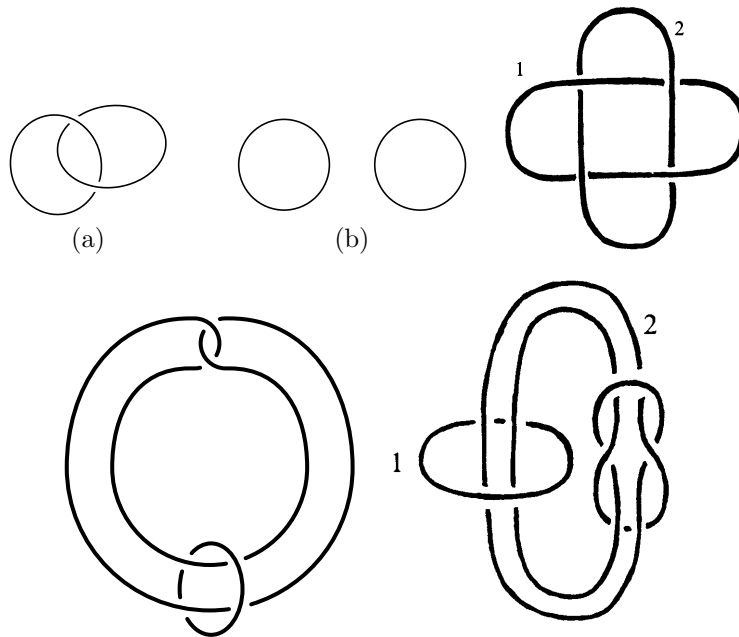


Рис. 7: Зацепление Хопфа, тривиальное зацепление и еще три зацепления

**Тривиальное зацепление** (с любым числом компонент) — зацепление, состоящее из треугольников, лежащих в параллельных плоскостях.

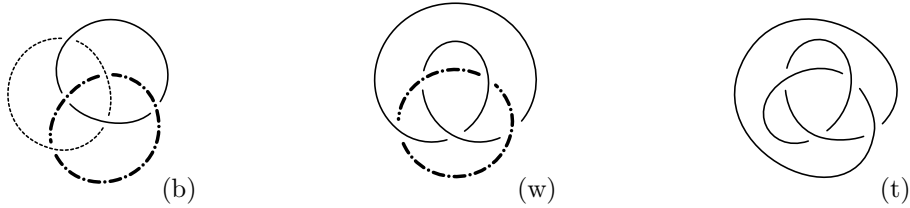


Рис. 8: Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

Диаграммы, изотопия и т.д. для зацеплений определяются аналогично узлам. Аналоги лемм 1.1.6 и 1.1.5 для зацеплений верны.

**Задача 1.2.1.** (а) Зацепление Хопфа изотопно зацеплению, полученному из него перестановкой компонент.

(b) Зацепление Хопфа изотопно некоторому зацеплению, компоненты которого симметричны относительно некоторой прямой.

(c) Четвертое зацепление на рис. 7 изотопно зацеплению Уайтхеда на рис. 8.w.

(d,e\*) Тоже, что и в пунктах (а,b) для зацепления Уайтхеда.

(f)\* Кольца Борромео изотопны зацеплению, компоненты которого переставляются по циклу при повороте на угол  $2\pi/3$  относительно некоторой прямой.

**Теорема 1.2.2.** (а) Зацепление Хопфа не изотопно тривиальному зацеплению.

(b) Зацепление Уайтхеда не изотопно тривиальному зацеплению.

(c) Зацепление Хопфа не изотопно зацеплению Уайтхеда.

(d) Кольца Борромео не изотопны тривиальному зацеплению.

Пункты (а) и (с) доказываются с использованием *коэффициента зацепления по модулю 2*, придумайте его самостоятельно или см. §1.3. Пункты (b) и (d) доказываются с использованием либо *полиномов Александра-Конвея*, см. §2.3, либо с помощью «тройного коэффициента зацепления» (инварианта Масси-Милнора) и «высшего коэффициента зацепления» (инварианта Сато-Левина) [Sk, §4.4-§4.6]. Пункт (d) также может быть доказан с использованием *правильных раскрасок*, см. §2.2.

### 1.3 Гауссов коэффициент зацепления по модулю 2 для диаграмм

**Задача 1.3.1.** Пусть  $A, B, C, D, E, F, O$  — это точки в пространстве, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Следующие три условия эквивалентны.

(i) Контур треугольника  $DEF$  пересекает часть плоскости  $ABC$ , ограниченную треугольником  $ABC$ , ровно в одной точке.

(ii) Отрезок  $BC$  проходит ниже (в смысле конструкции диаграммы зацепления) ровно одной из сторон  $DEF$  при взгляде из точки  $A$ .

(iii) Контур треугольника  $ABC$  проходит ниже нечетного числа сторон  $DEF$  при взгляде из точки  $O$ .

Предположим, что существует изотопия между двумя двухкомпонентными зацеплениями, и вторая компонента фиксирована в процессе изотопии. Тогда след первой компоненты — самопересекающийся цилиндр, не имеющий общих точек со второй компонентой. Если после изотопии компоненты расщеплены, то цилиндр можно дополнить до самопересекающегося диска, не имеющего общих точек со второй компонентой. Это наблюдение, вместе с задачей 1.3.1 и [Sk, Projection lemma 4.2.4] мотивируют следующее определение.

**Коэффициентом зацепления по модулю 2**  $lk_2$  плоской диаграммы двухкомпонентного зацепления называется взятое по модулю 2 число таких перекрестков диаграммы, для которых

первая компонента проходит над второй компонентой.

**Задача 1.3.2.** (а) Найдите коэффициент зацепления по модулю 2 для диаграмм на рис. 7, для пар колец Борромео и для зацепления Уайтхеда (рис. 8).

(б) Коэффициент зацепления по модулю 2 сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Согласно (б) **коэффициент зацепления по модулю 2** двухкомпонентного зацепления (а также его класса изотопии) можно корректно определить как коэффициент зацепления по модулю 2 любой диаграммы этого зацепления.

Будем использовать без доказательства следующую *лемму о четности*: любые две замкнутые ломаные на плоскости, вершины которых находятся в общем положении, пересекаются в четном числе точек. Обсуждение и доказательство этой леммы можно найти в §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ [Sk18], [Sk].

**Задача 1.3.3.** (а) Коэффициент зацепления по модулю 2 не изменяется при перестановке компонент зацепления.

(б) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному, у которого коэффициент зацепления по модулю 2 равен нулю.

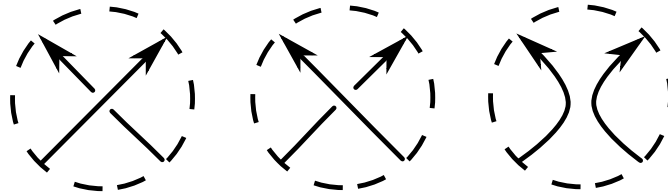


Рис. 9: Узлы  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$

Обозначим через  $D_+$ ,  $D_-$ ,  $D_0$  любые три диаграммы ориентированных (узлов или) зацеплений, отличающиеся, как показано на рис. 9 (см. соглашения о рисунках в примечании к рис. 5). Также обозначим через  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$  любые три зацепления с диаграммами  $D_+$ ,  $D_-$ ,  $D_0$ . Если некоторый инвариант (например,  $\text{lk}_2$ ) определен для неориентированных зацеплений (или узлов), тогда его значение для зацепления присваивается этому зацеплению с любой ориентацией.

**Теорема 1.3.4.** *Существует единственный изотопический инвариант  $\text{lk}_2$  со значениями 0 и 1 (неориентированных) двухкомпонентных зацеплений, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что (для любых двух зацеплений  $K_+$  и  $K_-$ , имеющих диаграммы, отличающиеся как показано на рис. 9)*

$$\text{lk}_2 K_+ - \text{lk}_2 K_- = \begin{cases} 1 & \text{в точке пересечения двух различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

**Задача 1.3.5.** \* Если коэффициент зацепления по модулю 2 двух (непересекающихся контуров) треугольников в пространстве равен нулю, то зацепление, образованное этими треугольниками, изотопно тривиальному.

**Теорема 1.3.6** (Conway–Gordon–Sachs). \* *Если никакие 4 из 6 точек в трехмерном пространстве не лежат в одной плоскости, то существует пара зацепленных треугольников с вершинами в этих 6 точках. Это означает, что внутренность первого треугольника пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке.*

## 1.4 Арф-инвариант

Рассмотрим плоскую диаграмму некоторого узла и ее точку  $P$ , не являющуюся перекрестком. Назовем  $P$  *отмеченной точкой*. Неупорядоченная пара перекрестков  $A$ ,  $B$  называется **скре-**

**щивающейся** (или  $P$ -скрещивающейся), если, обходя диаграмму в каком-нибудь направлении, начиная с  $P$ , и отмечая только перекрестки в  $A$  и в  $B$ , мы сначала встретим переход в  $A$ , затем переход в  $B$ , затем переход в  $A$  и, наконец, переход в  $B$ .

$P$ -Арф-инвариантом  $\text{arf}_P$  плоской диаграммы называется четность числа ее  $P$ -скрещивающихся пар перекрестков.

**Задача 1.4.1.** (а) Если  $P$ -Арф-инвариант плоской диаграммы не равен нулю, то  $P$  не может быть точкой, рассмотренной в задаче 1.1.4.

(b,c,d) Найдите  $P$ -Арф-инвариант (какой-нибудь плоской диаграммы) тривиального узла, трилистника и восьмерки (при вашем выборе отмеченной точки  $P$ ).

(е)  $P$ -Арф-инвариант не зависит от выбора отмеченной точки  $P$ .

Согласно (е) *Арф-инвариант* плоской диаграммы можно корректно определить как ее  $P$ -Арф-инвариант для произвольной отмеченной точки  $P$ .

(f) Арф-инвариант плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Согласно (f) *Арф-инвариант*  $\text{arf}$  узла (или даже изотопического класса узлов) можно корректно определить как Арф-инвариант произвольной плоской диаграммы этого узла.

**Задача 1.4.2.** (а) Если на рис. 9  $K_+$  и  $K_-$  — это плоские диаграммы узлов, то  $K_0$  — это плоская диаграмма двухкомпонентного зацепления и  $\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0$ .

(b) Существует узел, не изотопный тривиальному, Арф-инвариант которого равен нулю.

