Мудрецы и шляпы

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась К., Латышев А., Ретинский В.

1 Знакомьтесь: игра в шляпы

Пусть дан неориентированный граф G, в каждой вершине которого находится один мудрец и один сундук со шляпами разного цвета. Мудрецы знакомы друг с другом, граф G, расположение мудрецов по вершинам графа и все цвета шляп в сундуках зафиксированы и известны всем. В частности, каждый мудрец понимает, в какой вершине находится каждый из его соседей. Судья проводит с мудрецами следующий тест. Он надевает каждому мудрецу шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит только шляпы мудрецов, находящихся в соседних вершинах графа, но не видит своей шляпы и не знает ее цвета. Мудрецы не общаются. По команде судьи мудрецы одновременно называют цвет. Считается, что мудрецы успешно прошли тест = «выиграли», если хотя бы один из них угадал.

Перед тестом мудрецам сообщили правила теста и дали возможность устроить совещание, на котором они должны определить публичную стратегию. Публичность означает, что все, включая судью, знают ее. Стратегия мудрецов должна быть детерминированной — каждый мудрец должен назвать цвет, исходя только из того, какие цвета он видит у соседей. Будем говорить, что стратегия выигрышная, если при любой раскладке шляп хотя бы один мудрец угадает цвет надетой на него шляпы. Также будем говорить, что мудрецы выигрывают, если они имеют выигрышную стратегию, и проигрывают, если не имеют.

Вот пара задач на этот сюжет.

1.1. Каждому из двух мудрецов надевают шляпу белого, синего или красного цвета, и сообщают, что цвета их шляп разные. Каждый из них видит шляпу другого, но не видит свою. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.

1.2. Султан устроил экзамен 11 придворным мудрецам. По правилу экзамена султан размещает 10 мудрецов в 10 ям, расположенных по кругу, и еще одного мудреца сажает на вышку в центре круга. На лбу у каждого из первых 10 мудрецов султан пишет число 1 или 2; на лбу у центрального мудреца султан пишет число от 1 до 1024. Мудрец на вышке видит числа на всех остальных мудрецах, а те видят его число (но не видят друг друга). Все мудрецы должны одновременно попытаться угадать свои числа. Султан заранее объяснил мудрецам правила экзамена и дал им время посовещаться до начала экзамена. Могут ли мудрецы действовать так, чтобы хотя бы один из них заведомо угадал свое число?

Мы будем отождествлять вершину графа G и мудреца, который в ней находится. Будем считать, что цвета пронумерованы числами 0, 1, 2, 3, …, и что в сундуке мудреца X лежат шляпы с цветами от 0 до некоторого числа $h(X)-1$, множество (цветов) шляп в сундуке мудреца X будем обозначать $\operatorname{Col} X$.

Игрой в шляпы назовем пару $\langle G, h\rangle$, где $G=\langle V,E\rangle$ — граф, $h\colon V\to\mathbb{N}$ — функция, сопоставляющая вершине количество (цветов) шляп, лежащих в сундуке в этой вершине. Функцию h мы будем называть «шляпностью». Вместо $h(A)$ мы будем иногда писать $\widehat{A}$. Если нам известно, что в игре $\langle G, h\rangle$ мудрецы выигрывают, будем говорить, что $\langle G, h\rangle$ *выигрышный граф*.

Выигрышный граф будем называть *простым*, если он не содержит выигрышного подграфа $\langle G', h'\rangle$, где $G'\subsetneqq G$, $h'=h\Big|_{V(G')}$.

1.3. Докажите, что на графе на рис. 1 мудрецы выигрывают.

1.4. Является ли выигрышный граф на рис. 1 простым?

1.5. Докажите, что на графе «путь $A_1A_2\dots A_n$», где $n\geqslant 2$, а шляпности указаны на рис. 2, мудрецы выигрывают.

1.6. Является ли выигрышный граф на рис. 2 простым?

1.7. Докажите, что на графе $K_{2,3}$ с указанными шляпностями (рис. 3) мудрецы выигрывают.

1.8. Могут ли мудрецы выиграть на графе $K_{1,3}$ с указанными шляпностями (рис. 4)?