**Теорема 1.4.3.** Для (неориентированных) узлов существует единственный изотопический инвариант  $\text{arf}$  со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном узле и такой что

$$\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0.$$

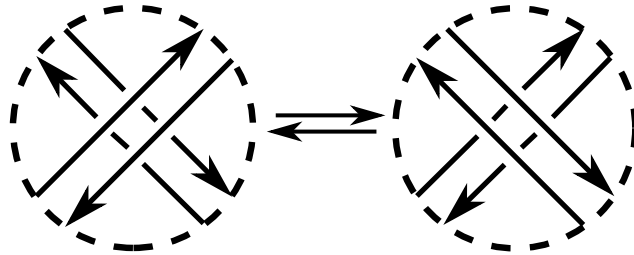


Рис. 10: Риносы

**Задача 1.4.4.** Два узла называются *Арф-эквивалентными*, если какая-нибудь диаграмма первого узла (с некоторой ориентацией) может быть преобразована в какую-нибудь диаграмму второго узла (с некоторой ориентацией) движениями Рейдемейстера и с помощью *риносов*, показанными на рис. 10.

(а) Если два узла Арф-эквивалентны, то их Арф-инварианты совпадают.

(b)\* Восьмерка Арф-эквивалентна трилистнику.

(с)\* Если у двух узлов Арф-инварианты совпадают, то эти узлы Арф-эквивалентны.

**Теорема 1.4.5.** \* Рассмотрим 7 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, и  $\binom{7}{2} = 21$  отрезков, их соединяющих. Тогда существует замкнутая ломаная, составленная из этих отрезков и не изотопная контуру треугольника.

## 1.5 Ориентированные узлы и зацепления

Вы знаете, что такое ориентированная ломаная, так что Вы также знаете, что такое ориентированный узел (рис. 11).



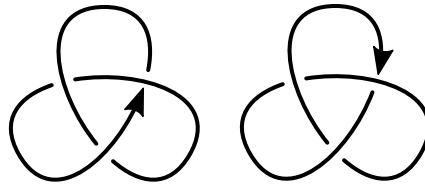


Рис. 11: Два трилистника с противоположными ориентациями

Неформальное понятие и строгое определение *изотопии* ориентированных узлов даются аналогично изотопии узлов.

**Задача 1.5.1.** Изотопные ориентированные ломаные без самопересечений на плоскости и на сфере определяются аналогично изотопным ориентированным узлам в пространстве.

(а) Ориентированный сферический треугольник изотопен на сфере тому же треугольнику с противоположной ориентацией.

(б) Аналог пункта (а) для плоскости неверен.

**Задача 1.5.2.** (а) Два тривиальных узла; (б) Два трилистника; (с) Две восьмерки с противоположными ориентациями изотопны.

**Теорема 1.5.3.** (Н. Trotter, 1964) *Существует ориентированный узел, не изотопный такому же узлу с противоположной ориентацией.*

Этот факт доказывается с использованием *полиномов Джонса* [PS96], [CDM12]; доказательство выходит за рамки данного текста.

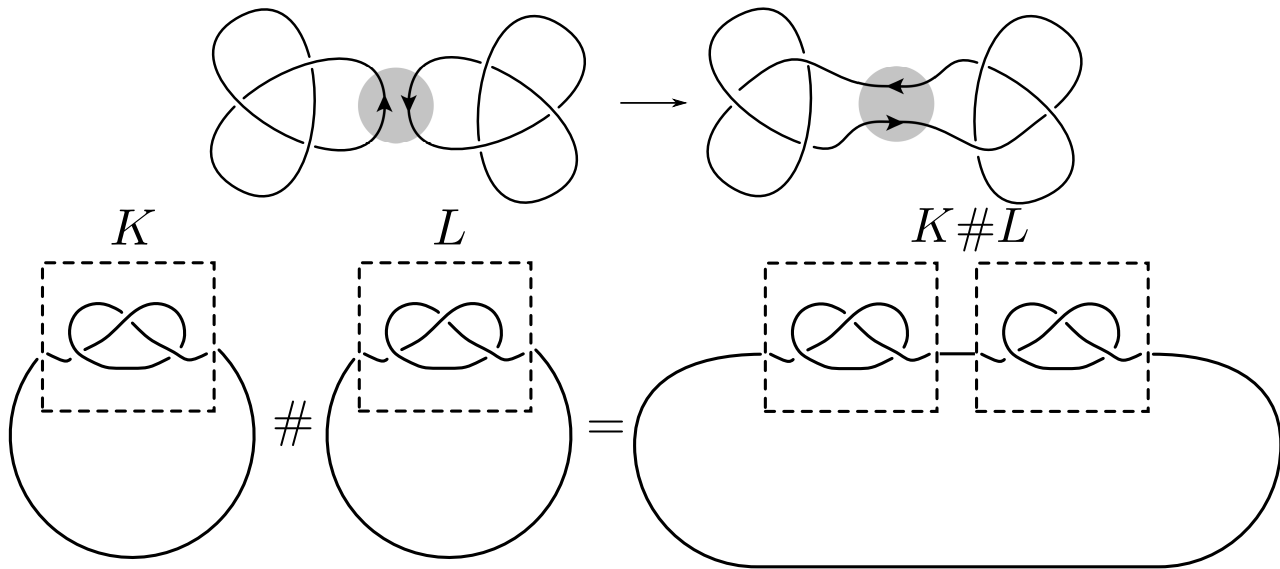


Рис. 12: Связная сумма узлов

**Связная сумма  $\#$  ориентированных узлов** определена на рис. 12.<sup>7</sup>

Эта операция не является корректно определенной для ориентированных узлов. Так что мы обозначим через  $K\#L$  любую связную сумму  $K$  и  $L$ .

<sup>7</sup>Более точно, рассмотрим непересекающиеся ориентированные диаграммы двух ориентированных узлов. Найдём в плоскости прямоугольник, одна пара сторон которого совпадает с некоторыми ребрами этих узлов, а остальная часть прямоугольника с узлами не пересекается, и эти ребра имеют одинаковую ориентацию вдоль контура прямоугольника. Теперь соединим две диаграммы, удалив эти ребра из узлов и добавив в качестве ребер отрезки, образующие другую пару сторон прямоугольника. Получившаяся диаграмма связной суммы имеет ориентацию, согласующуюся с ориентацией исходных диаграмм.

**Задача 1.5.4.** Для любых ориентированных узлов  $K, L, M$  и тривиального ориентированного узла  $O$  имеем

(a)  $K \# O = K$ . (b)  $K \# L = L \# K$ . (c)  $(K \# L) \# M = K \# (L \# M)$ .

(d)  $\text{arf}(K \# L) = \text{arf } K + \text{arf } L$  (здесь узлы  $K, L$  неориентированные).

(Строгий смысл пункта (a) — «существует связная сумма  $K$  и  $O$ , изотопная  $K$ ». Строгое смысл пунктов (b) и (c) аналогичен. См. замечание ниже.)

**Замечание.** Класс изотопии узла — это множество узлов, ему изотопных.

Ориентированный класс изотопии  $[K \# L]$  связной суммы двух ориентированных классов изотопии  $[K], [L]$  ориентированных узлов  $K, L$  не зависит от выборов, сделанных в процессе построения, и от выбора представителей  $K, L$  классов  $[K], [L]$ . Следовательно, связная сумма ориентированных классов изотопии ориентированных узлов корректно определена как  $[K] \#[L] := [K \# L]$ , см. [Sk15p, Remark 2.3.a]. Для классов изотопии неориентированных узлов связная сумма не является корректно определенной операцией.

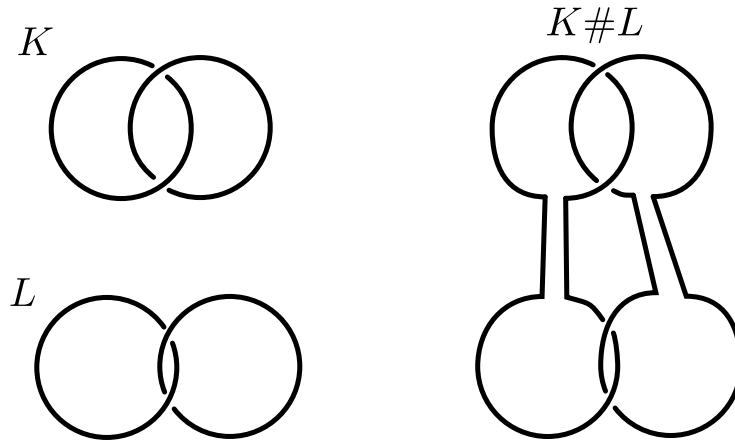


Рис. 13: Связная сумма зацеплений

Связная сумма  $\#$  зацеплений (упорядоченных или нет, ориентированных или нет) определяется аналогично связной сумме узлов, см. рис. 13. Это операция не является корректно определенной для зацеплений и задача 1.5.6 показывает, что операция также не является корректно определенной для классов изотопии зацеплений. Так что мы обозначим через  $K \# L$  любую связную сумму  $K$  и  $L$ .

**Задача 1.5.5.** (a,b,c,d) Докажите аналоги утверждений из задачи 1.5.4.a,b,c,d для зацеплений.

**Задача 1.5.6.** Существует две изотопные пары  $(K, L)$  и  $(K', L')$

(a) неупорядоченных; (b)\* упорядоченных

двухкомпонентных зацеплений (ориентированных или нет) таких, что некоторые связные суммы  $K \# L$  и  $K' \# L'$  не изотопны.

## 1.6 Гауссов коэффициент зацепления для плоских диаграмм

Пусть  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$  — упорядоченная пара векторов (ориентированных отрезков) на плоскости, пересекающихся в точке  $P$ . Определим **знак** точки  $P$  как  $+1$  если  $ABC$  ориентирован по часовой стрелке и как  $-1$  иначе (рис. 14).

**Коэффициент зацепления**  $\text{lk}$  диаграммы ориентированного двухкомпонентного зацепления — сумма знаков всех точек пересечения на диаграмме, в которых первая компонента проходит над второй компонентой. В каждом перекрестке *первый* (*второй*) вектор — это звено первой (*второй*) компоненты.