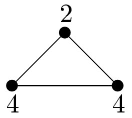


Рис. 1.

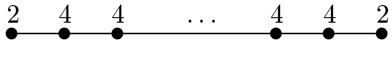


Рис. 2. Путь из n вершин

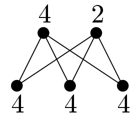


Рис. 3. Граф $K_{2,3}$

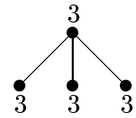


Рис. 4. Граф $K_{1,3}$

1.9. Докажите, что на цикле C_n, $n \geqslant 4$ с указанными шляпностями (рис. 5) мудрецы выигрывают.

1.10. На цикле C_n, $n \geqslant 4$ с указанными шляпностями (рис. 6) мудрецы выигрывают.

1.11. Существует ли простой выигрышный граф, на котором при любом раскладе шляп не менее двух мудрецов угадывают свой цвет?

1.12. Докажите, что на полном двудольном графе $K_{99,50}$ мудрецы проигрывают, если шляпность всех мудрецов равна 100.

1.13. Мудрецы расположены на графе «путь AB» (рис. 7, $n \geqslant 4$). Перед совещанием судья пообещал мудрецам, что A и B получат шляпы одинаковых цветов. Смогут ли мудрецы выиграть?

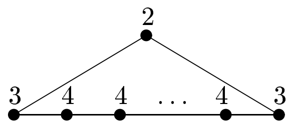


Рис. 5. Цикл из n вершин

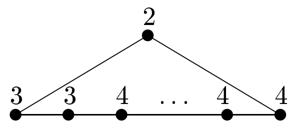


Рис. 6. Цикл из n вершин

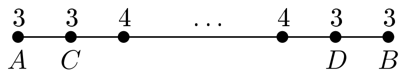


Рис. 7. Путь AB из n вершин

1.14. Пусть мудрецы играют на графе G с функцией шляпности h, но судья заранее пообещал им, что в тот момент, когда он наденет шляпу на мудреца A, он шепнет ему на ухо истинное утверждение вида «я тебе только что надел шляпу одного из двух цветов: c_1 или c_2». Таким образом, мудрецы во время совещания знают о том, что судья сделает подсказку, но не знают, какие именно цвета он назовет. Поэтому мудрецы определяют стратегии всех, кроме A, как обычно, а мудрец A получает набор из $C^2_{h(A)}$ стратегий — по одной на каждую возможную подсказку судьи.

Докажите, что эта подсказка не повлияет на исход игры.

2 Игры на кликах

2.1. Существует ли выигрышный граф, не содержащий в качестве подграфа 4-клики, на котором шляпности всех мудрецов равны 4?

2.2. Мудрецы находятся в вершинах полного графа K_n, у i-го мудреца в сундуке a_i шляп разных цветов. Докажите, что мудрецы выигрывают в том и только том случае, если

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1.$$

2.3. Назовем стратегию мудрецов *точной*, если на каждом раскладе шляп угадывает ровно один мудрец. Найдите все игры, в которых возможна точная стратегия.

2.4. Граф G — это полный граф на n вершинах, из которого удалили одно ребро. Шляпности всех мудрецов равны n. Могут ли мудрецы выиграть на таком графе?

2.5. Граф G — это полный граф на 4 вершинах A, B, C, D, из которого удалили ребро CD. При этом $h(A) = 6$, $h(B) = 6$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Могут ли мудрецы выиграть на таком графе?

2.6. Граф G — это полный граф на n вершинах A_1, A_2, $\ldots$, A_n, из которого удалили ребро $A_{n-1}A_n$. Шляпности вершин равны a_1, $\ldots$, a_n. Оказалось, что граф выигрышный и при этом

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n} = 1.$$

Докажите, что $a_1 a_2 \ldots a_{n-2}$ делится на $a_{n-1}a_n$.

2.7. Могут ли мудрецы выиграть на графе «Средний бантик» (рис. 8)?

2.8. Могут ли мудрецы выиграть на графе «Большой бантик» (рис. 9)?

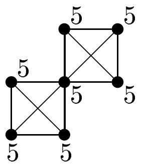


Рис. 8. Граф «Средний бантик»

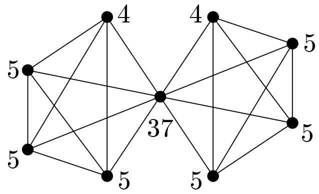


Рис. 9. Граф «Большой бантик»

3 Операции с графами

Пусть $\langle G_1, h_1\rangle, \langle G_2, h_2\rangle$ — две игры такие, что $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. Пусть $G = G_1 +_v G_2$ — объединение графов G_1 и G_2, в котором обе вершины v объединены в одну вершину. Пусть функция $h\colon V_1 \cup V_2 \to \mathbb{N}$ совпадает с h_i на $V_i \setminus \{v\}$ $(i = 1, 2)$ и $h(v) = h_1(v)h_2(v)$. Игру $\langle G, h\rangle$ будем обозначать $G_1 \times_v G_2$ (рис. 10).

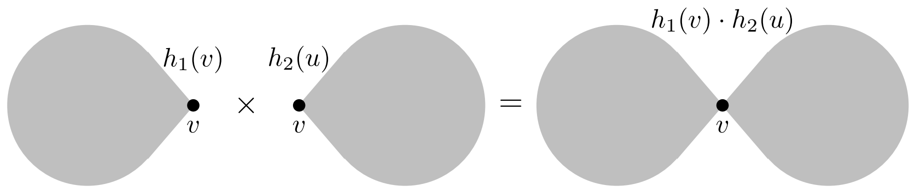


Рис. 10. Игра $G_1 \times_v G_2$

3.1. Теорема о произведении. Если мудрецы выигрывают на графах G_1 и G_2, то они выигрывают и на графе $G_1 \times_v G_2$.

Пусть G_1 и G_2 — два графа, не имеющие общих вершин. *Подстановкой графа G_2 в граф G_1 на место вершины v* назовем граф, получающийся объединением графов $G_1 \setminus v$ и G_2 с добавлением ребер, которые соединяют каждую вершину G_2 с каждым соседом v. Такую подстановку будем обозначать $G_1[v := G_2]$.

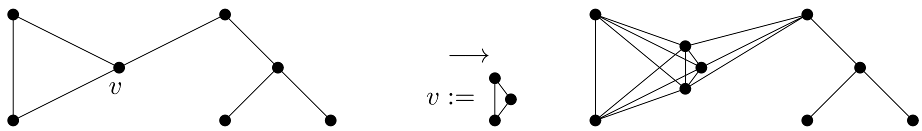


Рис. 11. Подстановка графа на место вершины

3.2. Теорема о подстановке. Пусть мудрецы выигрывают в игры $\langle G_1, h_1\rangle$ и $\langle G_2, h_2\rangle$. Пусть G — это граф подстановки $G_1[v := G_2]$, где $v \in G_1$ — произвольная вершина. Тогда игра $\langle G, h\rangle$ выигрышная, где

$$h(u) = \begin{cases} h_1(u) & u \in G_1, \\ h_2(u) \cdot h_1(v) & u \in G_2. \end{cases}$$

3.3. Пусть $\langle G, h\rangle$ — игра, в которой мудрецы выигрывают, BC — ребро графа G. Рассмотрим граф $G' = \langle V', E'\rangle$, получающийся добавлением к графу G новой вершины A: $V' = V \cup \{A\}$, $E' = E \cup \{AB, AC\}$. Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h'\rangle$ (см. рис. 12), где

$$h'(u) = \begin{cases} 2, & u = A, \\ 2h(B), & u = B, \\ 2h(C), & u = C, \\ h(u), & \text{для остальных вершин } u \in V. \end{cases}$$