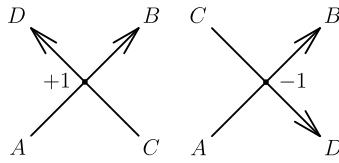


Рис. 14: Знак точки пересечения

**Задача 1.6.1.** (a,b) Найдите коэффициент зацепления для (некоторой диаграммы) зацепления Хопфа и пары колец Борромео, выбрав ориентацию компонент самостоятельно.

(c) Коэффициент зацепления сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Из (c) следует, что **коэффициент зацепления** ориентированного двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопии) — корректно определяется как коэффициент зацепления любой плоской диаграммы зацепления.

*Модуль коэффициента зацепления* (неориентированного) двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопии) корректно определен независимо от ориентации компонент.

Будем использовать без доказательства следующую *лемму о тривиальности*: для любых двух замкнутых ломаных в плоскости, вершины которых находятся в общем положении, сумма знаков их точек пересечения равна нулю. Обсуждение и доказательство см. §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ в [Sk18], [Sk].

**Задача 1.6.2.** (a) Перестановка компонент сохраняет коэффициент зацепления или меняет его знак на противоположный?

(b) Изменение ориентации любой компоненты меняет знак коэффициента зацепления на противоположный.

(c) Нарисуйте ориентированное двухкомпонентное зацепление с коэффициентом зацепления  $-5$ .

(d) Для любой связной суммы  $K \# L$  ориентированных двухкомпонентных зацеплений  $K, L$  имеем  $\text{lk}(K \# L) = \text{lk } K + \text{lk } L$ .

(e) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному зацеплению, коэффициент зацепления которого равен нулю.

**Теорема 1.6.3.** *Существует единственный целочисленный изотопический инвариант  $\text{lk}$  ориентированных двухкомпонентных зацеплений, который равен 0 для тривиального зацепления, такой, что*

$$\text{lk } K_+ - \text{lk } K_- = \begin{cases} 1 & \text{для перекрестков, в которых пересекаются разные компоненты;} \\ 0 & \text{для перекрестков, в которых одна компонента пересекает себя.} \end{cases}$$

**Задача 1.6.4.** Два зацепления (ориентированные или нет) называются *сингулярно гомотопными*, если одно зацепление можно непрерывно продеформировать в другое так, что во время деформации разные компоненты не пересекаются (но могут появляться самопересечения компонент). Или, эквивалентно, некоторая плоская диаграмма первого зацепления может быть преобразована в некоторую плоскую диаграмму второго зацепления с использованием движений Рейдемейстера и изменений перекрестка для одной компоненты.

(a) Зацепление Уайтхеда сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

(b) Если два ориентированных двухкомпонентных зацепления сингулярно гомотопны, тогда их коэффициенты зацепления равны.

(c)\* Если коэффициенты зацеплений двух двухкомпонентных зацеплений равны, то эти зацепления сингулярно гомотопны.

(d)\* Кольца Борромео сингулярно не гомотопны тривиальному зацеплению.

## 2 Задачи после промежуточного финиша

### 2.1 Инвариант Кэссона

**Знак** перекрестка ориентированной плоской диаграммы узла определен после рисунка 14; первый (второй) вектор — это вектор перехода (прохода). Очевидно, знак не зависит от ориентации диаграммы и таким образом определен для неориентированных диаграмм.

**Знак**  $P$ -скрецивающейся пары перекрестков на плоской диаграмме узла (для любой отмеченной точки  $P$ ) — это произведение знаков соответствующих перекрестков.

$P$ -инвариант Кэссона плоской диаграммы — это сумма знаков всех  $P$ -скрецивающихся пар перекрестков.

**Задача 2.1.1.** (a) Нарисуйте плоскую диаграмму узла и отмеченную точку  $P$  такие, что  $P$ -инвариант Кэссона плоской диаграммы равен  $-5$ .

(b,c,d,e,f) То же, что и в задачах 1.4.1.b,c,d,e,f для инварианта Кэссона.

(g) Сформулируйте и докажите аналог задачи 1.4.2.a для инварианта Кэссона.

(h,i) То же, что и в задачах 1.4.2.b и 1.5.4.d для инварианта Кэссона.

Из (e,f) следует, что **инвариант Кэссона** (число Кэссона)  $c_2$  плоской диаграммы узла (или даже изотопического класса узла) является корректно определенным инвариантом, если положить его равным  $P$ -инварианту Кэссона любой плоской диаграммы этого узла с любой отмеченной точкой  $P$ .

**Теорема 2.1.2.** *Существует единственный целочисленный изотопический инвариант  $c_2$  для (неориентированных) узлов, который равен 0 для тривиального узла и для которого*

$$c_2(K_+) - c_2(K_-) = \text{lk } K_0.$$

(Число  $\text{lk } K_0$  определено, поскольку изменение ориентации обеих компонент ориентированного зацепления не меняет коэффициент зацепления.)

### 2.2 Правильные раскраски

*Дугой* на плоской диаграмме (узла или зацепления) называется связный фрагмент, идущий от одного прохода до другого. **Правильная раскраска** плоской диаграммы (узла или зацепления) — это такая раскраска ее дуг в три цвета, что по крайней мере два цвета использовано, и в каждом перекрестке встречаются либо все три цвета, либо только один цвет. Плоская диаграмма (узла или зацепления) называется **раскрашиваемой в три цвета** если ее можно правильно раскрасить.

**Задача 2.2.1.** Для каждого из следующих узлов или зацеплений возьмите любую плоскую диаграмму и определите, является ли она раскрашиваемой в три цвета:

(a) тривиальный узел; (b) трилистник; (c) восьмерка.

(d-j) зацепления на рис. 7 и 8.

**Задача 2.2.2.** (a) Раскрашиваемость в три цвета плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.

(b) Ни одно из зацеплений на рис. 7 и 8 (кроме тривиального зацепления) не изотопно тривиальному зацеплению.

**Задача 2.2.3.** Узел  $5_1$  не изотопен тривиальному узлу.

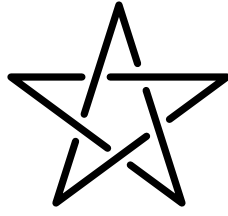


Рис. 15: Узел  $5_1$

## 2.3 Полиномы Александера-Конвея

**Задача 2.3.1.** \* (а) Существует единственный изотопический инвариант трехкомпонентных ориентированных зацеплений  $\text{arf}$  со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$\text{arf}(K_+) - \text{arf}(K_-) = \begin{cases} \text{lk}_2 K_0 & \text{в точке пересечения различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

(Здесь  $\text{lk}_2 K_0$  определено, так как  $K_0$  — двухкомпонентное зацепление.)<sup>8</sup>

(б) Существует единственный изотопический инвариант двухкомпонентных ориентированных зацеплений  $a_3$  со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$a_3(K_+) - a_3(K_-) = \text{arf } K_0.$$

(Здесь  $\text{arf } K_0$  определено, так как  $K_0$  либо узел, либо трехкомпонентное зацепление.)

(с) Существует единственный изотопический инвариант четырехкомпонентных ориентированных зацеплений  $a_3$  со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$a_3(K_+) - a_3(K_-) = \begin{cases} \text{arf } K_0 & \text{в точке пересечения различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

(Здесь  $\text{arf } K_0$  определено, так как  $K_0$  — трехкомпонентное зацепление.)

Доказательство существования в задачах 2.3.1 и теореме 2.3.3 не приводится в этом тексте. Простое доказательство можно найти в [Ka06', §2-§5], [Ka06]. Вы можете заработать плюс, доказав единственность, и решать другие задачи, предполагая существование доказанным. Связь с правильными раскрасками см. в §6 [Ka06'].

**Задача 2.3.2.** Найдите (сами выберите ориентацию компонент)

(а)  $\text{arf}$  инвариант колец Борромео;

(б,с,д\*)  $a_3$  инвариант зацепления Хопфа, зацепления Уайтхеда и *четырёхкомпонентного зацепления Борромео*, т.е. такого четырехкомпонентного зацепления, для которого любое трехкомпонентное подзацепление изотопно тривиальному зацеплению, но само зацепление не изотопно тривиальному.

**Теорема 2.3.3.** \* (а) Существует единственная бесконечная последовательность  $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$  целочисленных изотопических инвариантов ориентированных неупорядоченных зацеплений, принимающая значения  $c_0 = 1$  и  $c_1 = c_2 = \dots = 0$  на тривиальном зацеплении, и такая, что

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0)$$

<sup>8</sup>Теорема 1.4.3 является аналогом задачи 2.3.1 для однокомпонентных зацеплений (узлов). Определение  $\text{arf}$ , данное в §1.4 применимо только к узлам, и наша цель здесь — обобщить его на трехкомпонентные зацепления.

для любого  $n \geq 0$ .

(b) Существует единственная бесконечная последовательность  $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$  целочисленных изотопически инвариантных ориентированных упорядоченных зацеплений, принимающая значения  $c_0 = 1$  и  $c_1 = c_2 = \dots = 0$  на тривиальном зацеплении, и такая, что для любого  $n \geq 0$  имеем

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0),$$

где  $K_0$  — это  $K_0$  с рис. 9 с некоторым упорядочением компонент.

Вообще-то две версии теоремы 2.3.3 эквивалентны. Вы можете использовать теорему 2.3.3.b без доказательства.<sup>9</sup>

Многочлен  $C(K)(t) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots$  называется *многочленом Конвея*, см. задачу 2.3.5.e. Введение этого многочлена позволяет находить все инварианты  $c_n$  так же быстро, как и один из них. Формула из теоремы 2.3.3 эквивалентна следующему равенству

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0).$$

**Задача 2.3.4.** Найдите многочлены Конвея следующих зацеплений (выберите сами ориентацию для каждой компоненты).

- (a) тривиальное зацепление с двумя компонентами;
- (b) тривиальное зацепление с  $n$  компонентами;
- (c) зацепление Хопфа; (d) трилистник; (e) восьмерка;
- (f) зацепление Уайтхеда; (g) кольца Борромео; (h) узел  $5_1$ .

**Задача 2.3.5.** (a) Имеет место равенство  $c_0(K) = 1$  если  $K$  узел, и  $c_0(K) = 0$  в противном случае (т.е. если  $K$  имеет более одной компоненты).