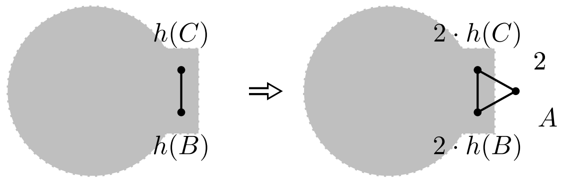


Рис. 12. Добавление вершины A шляпности 2 к ребру BC

3.4. Пусть $\langle G_1, h_1\rangle$, $\langle G_2, h_2\rangle$ — две игры, в которых мудрецы выигрывают. Пусть A_1, A_2, $\ldots$, $A_k \in V_1$; B_1, B_2, $\ldots$, $B_m \in V_2$. Рассмотрим граф $G' = \langle V', E'\rangle$, получающийся добавлением к графу $G_1 \cup G_2$ всех ребер A_iB_j: $V' = V_1 \cup V_2$, $E' = E_1 \cup E_2 \cup \{A_iB_j, i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m\}$ (рис. 13). Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h'\rangle$, где

$$h'(u) = \begin{cases} h_1(u), & u \in G_1 \setminus \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}, \\ h_2(u), & u \in G_2 \setminus \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}, \\ h_1(u) + 1, & u \in \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}, \\ h_2(u) + 1, & u \in \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}. \end{cases}$$

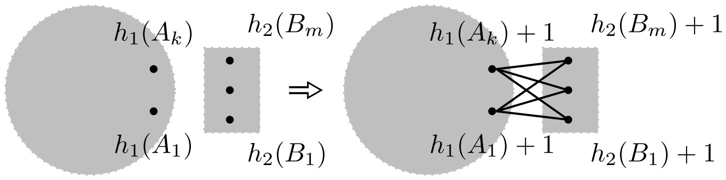


Рис. 13. Склейка двух графов, $k = 2$, $m = 3$

3.5. Пусть $\langle G, h\rangle$ — игра, в которой мудрецы выигрывают, Z, $C \in V$ — две вершины графа G. Рассмотрим граф $G' = \langle V', E'\rangle$, получающийся добавлением к графу G нового пути $ZABC$: $V' = V \cup \{A, B\}$, $E' = E \cup \{ZA, AB, BC\}$. Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h'\rangle$, где $h'(Z) = 2h(Z)$, $h'(C) = h(C) + 1$, $h'(A) = 2$ и $h'(B) = 3$, для остальных вершин h' совпадает с h (рис. 14).

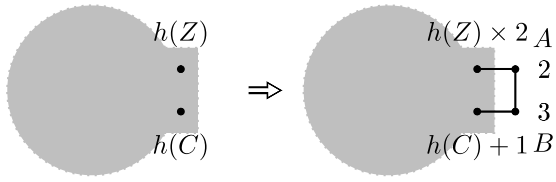


Рис. 14. Добавление двух вершин шляпностей 2 и 3 соединенных ребром

3.6. Пусть граф $\langle G, h'\rangle$ выигрышный, $V(G) = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Возьмем n выигрышных графов $\langle G_i, h_i\rangle$ и отметим в каждом из них одну вершину A_i. Построим на отмеченных вершинах граф G. В этом «суперграфе» зададим шляпность $h(A_i) = h'(A_i)h_i(A_i)$ (а у прочих вершин шляпность та же, что и в родных графах). Тогда мудрецы выигрывают.

3.7. Добавление к графу G висячей вершины A, где $\widehat{A} > 2$, не влияет на выигрышность.

3.8. a) Добавление к графу G с вершиной A шляпности 2 двух новых вершин B и C шляпности 5 и ребер AB, AC, BC не влияет на выигрышность.

b) Добавление к графу G с вершиной A шляпности 3 двух новых вершин B и C шляпности 7 и 5 и ребер AB, AC, BC не влияет на выигрышность.

3.9. Пусть G_1 и G_2 — графы с вершиной A, на которых мудрецы проигрывают в случае, когда $\widehat{A} = 2$. Тогда мудрецы проигрывают на графе $G = G_1 +_A G_2$, в котором $\widehat{A} = 2$.

3.10. Пусть $H = \langle G, h\rangle$ — проигрышная игра, B — любая вершина графа G. Рассмотрим граф $G' = \langle V', E'\rangle$, получающийся добавлением к графу G новой висячей вершины A: $V' = V \cup \{A\}$, $E' = E \cup \{AB\}$. Тогда мудрецы проигрывают в игре $\langle G', h'\rangle$, где $h(A) = 2$, $h'(B) = 2h(B) - 1$ и $h'(u) = h(u)$ для остальных вершин $u \in V$.

4 Шахматы вслепую

Игра «*Шах ладьей*». Два шахматиста $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ сидят напротив друг друга, на стене за спиной у каждого закреплена «его» шахматная доска так, что каждый шахматист не видит свою доску, но видит доску соперника. Судья выставляет на каждую из досок одного короля. После этого шахматисты независимо друг от друга должны назвать одну клетку на своей шахматной доске и судья ставит на эту клетку ладью. Если хотя бы один из королей оказался под боем ладьи (или ладья поставлена на ту же клетку, где стоит король), шахматисты выиграли, в противном случае они проиграли. Шахматные доски игроков могут быть произвольного и неодинакового размера. Как и в игре «Hats», шахматисты заранее вырабатывают публичную детерминированную стратегию. Судья знает эту стратегию и играет против шахматистов.

Пусть граф G — это цикл $ABCDA$, а шляпность задается функцией h. На самом деле граф G — это полный двудольный граф $K_{2,2}$, из-за чего мудрецы A и C видят одно и то же, и мудрецы B и D также видят одно и то же. Тогда мы назовем пару игроков A и C шахматистом $\mathcal{L}$ и будем считать, что его доска имеет размеры $h(A) \times h(C)$, а пару B и D — шахматистом $\mathcal{R}$ и будем считать, что его доска имеет размеры $h(B) \times h(D)$. Таким образом игра «Hats» на цикле $ABCDA$ с функцией шляпности h эквивалентна игре «Шах ладьей» на досках $L(h(A) \times h(C))$ и $R(h(B) \times h(D))$.

Крестом в клетчатом прямоугольнике будем называть объединение любого вертикального и любого горизонтального ряда клеток. Крест однозначно задается клеткой, находящейся на пересечении этих рядов, она называется *центром* креста. Ладья, стоящая в центре креста, держит под боем в точности все клетки креста.

В задаче 4.1 можно сдавать пункты по отдельности.

4.1. В игре «Шах ладьей» шахматисты выигрывают на следующих парах досок:
W1) одна из досок имеет размер $1 \times k$, k — любое натуральное число;
W2) $L(2 \times k)$ и $R(2 \times m)$, где k и m — любые натуральные числа;
W3) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 3)$; W4) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;
W5) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 3)$; W6) $L(2 \times 2)$, $R(k \times m)$, где $\min(k, m) \leqslant 4$.
На следующих парах досок шахматисты проигрывают:
L1) $L(2 \times 3)$, $R(4 \times 4)$; L2) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 5)$;
L3) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 4)$; L4) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;
L5) $L(2 \times 2)$, $R(5 \times 5)$; L6) $L(2 \times 5)$, $R(3 \times 3)$.

Для прочих размеров досок применима логика «мажоризации». Например, шахматисты проигрывают на досках $L(3 \times 4)$, $R(3 \times 4)$, потому что они проигрывают даже в более простом случае L3. Шахматисты выигрывают на досках $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 3)$, потому что они выигрывают даже, когда одна из досок крупнее, как в W3.

Шах ферзем. Рассмотрим вариант игры, в котором оба шахматиста выставляют на доску не ладью, а ферзя. Будем называть эту игру «Шах ферзем».

4.2. В игре «Шах ферзем» $L(4 \times 5)$, $R(4 \times 5)$ шахматисты выигрывают.

4.3. В игре «Шах ферзем» $L(4 \times 4)$, $R(5 \times 5)$ шахматисты выигрывают.

4.4. В игре «Шах ферзем» $L(7 \times 8)$, $R(7 \times 7)$ шахматисты проигрывают.

4.5. В игре «Шах ферзем» $L(3 \times 4)$, $R(7 \times 7)$ шахматисты проигрывают.

4.6. В игре «Шах ферзем» $L(4 \times 5)$, $R(5 \times 5)$ шахматисты проигрывают.