- (b) Если  $K$  — узел, то  $c_{2j+1}(K) = 0$ , и  $c_2$  это инвариант Кэссона.
- (c) Если  $K$  — двухкомпонентное зацепление, то  $c_{2j}(K) = 0$ , и  $c_1$  это коэффициент зацепления.
- (d) Если  $K$  —  $k$ -компонентное зацепление, то  $c_j(K) = 0$ , если или  $j \leq k - 2$ , или  $j - k$  чётно.
- (e) Для каждого узла или зацепления все инварианты  $c_n$ , кроме конечного числа, нулевые.

**Задача 2.3.6.** (a) Изменение ориентации всех компонент зацепления (в частности, изменение ориентации узла) сохраняет многочлен Конвея.

(b) Существует двухкомпонентное зацепление такое, что изменение ориентации одной его компоненты меняет степень многочлена Конвея (в частности, такое изменение ни сохраняет многочлен Конвея, ни меняет его знак).

- (c) Для любой связной суммы  $K \# L$  узлов  $K, L$  верно  $C(K \# L) = C(K)C(L)$ .

Зацепление называется *разделяемым*, если оно изотопно зацеплению, компоненты которого содержатся в непересекающихся шарах.

- Задача 2.3.7.** (a,b,c) Ни одно зацепление из теоремы 1.2.2 не является разделяемым.
- (d) Многочлен Конвея разделяемого зацепления тривиален.

---

<sup>9</sup>Не вполне ясно, которая из двух версий сформулирована в [CDM12, §2.3.1], так что мы приводим обе версии и выводим более строгую версию из более слабой.

## 2.4 Vassiliev-Goussarov invariants (sketch)\*

Denote by

- $\Sigma$  the set of isotopy classes of singular knots [PS96, 4.1],
- $\delta_n$  the set of all chord diagrams that have  $n$  chords [PS96, 4.8];
- $\sigma(K)$  the *chord diagram* of a singular knot  $K$  [PS96, 4.8], [CDM12, 3.4.1] (not to be confused with *Gauss diagrams* for a non-singular knot  $K$  [CDM12, 1.8.4]).

**Теорема 2.4.1** (Vassiliev-Kontsevich, [PS96], [CDM12]). *For any map  $\lambda : \delta_n \rightarrow \mathbb{R}$  there exists a map  $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  having properties (1)-(3) below if and only if  $\lambda$  satisfies to the 1-term and the 4-term relations [PS96, (4.5), (4.6)].*

(1) *For any singular knots  $K_+, K_-$  and  $K^0$  from [PS96, (4.1)] (notice the difference with fig. 9) we have*

$$v(K_+) - v(K_-) = v(K^0),$$

- (2<sub>n</sub>)  *$v(K) = 0$  for each singular knot that has more than  $n$  double points, and*  
 (3)  *$v(K) = \lambda(\sigma(K))$  for each singular knot that has exactly  $n$  double points.*

A map  $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  such that (1) holds is called a *Vassiliev-Goussarov invariant*.

A map  $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  such that (2<sub>n</sub>) holds is called a *map of order at most  $n$* .

**Задача 2.4.2.** (a) The map  $v$  of theorem 2.4.1 is unique up to Vassiliev-Goussarov invariant of order at most  $n - 1$ . More precisely, the difference between maps  $v, v' : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying to (1), (2<sub>n</sub>) and (3), satisfies to (1) and (2<sub>n-1</sub>).

(b) Prove the ‘only if’ part of theorem 2.4.1.

(0),(1),(2),(3)\* Prove the ‘if’ part of theorem 2.4.1 for  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Hint: for  $n = 2$  use theorem 2.1.2, for  $n = 3$  use the coefficient of  $h^3$  in  $J(e^h)$ , where  $J$  is the Jones polynomial in  $t$ -parametrization [CDM12, 2.4.2, 2.4.3].

In the remaining problems theorem 2.4.1 can be used without proof. Assertion ‘ $v(K) = x$  for any singular knot  $K$  whose chord diagram is  $a$ ’ is shortened to ‘ $v(a) = x$ ’.

**Задача 2.4.3.** (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant  $v_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  of order at most 2 such that

- $v_2(O) = 0$  for the trivial knot  $O$ , and
- $v_2(1212) = 1$  ((1212) is the ‘non-trivial diagram with 2 chords’ [PS96, Figure 4.4], 3rd diagram of the first line).

Warning: in this problem it is allowed to use theorem 2.4.1 but not theorem 2.1.2.

(b,b’,c,d) Calculate  $v_2$  for the right trefoil, left trefoil, figure eight knot and the  $5_1$  knot.

**Задача 2.4.4.** (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant  $v_3 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  of order at most 3 such that

- $v_3(O) = 0$  for the trivial knot  $O$  and for the left trefoil  $O$ , and
- $v_3(123123) = 1$  ((123123) is the ‘non-trivial most symmetric diagram with 3 chords’, [PS96, Figure 4.4], 5th diagram of the second line).

(b,c,d\*) Calculate  $v_3$  for the right trefoil, figure eight knot and the  $5_1$  knot.

Hints: Problems 2, 3, 4ab, Results/Theorems 11, 13, 14 from [PS96, §4].

**Задача 2.4.5.** (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant  $v_4 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  of order at most 4 such that

- $v_4(O) = 0$  for the trivial knot  $O$ , for the left trefoil  $O$ , and for the right trefoil  $O$ ,
- $v_4(12341234) = 2$ ,  $v_4(12341432) = 3$  and  $v_4(12341423) = 5$  [PS96, Problem 4.4.b].

(c\*,d\*) Calculate  $v_4$  for the figure eight knot and the  $5_1$  knot.

## Указания и решения к задачам до промежуточного финиша

1.1.1. (a,b,c,d) См. [Pr95]. Проще всего изготовить трилистник и восьмерку из веревки или шнурка, а затем попытаться получить из этих узлов все узлы, изображенные на рисунке 1. Выполнить некоторые преобразования узла восьмерка вам поможет рис. 16.

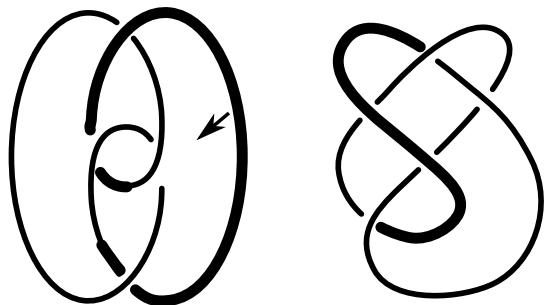


Рис. 16: Изотопия восьмерки

(e) Рассмотрим два узла с совпадающими плоскими диаграммами в горизонтальной плоскости  $\pi$ . Для каждой точки  $X$  в пространстве пусть  $p(X)$  — прямая, проходящая через  $X$  и перпендикулярная  $\pi$ . Пусть  $h(X)$  — высота  $X$  относительно  $\pi$ , положительная ( $h(X) > 0$ ) если  $X$  находится в верхнем полупространстве и отрицательная ( $h(X) < 0$ ) если  $X$  находится в нижнем полупространстве. Каждой точке  $A$  первого узла поставим в соответствие точку  $A'$  второго узла с помощью следующей процедуры. Рассмотрим два случая:

*Случай 1: Проекция точки  $A$  на  $\pi$  не является перекрестком на плоской диаграмме.* В этом случае прямая  $p(A)$  пересекает первый узел только в точке  $A$ . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, то прямая  $p(A)$  пересекает второй узел также только в одной точке. Обозначим эту точку через  $A'$ .

*Случай 2: проекция точки  $A$  на  $\pi$  является перекрестком на плоской диаграмме.* В этом случае прямая  $p(A)$  пересекает первый узел еще в одной точке  $B \neq A$ . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, то прямая  $p(A)$  пересекает второй узел тоже в двух точках:  $C$  и  $D$ . Без ограничения общности можно считать что  $h(C) > h(D)$ . Тогда если  $h(A) > h(B)$ , то положим  $A' = C$ , иначе  $A' = D$ .

Для каждой точки  $A$  первого узла и каждого числа  $t \in [0, 1]$  пусть  $A(t)$  — точка на прямой  $p(A)$  на высоте  $h(A(t)) = (1 - t)h(A) + th(A')$ . По построению  $A(0) = A$ ,  $A(1) = A'$ , и преобразование первого узла,двигающее точку  $A(0)$  к точке  $A(1)$  с постоянной скоростью так, что в момент времени  $t$  она находится в положении  $A(t)$ , является искомой изотопией.

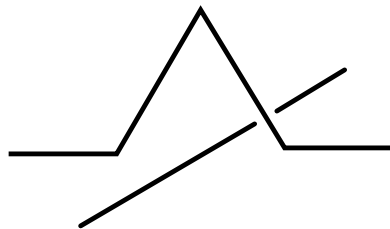


Рис. 17: Мостик через перекресток

1.1.2. Для каждого перекрестка на плоской диаграмме выберем на участке перекрестка, являющемся переходом, две точки, близкие к пересечению и находящиеся по разные стороны от него. Заменим отрезок между двумя выбранными точками «мостиком», соединяющим выбранные точки и «подымающимся» над плоской диаграммой (см. рис. 17.). После замены всех перекрестков такими «мостиками» мы получим искомый узел.



**1.1.3.** (а) Используйте результаты задач 1.4.1, 2.1.1, или 2.2.1.

(б) Используйте результаты задач 1.4.1 или 2.1.1.

(с) Используйте результат задачи 2.2.1.

(д) Рассмотрим любую связную сумму  $n$  копий трилистника. Согласно утверждениям 2.1.1.с,і инвариант Кэссона такого узла равен  $n$ . Следовательно, для различных значений  $n$  соответствующие узлы не изотопны.

**1.1.4.** Выберем узел, проецирующийся на данную плоскую диаграмму тем же способом, что и в утверждении 1.1.2. Будем считать, что все «мостики» лежат в верхнем полупространстве относительно плоскости проекции. По предположению существуют точки  $X$  и  $Y$  узла, которые разбивают узел на две ломаные  $p$  и  $q$  такие, что

- $q$  лежит на плоскости проекции и проходит только через проходы;
- $p$  проецируется на ломаную  $p'$ , которая проходит только через переходы.

Возьмем точку  $Z$  в верхнем полупространстве и точку  $T$  в нижнем полупространстве. Построим изотопию между заданным узлом и замкнутой ломаной  $XZYT$ , которая изотопна тривиальному узлу. Построение изотопии состоит из трех шагов, в каждом из которых точки  $X, Y$  остаются фиксированными.

*Шаг 1. Изотопия между  $q$  и  $XTY$ .* Предположим, что  $q = A_0A_1 \dots A_n$ , где  $A_0 = X$  и  $A_n = Y$ . Тогда изотопия получается последовательностью элементарных движений

$$A_0A_1 \rightarrow A_0TA_1, \quad TA_1A_2 \rightarrow TA_2, \quad TA_2A_3 \rightarrow TA_3, \quad \dots, TA_{n-1}A_n \rightarrow TA_n.$$

*Шаг 2. Изотопия между  $p$  и  $p'$ .* Уберем все «мостики» с помощью элементарных движений.

*Шаг 3. Изотопия между  $p'$  и  $XZY$ .* Строится аналогично шагу 1.

**1.1.5.** Следует из утверждения 1.1.4.

*Другая идея доказательства (см. теорему 3.8 в [PS96]).* Обозначим через  $\pi$  горизонтальную плоскость, содержащую диаграмму. Для каждой точки  $X$  в пространстве  $p(X)$  и  $h(X)$  определяются как в решении задачи 1.1.1.е. Пусть  $l$  — прямая на плоскости, которая проходит через вершину  $A_0$  плоской диаграммы, и пусть вся диаграмма лежит по одну сторону от прямой  $l$ . Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n$  — все вершины плоской диаграммы в порядке их появления при движении вдоль диаграммы в некотором направлении. Выберем точки  $B_0, \dots, B_n$  так, что  $A_i \in p(B_i)$  для  $i = 1, \dots, n$ , и  $h(B_i) < h(B_j)$  для  $i < j$ . Пусть  $B_{n+1}$  — точка, проекция которой на  $\pi$  близка к  $A_0$  и  $h(B_{n+1}) > h(B_n)$ . Тогда узел  $B_0 \dots B_n B_{n+1}$  изотопен тривиальному узлу. Действительно, по построению прямой  $l$ , проекция узла на любую плоскость, перпендикулярную  $l$ , является замкнутой ломаной без самопересечений. Остается только изменить перекрестки плоской диаграммы так, чтобы они согласовывались с проекцией построенного узла на плоскость  $\pi$ .

**1.1.6.** См. §1.7 в [PS96].

*Замечание.* Так как в §1.6 [PS96] нет такого же строгого определения для движений Рейдемейстера как для движений изотопии плоскости,<sup>10</sup> рассуждения в §1.7 [PS96] не являются

---

<sup>10</sup>Это также показывает, что наличие движений изотопии плоскости в утверждении из §1.7 [PS96] не делает само утверждение строгим, поэтому этого следует избегать. На интуитивном уровне движения изотопии плоскости следует пропускать. С альтернативным строгим определением ниже движения изотопии плоскости могут быть выражены с помощью движений Рейдемейстера и поэтому их следует опустить в утверждении.

Мы предложим альтернативное строгое определение первого движения Рейдемейстера. У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. Возьмем на плоскости замкнутую несамопересекающуюся ломаную  $L$ , внутренность которой (см. теорему Жордана в замечании после теоремы 1.1.3) пересекает диаграмму  $D$  по несамопересекающейся ломаной  $M$ , соединяющей две точки на  $L$ . Пусть  $N$  — замкнутая несамопересекающаяся ломаная во внутренности  $L$  такая, что  $N \cap L = \emptyset$ ,  $N \cap M$  — одна точка, и  $M \cup N$  можно сделать (несамопересекающейся) ломаной общего положения. *Первое движение Рейдемейстера* — это замена  $M$  на  $M \cup N$  в  $D$  с сохранением «информации» в соответствующем перекрестке.

строгим доказательством. По-видимому, строгое доказательство может быть получено с использованием строгого определения движений Рейдемейстера.

**1.2.1.** (a) Следует из (b) (или может быть доказано независимо).

(d) Следует из (e) (или может быть доказано независимо).

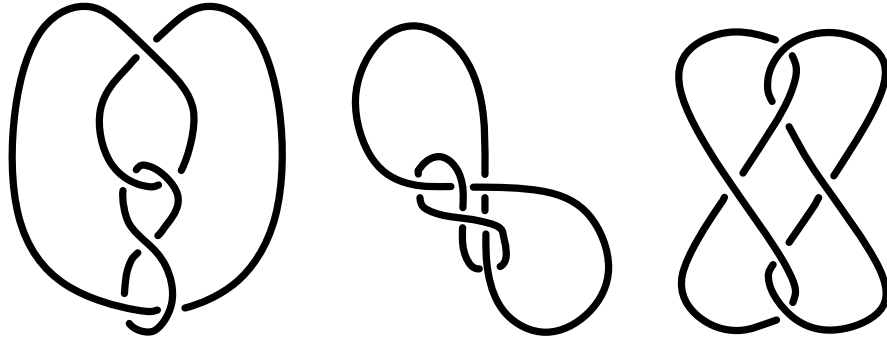


Рис. 18: Изотопия зацепления Уайтхеда

(e) См. рис.18.

(f) Возьмем три эллипса, заданных системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

См. рис. 19. Возьмем четырехугольники, описанные около этих эллипсов и симметричные относительно координатных осей. Искомая прямая задается уравнением  $x = y = z$ .

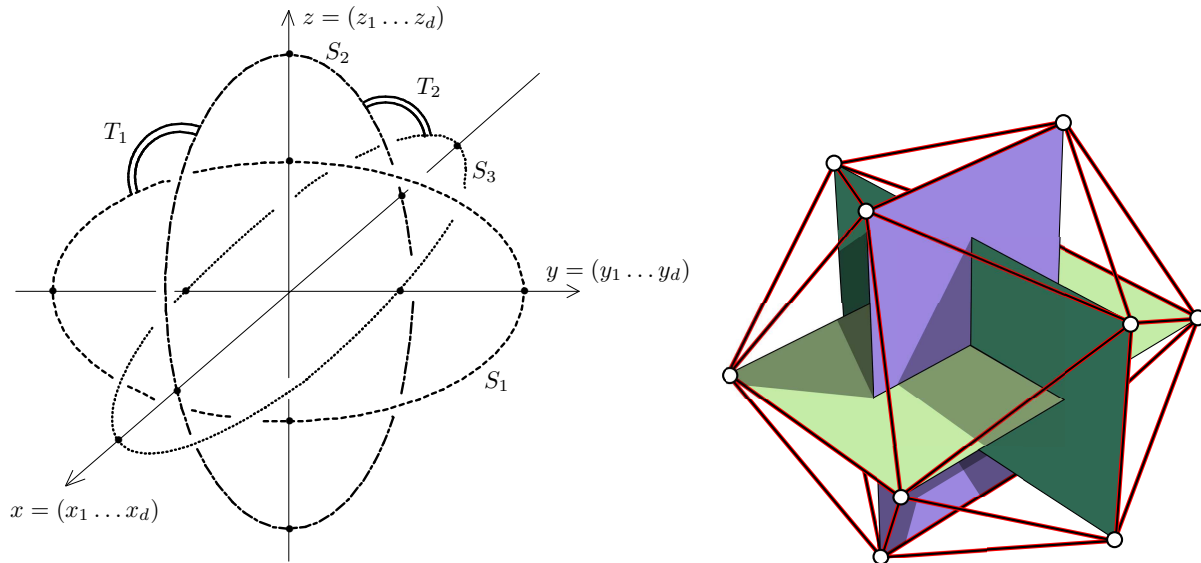


Рис. 19: Кольца Борромео

**1.2.2.** (a,c) Используйте результаты задачи 1.3.2.

(b,d) Используйте, например, результаты задачи 2.2.1 и 2.2.2.

**1.3.1.** Обозначим через  $\langle ABC \rangle$  внутренность треугольника  $ABC$ .

(i $\Leftrightarrow$ ii) Отрезок  $XY$  проходит над отрезком  $BC$  при взгляде из точки  $A$ , если и только если  $XY$  пересекает  $\langle ABC \rangle$ .

Контур треугольника  $DEF$  — это объединение отрезков  $DE$ ,  $EF$  и  $DF$ . Поэтому i $\Leftrightarrow$ ii.

(i $\Leftrightarrow$ iii) Контур треугольника  $DEF$  либо не пересекается с поверхностью тетраэдра  $OABC$ , либо пересекается с ней ровно в двух точках. Это влечет эквивалентность следующих трех свойств:

- контур треугольника  $DEF$  пересекает  $\langle ABC \rangle$  ровно в одной точке;
- контур треугольника  $DEF$  пересекает в точности один из треугольников  $\langle OAB \rangle$ ,  $\langle OBC \rangle$  или  $\langle OAC \rangle$ .
- контур треугольника  $ABC$  проходит в точности под одной из сторон  $DEF$  при взгляде из точки  $O$ .

**1.3.2.** (а) *Ответы* (слева направо): 1, 0, 0, 0.

(б) Докажите утверждение отдельно для каждого движения Рейдемейстера. При движениях I и III число перекрестков, в которых первая компонента проходит над второй, не изменяется. При движении II это число изменяется на 0 или  $\pm 2$ .

**1.3.3.** (а) Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. По лемме о четности (сформулированной перед задачей 1.3.3) число таких перекрестков, где первая компонента проходит над второй, имеет ту же четность что и число перекрестков, где вторая компонента проходит над первой. Это завершает доказательство.

(б) Примером является четвертое зацепление на рис. 7. Используя коэффициент зацепления, можно доказать, что это зацепление не изотопно тривиальному, см. §1.6.

**1.3.4.** Предположим, что  $f$  — другой инвариант, отличный от  $lk_2$  и удовлетворяющий предположениям. Тогда  $f - lk_2$  — изотопический инвариант, равный нулю на тривиальном зацеплении и инвариантный относительно изменений перекрестков. Согласно аналогу леммы 1.1.5 для зацеплений любая плоская диаграмма зацепления может быть получена из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному, при помощи изменений перекрестков. Следовательно,  $f - lk_2 = 0$ .

**1.3.5.** Доказательство не должно представлять трудности, и мы рекомендуем вам восстановить его детали самостоятельно.

**1.3.6.** См. Теорему 1.1 в §1 [Sk14].

**1.4.1.** (а) Если  $P$  — такая точка на плоской диаграмме, как описано в задаче 1.1.4, то не существует  $P$ -скрецивающихся пар перекрестков. Следовательно,  $P$ -Арф-инвариант равен нулю.