4.7. Рассмотрим вариант игры «Шах ферзем», в котором 5 шахматистов расположены так, что каждый из них видит доски всех остальных, но не видит свою собственную. Все доски имеют размер 11×11 Как и в исходной игре, судья ставит на каждую доску короля, а шахматисты независимо указывают, куда поставить ферзя. Смогут ли шахматисты выиграть?

5 Еще несколько задач

5.1. Пусть G — граф с вершинами B и C. Пусть функция шляпности такова, что $\widehat{B} = \widehat{C} = 2$ и при этом граф проигрышный. Добавим к графу новую вершину A, которая соединена только с B и C. Тогда мудрецы проигрывают на полученном графе, если $\widehat{A} = 2$, $\widehat{B} = 3$, $\widehat{C} = 7$, а шляпности остальных вершин не изменились.

5.2. Верно ли, что существует такое «большое» число k, что любой граф G, в котором степени всех вершин не превосходят 3, а шляпности всех вершин равны k, проигрышный?

5.3. Верно ли, что существует такое «большое» число d, что любой граф G, в котором степени всех вершин равны d, а шляпности всех вершин равны 4, выигрышный?

РЕШЕНИЯ

1.1. Они могут разместить цвета по циклу, например, белый→синий→красный→белый, и далее пусть каждый из них, увидев цвет шляпы приятеля, запишет цвет, следующий за ним по циклу.

1.2. Ответ: да.

Можно считать, что число на вышке записано в двоичной системе счисления, а мудрецам в ямах пишут на лбу числа 0 или 1. Пусть k-й мудрец в яме отыгрывает стратегию «мой бит не совпадает с k-м битом на вышке», а мудрец на вышке просто составляет число из битов в ямах.

1.3. Считаем, что цвета — это числа от 0 до 3. Пусть верхний мудрец называет четность суммы цветов шляп двух других мудрецов. А двое остальных называют цвет, исходя из гипотез «сумма цветов всех шляп дает остаток 1 по модулю 4» и «сумма цветов всех шляп дает остаток 3 по модулю 4».

1.4. Ответ: да.

Достаточно проверить, что при удалении одного ребра получается проигрышный граф, т. е. что граф «путь из двух звеньев» со шляпностями 2, 4, 4 или 4, 2, 4 проигрышный.

Применим вероятностные соображения: так, для случая 2, 4, 4, доли общего числа раскладов, на которых выигрывают мудрецы, равны соответственно 1/2, 1/4, 1/4, что в сумме составляет как раз 1. Но случаи, в которых угадывают мудрецы в крайних вершинах, независимы: на 1/8 доле всех раскладов угадывают оба крайних мудреца. Таким образом, суммарная доля всех раскладов, на которых угадывают мудрецы, равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} < 1$.

Аналогично разбирается другой случай.

1.5. То, что мудрецы выигрывают при $n = 2$, когда шляпы всего двух цветов, широко известно: первый мудрец отыгрывает гипотезу «у нас одинаковые шляпы», а второй — «у нас разные шляпы». Несколько раз применяя утверждение задачи 3.1, получаем отсюда утверждение для остальных n.

1.6. Ответ: да.

Достаточно проверить, что граф «путь P_k» со шляпностями 2, 4, . . . , 4 проигрышный. С помощью конструктора задачи 3.7 это утверждение легко сводится к проверке проигрышности игры двух человек со шляпностями 2 и 4.

Но можно затеять рассуждение по индукции. Пусть A — мудрец шляпности 2, B — его сосед. По стратегии мудрец A в зависимости от цвета B (четыре варианта) называет один из двух цветов, скажем, красный и синий. Пусть в двух или более случаях мудрец A называет синий цвет («плохие» расклады), а в остальных случаях — красный («хорошие» расклады). Пусть судья даст мудрецу A красную шляпу, и объявит, что мудрецу B будут выдаваться шляпы каких-то двух цветов, соответствующих плохому раскладу. Тогда мудрец A заведомо не угадает, а мудрец B может считать его шляпность равна 2. Игра свелась к более короткому пути того же вида.