(б) *Ответ 0.* Тривиальный узел не имеет перекрестков и скрецивающихся пар перекрестков. Поэтому Арф-инвариант этого узла равен нулю при любом выборе отмеченной точки.

(с) *Ответ: 1.* Трилистник имеет 3 перекрестка. Для любой отмеченной точки  $P$  ровно одна пара перекрестков является  $P$ -скрецивающейся. Следовательно,  $P$ -Арф-инвариант трилистника равен 1.

(d) *Ответ: 1.*

(е) Достаточно показать, что Арф-инвариант не изменяется, когда отмеченная точка, двигаясь вдоль плоской диаграммы, пересекает один перекресток. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — две отмеченные точки такие, что отрезок  $P_1P_2$  содержит в точности один перекресток  $X$ . Рассмотрим два случая.

*Случай 1:  $P_1P_2$  участвует в проходе.* Тогда  $X$  не образует ни  $P_1$ -скрецивающейся, ни  $P_2$ -скрецивающейся пары ни с одним другим перекрестком. Поэтому  $P_1$ - и  $P_2$ -Арф-инварианты диаграммы равны.

*Случай 2:  $P_1P_2$  участвует в переходе.* Тогда  $X$  делит диаграмму на две замкнутые ломаные  $q_1$  и  $q_2$  такие, что  $P_1$  лежит на  $q_1$ , а  $P_2$  лежит на  $q_2$ . Обозначим через  $n_1$  (соответственно,  $n_2$ ) число всех таких перекрестков на  $q_1$  и  $q_2$ , в которых  $q_1$  проходит над  $q_2$  (соответственно,  $q_2$  проходит над  $q_1$ ). Обозначим через  $N_1$  (соответственно,  $N_2$ ) количество  $P_1$ -скрецивающихся (соответственно,  $P_2$ -скрецивающихся) пар, образованных  $X$  и некоторым пересечением  $q_1$  и  $q_2$ .

Тогда

$$\text{arf}_{P_1} D - \text{arf}_{P_2} D = N_1 - N_2 = n_1 - n_2 \equiv_2 n_1 + n_2 \equiv_2 0,$$

где  $D$  — данная плоская диаграмма. В последней формуле

- первое равенство выполнено поскольку пара перекрестков в  $D$  является  $P_1$ -скрецивающейся или  $P_2$ -скрецивающейся (но не одновременно!) тогда и только тогда когда она образована  $X$  и некоторым пересечением  $q_1$  и  $q_2$ ;

- второе равенство выполнено поскольку  $N_1 = n_1$  и  $N_2 = n_2$ ; действительно, точка пересечения  $q_1$  и  $q_2$  образует  $P_1$ -скрецивающуюся (соответственно,  $P_2$ -скрецивающуюся) пару с  $X$  тогда и только тогда когда в этой точке  $q_1$  проходит над (соответственно, под)  $q_2$ ;

- $\equiv_2$  обозначает сравнение по модулю 2;

- последнее сравнение выполнено ввиду леммы о четности, примененной к ломаным  $q_1$  и  $q_2$ .

(f) Докажем утверждение отдельно для каждого движения Рейдемейстера. Основная идея состоит в удачном выборе отмеченной точки.

*Движение типа I.* Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 20 (слева). Проверьте, что перекресток  $A$  не образует  $P$ -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком.

*Движение типа II.* Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 20 (в центре). Проверьте, что ни один из перекрестков  $A$  и  $B$  не образует  $P$ -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком.

*Движение типа III.* Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 20 (справа). Проверьте, что ни один из перекрестков  $A, B$  не образует  $P$ -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком, и что ни один из перекрестков  $A', B'$  не образует  $P'$ -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком. Затем проверьте, что перекресток  $X$ , отличный от  $A, B, C$ , образует  $P$ -скрецивающуюся пару с  $C$ , если и только если  $X$  образует  $P'$ -скрецивающуюся пару с  $C'$ .

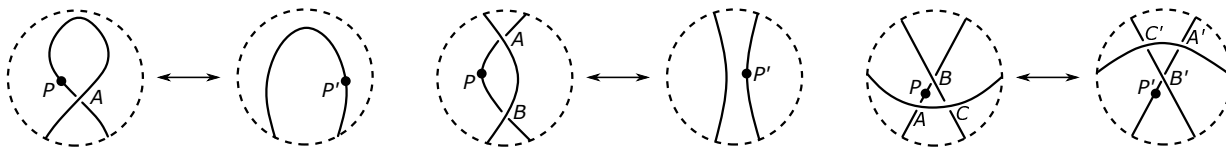


Рис. 20:  $\text{Arf}$ -инвариант не меняется при движениях Рейдемейстера

**1.4.2.** (a) Выберем отмеченные точки  $P_+, P_-$ , как показано на рис. 21. Проверьте, что перекресток  $A_-$  не образует  $P_-$ -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком в  $K_-$ . Затем проверьте, что число таких перекрестков, которые образуют  $P_+$ -скрецивающуюся пару с  $A_+$  в  $K_+$ , сравнимо с  $\text{lk}_2 K_0$  по модулю 2.

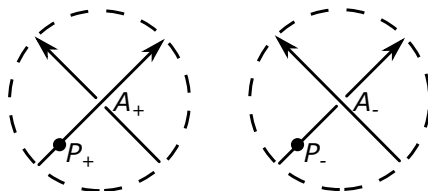


Рис. 21: Скайн-соотношения для  $\text{Arf}$ -инварианта

(b) Рассмотрим любую связную сумму двух трилистников. Согласно утверждениям 1.4.1.c и 1.5.4.d Арф-инвариант этого узла равен нулю. В то же время по утверждениям 2.1.1.c,i инвариант Кэссона этого узла равен 2. Следовательно, этот узел не изотопен тривиальному узлу.

**1.4.3. Существование.** Следует из утверждений 1.4.1.b и 1.4.2.a.

*Единственность.* Доказательство основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 1.3.4. Используйте саму лемму 1.1.5, а не ее аналог для зацеплений.

**1.4.4.** См. стр. 75–78 в [Ka87].

**1.4.5.** См. теорему 2 в [CG83].

**1.5.1. (b) Первое решение.** Назовем ориентированную ломаную *положительной*, если ограниченная ею часть плоскости лежит справа от любого ее звена (здесь используется теорема Жордана, сформулированная в замечании после теоремы 1.1.3). Покажите, что положительность ломаной сохраняется при элементарных движениях.

*Указание ко второму решению.* Положительность ломаной из предыдущего решения можно эквивалентно определить следующим образом. Будем говорить, что ориентированная ломаная  $A_1 \dots A_n$  *положительна*, если для любой ее внутренней точки  $O$  сумма ориентированных углов  $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$  положительна (т. е. *индекс* всякой внутренней точки ломаной относительно самой ломаной положителен).

**1.5.2. (a), (b), (c)** Каждый из трех указанных ориентированных узлов переводится в ориентированный узел с противоположной ориентацией вращением на угол  $\pi$  относительно «вертикальной» оси, проходящей через «самую верхнюю» точку узла (см. самую левую диаграмму на рис. 1 в первом и втором ряду для трилистника и восьмерки соответственно). Это вращение входит в непрерывное семейство вращений на угол  $\pi t, t \in [0, 1]$  относительно той же прямой. Это и есть требуемая изотопия.

**1.5.4. (a)** См. рис. 22.

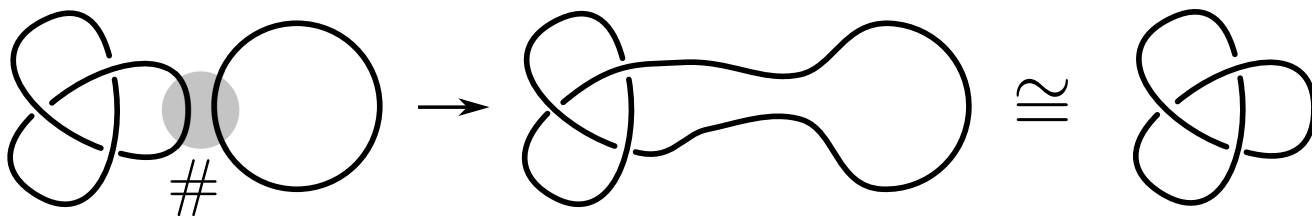


Рис. 22: К доказательству изотопности  $K\#O$  и  $K$

(b) Достаточно взять «маленький» узел из класса изотопии  $[L]$  и «провести» его через узел класса изотопии  $[K]$ , см. рис. 23.

(c) Классы изотопии узлов из левой и правой частей равенства имеют общего представителя, показанного на рис. 24.

(d) Выберите отмеченную точку  $P$  близко к «месту соединения» узлов. Затем проверьте, что всякая  $P$ -скреживающаяся пара перекрестков в  $K\#L$  получается из скреживающейся пары в  $K$  или из скреживающейся пары в  $L$ .

**1.5.5. (d)** Проверьте, что всякая точка пересечения разных компонент в  $K\#L$  получается из точки пересечения разных компонент в  $K$  или точки пересечения разных компонент в  $L$ .

**1.5.6. (a)** В качестве примера можно взять одинаковые зацепления состоящие из трилистника и тривиального узла в непересекающихся кубах. См. рис. 3.16 в [PS96].

(b) См. [As]. На рис. 25 альтернативный пример, предложенный А. Рябичевым.

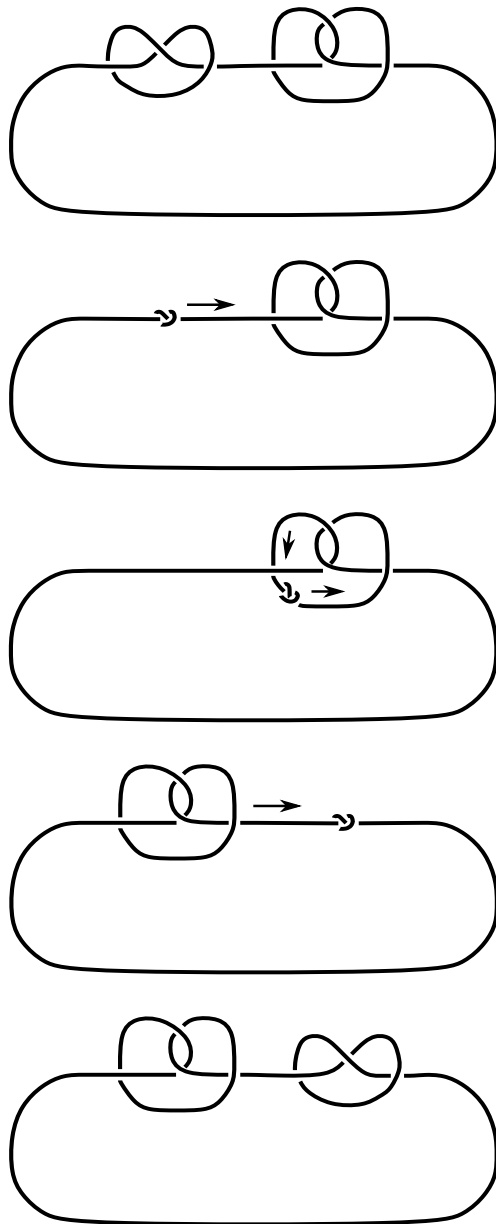


Рис. 23: К доказательству изотопности  $K\#L$  и  $L\#K$

**1.6.1.** *Ответы:* (a) 1; (b) 0.

(c) Доказательство аналогично 1.3.2. Достаточно проверить, что знаки всех точек пересечения не меняются при движениях Редемейстера.

**1.6.2.** (a) Доказательство аналогично 1.3.2.b. Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. Из леммы о тривиальности (сформулированной после задачи 1.6.2) следует, что сумма знаков точек пересечения, в которых первая компонента выше второй, противоположна сумме знаков точек пересечения, в которых вторая компонента выше первой. Поскольку перестановка компонент зацепления меняет знаки всех точек пересечения компонент, то коэффициент зацепления не меняется.

(b) Смена ориентации любой компоненты меняет знаки всех точек пересечения.

(c) Достаточно рассмотреть любую связную сумму пяти зацеплений Хопфа, у которых ориентации на компонентах выбраны таким образом, чтобы их коэффициент зацепления был равен  $-1$ .

(d) Доказательство аналогично 1.5.4.

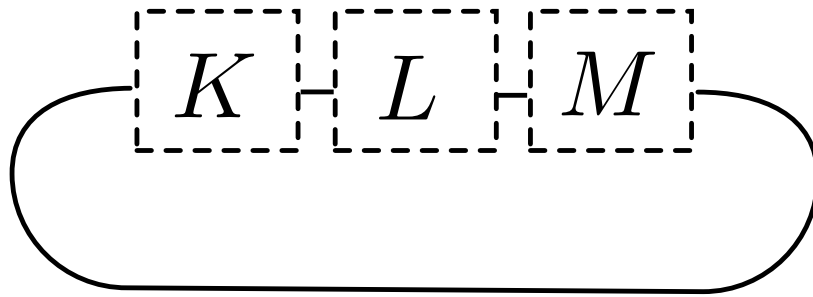


Рис. 24: К доказательству изотопности  $(K\#L)\#M$  и  $K\#(L\#M)$

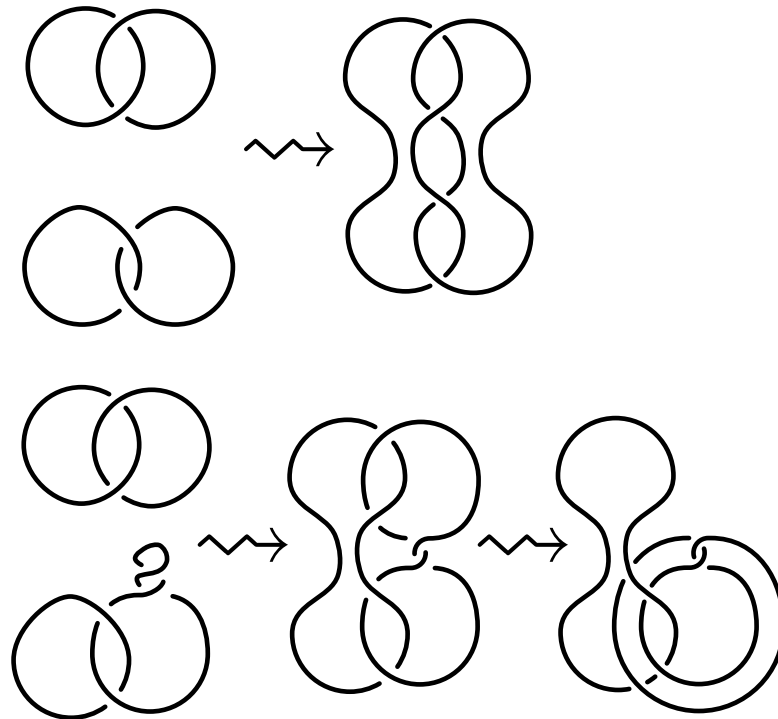


Рис. 25: Связная сумма изотопических классов упорядоченных зацеплений не является корректно определенной операцией

(e) Примером является зацепление Уайтхеда (оно не изотопно тривиальному по теореме 1.2.2).

**1.6.3.** Доказательство аналогично теореме 1.3.4.

# Указания и решения к задачам после промежуточного фи-ниша

**2.1.1.** *Ответы:* (b) 0; (c) 1; (d)  $-1$ .

(a) Рассмотрим любую связную сумму пяти восьмерок. Из п. (d) и задачи 2.1.1.j следует, что инвариант Кэссона данного узла равен  $-5$ .

(b) Тривиальный узел не имеет перекрестков и потому скрещивающихся пар перекрестков. Поэтому инвариант Кэссона этого узла равен нулю.

(c) Все три перекрестка трилистника имеют одинаковый знак. Поскольку трилистник имеет только одну скрещивающуюся пару перекрестков (вне зависимости от выбора отмеченной точки), то инвариант Кэссона этого узла равен 1.

(e) Доказательство аналогично задаче 1.4.1.e. Используйте лемму о тривиальности, сформулированную после задачи 1.6.1. Здесь и далее важно следить за знаками точек пересечения!

(f) Доказательство аналогично утверждению 1.4.1.f.

(g) Доказательство аналогично утверждению 1.4.2.a.

(h) Рассмотрим любую связную сумму трилистника и восьмерки. Из задач 2.1.1.c,d и 2.1.1.i следует, что инвариант Кэссона этого узла равен 0. С другой стороны, из задач 2.3.4.d,e и 2.3.6.b следует, что многочлен Конвея этого узла равен  $(t^2 + 1)(t^2 - 1) \neq 1$ . Следовательно, этот узел не изотопен тривиальному.

(i) Доказательство аналогично утверждению 1.5.4.d.

**2.1.2.** Доказательство аналогично теореме 1.4.3.

**2.2.1.** *Ответы:* b,e — раскрашиваемы, a,c,d,f,g,h,i,j — не раскрашиваемы. Пример раскрашенного в три цвета трилистника см. в прикрепленной копии [Pr95, стр. 35, Рис. 4.3]. Правильную раскраску последней диаграммы с рис. 7 см. на рис. 26 слева. (Эта диаграмма была ошибочно названа нераскрашиваемой в три цвета в [Pr95, §4]. Эта небольшая ошибка была найдена Л. Баннором, С. Зотовой и Л. Кравцовой.)

**2.2.2.** (a) См. прикрепленную копию [Pr95, стр. 34, Теорема 4.1]

(b) Следует из (a) и утверждений 2.2.1.d-j (см. также [Pr95, стр. 30]). Последняя диаграмма с рис. 7 отлична от тривиального зацепления числом правильных раскрасок плоской диаграммы. Докажите, что это число сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Плоская диаграмма называется *раскрашиваемой в 5 цветов*, если существует раскраска ее дуг в цвета 0, 1, 2, 3, 4 при которой

- хотя бы два цвета использованы;
- в каждой точке пересечения если верхняя дуга имеет цвет  $a$ , а две нижние дуги — цвета  $b$  и  $c$ , то  $2a \equiv b + c \pmod{5}$ .

Аналогично задаче 2.2.2.a можно показать, что раскрашиваемость в 5 цветов сохраняется при движениях Рейдемейстера. Для завершения доказательства достаточно заметить, что узел  $5_1$  является раскрашиваемым в 5 цветов (см. рис. 26 справа), а тривиальный узел — нет.

**2.3.1.** Это частные случаи теоремы 2.3.3 по модулю 2.

**2.3.2.** *Ответы:* (a, b) 0; (c) 1 (независимо от выбора ориентации).

*Замечание.* Инварианты  $arf$  и  $a_3$  для зацеплений могут зависеть от выбора ориентации компонент (для  $a_3$  это можно посмотреть в прикрепленной копии [CDM12, 2.3.4]).

**2.3.3.** Единственность доказывается аналогично теоремам 2.1.2 и 1.4.3; сначала решите задачу 2.3.4.

*Вывод (a) из (b).* Достаточно показать, что все инварианты  $c_n$ , определенные в (b), сохраняются при изменении порядка компонент.



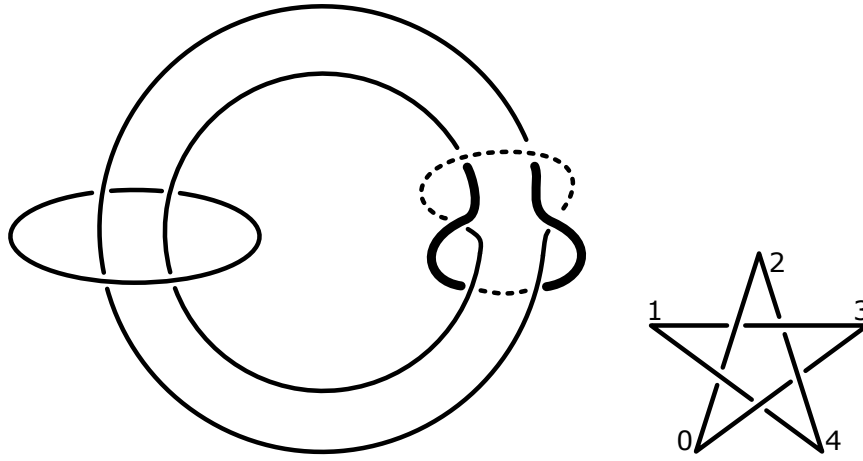


Рис. 26: Раскраска в 3 цвета зацепления и раскраска в 5 цветов узла  $5_1$

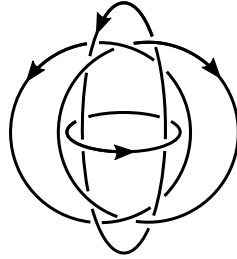


Рис. 27: Четырехкомпонентное зацепление Борромео

Пусть  $D$  — плоская диаграмма некоторого зацепления с двумя или более компонентами и пусть  $D'$  — плоская диаграмма, полученная из  $D$  изменением порядка компонент. Через  $\text{sg} D$  обозначим число перекрестков в  $D$ . Через  $u(D)$  обозначим минимально возможное число изменений перекрестков, необходимое для получения диаграммы зацепления, изотопного тривиальному, из  $D$  (такая последовательность изменений перекрестков существует по аналогу леммы 1.1.5 для зацеплений).

Докажем индукцией по  $\text{sg} D$ . Если  $\text{sg} D = 0$ , тогда  $D$  — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному, и по утверждению 2.3.4.b имеем  $C(D) = 0$  для любого порядка компонент. Предположим, что  $\text{sg} D > 0$ ; тогда продолжим доказательство индукцией по  $u(D)$ . Если  $u(D) = 0$ , то  $D$  — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что  $u(D) > 0$  и пусть  $D_*$  — зацепление, полученное из  $D$  изменением перекрестка таким, что  $u(D_*) < u(D)$ . Предположим, что  $D'_*$  — зацепление, полученное из  $D'$  изменением того же перекрестка; тогда

$$\pm(C(D) - C(D_*)) = C(D_0) \text{ and } \pm(C(D') - C(D'_*)) = C(D'_0),$$

где

- $D_0$  — диаграмма зацепления  $K_0$  (с некоторым порядком компонент) с рис. 9 и  $D$ ,  $D_*$  — это  $D_+$ ,  $D_-$  в некотором порядке;
- $D'_0$  — диаграмма зацепления  $K_0$  (с некоторым порядком компонент) с рис. 9 и  $D'$ ,  $D'_*$  — это  $D_+$ ,  $D_-$  в некотором порядке.

Заметьте, что диаграммы  $D_*$  и  $D'_*$  совпадают с точностью до порядка компонент. То же верно для диаграмм  $D_0$  и  $D'_0$ . Так как  $u(D_*) < u(D)$  и  $\text{sg} D_0 < \text{sg} D$ , из индуктивной гипотезы имеем  $C(D_*) = C(D'_*)$  and  $C(D_0) = C(D'_0)$ . Тогда,  $C(D) = C(D')$ .

**2.3.4. Ответы:** (a, b) 0; (c)  $\pm t$ ; (d)  $1 + t^2$ ; (e)  $1 - t^2$ ; (f)  $\pm t^3$ ; (g)  $\pm t^4$ ; (h)  $1 + 3t^2 + t^4$ .

*Замечание.* Знаки ответов к пунктам (с), (f), (g) зависят от выбора ориентации компонент.

*Указание.* Примеры вычислений для пунктов (а), (с) и (d) есть в прикрепленной копии [CDM12, 2.3.2].

**2.3.5.** Пусть  $D$  — плоская диаграмма данного зацепления  $K$ .

(а) Для любой диаграммы  $D_*$ , полученной из  $D$  изменением перекрестка, имеем  $c_0(D) - c_0(D_*) = 0$ . Т. е.  $c_0$  не меняется при изменениях перекрестков. По аналогу леммы 1.1.5 для зацеплений диаграмма  $D$  может быть получена изменениями перекрестков из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному  $\cdot$ . Утверждение следует из определения  $c_0$  на тривиальном узле и утверждения 2.3.4.b.

(b) Первая часть следует из (d). Вторая часть следует из определения  $c_2$  и теоремы 2.1.1.g.

(с) Первая часть следует из (d). Вторая часть следует из определений  $c_0, c_1$  и теоремы 1.6.3.

(d) Доказательство индукцией по  $\text{sg } D$ . Если  $\text{sg } D = 0$ , то  $K$  изотопно тривиальному зацеплению. Если  $K$  — узел, то  $C(D) = 1$ . Иначе,  $C(D) = 0$  по утверждению 2.3.4.b. Предположим, что  $\text{sg } D > 0$ ; тогда продолжим доказательство индукцией по  $u(D)$ . Если  $u(D) = 0$ , то  $K$  изотопно тривиальному зацеплению; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что  $u(D) > 0$  и пусть  $D_*$  — зацепление, полученное из  $D$  изменениями перекрестков, и такое, что  $u(D_*) < u(D)$ . Тогда имеем

$$\pm(c_j(D) - c_j(D_*)) = c_{j-1}(D_0),$$

где  $D_0$  — диаграмма с рис. 9, соответственно  $D, D_*$  — это  $D_+, D_-$  в некотором порядке. Заметьте, что зацепление  $D_*$  состоит из  $k$  компонент. Следовательно, если  $j \leq k - 2$ , то  $j - 1 \leq k'$  и если  $j - k$  чётно, то  $(j - 1) - k'$  чётно. Так как  $u(D_*) < u(D)$  и  $\text{sg } D_0 < \text{sg } D$ , по предположению индукции имеем  $c_j(D_*) = c_{j-1}(D_0) = 0$ . Тогда  $c_j(D) = 0$ .

(е) Докажем более общее утверждение: для плоской диаграммы  $D$  имеем  $\deg C(D) \leq \text{sg } D$ . Доказательство аналогично решению задачи 2.3.5.d.

**2.3.6.** (а) Доказательство аналогично решению задачи 2.3.5.d.

(b) См. прикрепленную копию [CDM12, 2.3.4].

(с) Доказательство пойдёт в духе решения задачи 2.3.5.d. Пусть  $D$  и  $G$  — плоские диаграммы  $K$  и  $L$ . Зафиксируем диаграмму  $G$  и докажем, что  $C(D \# G) = C(D)C(G)$  индукцией по  $\text{sg } D$ .

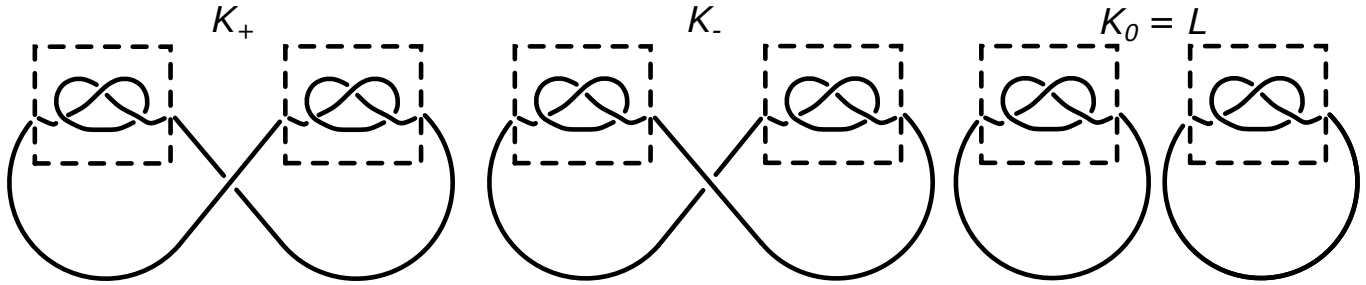


Рис. 28: Доказательство того, что  $C(\text{разделяемое зацепление}) = 0$

**2.3.7.** (b,c,d) Следует из вышеприведенных 2.3.4.c,f,g и нижеприведенного 2.3.7.e.

(е) Если  $L$  — разделяемое зацепление, то найдутся такие зацепления  $K_+, K_-, K_0$ , что

- их плоские диаграммы отличаются как на рис. 9;
- зацепления  $K_+$  и  $K_-$  изотопны;
- зацепление  $K_0$  изотопно  $L$ .

Имеем  $C(L) = C(K_0) = \frac{1}{t}(C(K_+) - C(K_-)) = 0$ .

## Список литературы

- [As] *A. Asanau*. A simple proof that connected sum of ordered oriented links is not well-defined, Math. Notes, 2018.
- [Be07] \* *M. Bestvina*. Knots: a handout for Summer Math Program. <http://www.math.utah.edu/~bestvina/HS07/knots-hs07.pdf>.
- [CDM12] \* *S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy*. Introduction to Vassiliev knot invariants, Cambridge Univ. Press, 2012. <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook>.
- [CG83] *J. H. Conway and C. M. A. Gordon*, Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 445–453.
- [Ka06] *L.H. Kauffman*. Formal Knot Theory, Dover Publications, 2006.
- [Ka06'] *L.H. Kauffman*. Remarks on Formal Knot Theory, arXiv:math/0605622 (note that the numbers and names of sections in table of contents i p. 1 are incorrect).
- [Ka87] *L.H. Kauffman*. On knots. Annals of Mathematics Studies. 115. Princeton University Press. 1987.
- [Pr95] \* *В. В. Прасолов*. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995. <http://prasolov.loegria.net/nagltop-3ed.pdf>
- [PS96] \* *В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский*. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
- [Sc] *M. Scharlemann*. Crossing changes, <http://web.math.ucsb.edu/~mgscharl/crossings.pdf>.
- [So89] \* *А. Сосинский*. Узлы, зацепления и их полиномы. Квант, 1989, N4. [http://kvant.mcsme.ru/1989/04/uzly\\_zacepleniya\\_i\\_ih\\_polinomy.htm](http://kvant.mcsme.ru/1989/04/uzly_zacepleniya_i_ih_polinomy.htm).
- [Sk15p] *A. Skopenkov*. Classification of knotted tori, Proc. A of the Royal Society of Edinburgh, to appear, arxiv: 1502.04470.
- [Sk16c] \* *A. Skopenkov*, Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification, [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings\\_in\\_Euclidean\\_space:\\_an\\_introduction\\_to\\_their\\_classification](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification), submitted to Boll. Man. Atl.
- [Sk16i] \* *A. Skopenkov*, Isotopy, submitted to Boll. Man. Atl. <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [Sk18] \* *A. Skopenkov*. Invariants of graph drawings in the plane, arXiv:1805.10237.
- [Sk14] \* *A. Skopenkov*. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, arxiv:1402.0658.
- [Sk] \* *А. Скопенков*. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mcsme.ru/circles/oim/algord.pdf>.

*Книги, обзоры и описательные работы в этом списке помечены звездочками.*