1.7. Пусть в одной доле находятся две вершины X и Y, а в другой доле — вершины A, B, C, причем $\widehat{Y} = 2$, $\widehat{X} = \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 4$. Опишем выигрышную стратегию мудрецов. Каждый из четырех цветов можно истолковывать как двухбитное двоичное число, состоящее из *левого* и *правого* бита. Мудрец, собирающийся назвать цвет определенной четности, уже определился с правым битом и должен выбрать одно из двух значений левого бита. Цвет шляпы Y — один бит — мы также будем интерпретировать как четность.

Пусть мудрец Y назовет ту четность y, которая преобладает среди шляп A, B, C.

Каждый из мудрецов A, B, C видит шляпу Y. Поэтому они понимают, что если большинство шляп A, B, C имеют ту же четность, что и шляпа Y, то мудрец Y угадает цвет своей шляпы. Значит, им надо исходить из предположения, что большинство их шляп имеют четность $\overline{Y}$. Поэтому, называя свои ответы, каждый из них будет выбирать из двух возможных цветов, имеющих четность $\overline{Y}$.

С другой стороны, мудрец X так же, как и Y, видит, какая четность преобладает среди шляп A, B, C, и знает, чему равно y. Таким образом, мудрец X знает, что если на мудреце Y

надета шляпа цвета y, то тот угадал. Поэтому мудрец X должен исходить из предположения, что на мудреце Y надета шляпа цвета $\overline{y}$. Но тогда он знает, что в этом случае мудрецы A, B, C исходят из предположения, что большинство их шляп имеет четность y. Итак, мудрец X видит, какая четность доминирует среди цветов A, B, C, и знает, что мудрецы A, B, C исходят из предположения, что у них именно эта четность и доминирует. Пусть мудрец X выберет среди мудрецов A, B, C двоих со шляпами доминирующей четности, назовем этих мудрецов *главными.*

Теперь покажем, как «предположения» превратить в стратегию. Столбцы следующей таблицы соответствуют цветам шляпы X, а строки — мудрецам A, B, C. Пусть каждый из мудрецов A, B, C возьмет для своего ответа левый бит из своей строки таблицы (а правый бит определен «предположением»).

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	0	1	1	0

Мудрец X видит, угадал ли кто-то из главных мудрецов среди A, B, C цвет своей шляпы по указанной стратегии. Если оба главных мудреца не угадали, то это значит, что они оба указали неверный левый бит цвета своей шляпы.

Пусть, например, главные мудрецы — это A и B, пусть они указали соответственно биты 0 и 1 и не угадали. Мудрец A указывает бит 0, только если цвет шляпы X равен 0 или 1; мудрец B указывает бит 1, только если цвет шляпы X равен 1 или 3. Таким образом, оба события происходят только в случае, когда цвет шляпы X равен 1, именно этот цвет и должен назвать мудрец X.

Аналогичные действия мудрец X выполняет во всех остальных случаях. Его успех гарантируется следующим *Волшебным свойством* таблицы.

Если в таблице выбрать две произвольные строки и в каждой из них (независимо от другой) закрасить две клетки, содержащие одинаковые символы, то ровно один столбец содержит две закрашенные клетки.

Волшебное свойство проверяется (очевидным) перебором. Отметим, что для выигрышности стратегии хватило бы более слабого требования «не более чем один столбец таблицы содержит две закрашенные клетки».

1.8. Допустим, что у мудрецов есть выигрышная стратегия. Пусть v — вершина степени 3, u_1, u_2, u_3 — висячие вершины. Назначим вершине v первый цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета h_1, h_2, h_3.

Теперь проведем второй эксперимент: назначим вершине v второй цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета e_1, e_2, e_3.

Наконец, проведем финальный эксперимент. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через d_i цвет, который не был назван мудрецом u_i в первых двух экспериментах (если есть выбор — берем любой цвет из двух возможных). Для каждого i назначим висячей вершине u_i цвет d_i. Цвета шляп у соседей мудреца v уже заданы, значит, известен его ответ по стратегии. Назначим вершине v тот из цветов — первый или второй, который не совпадает с этим ответом. Мудрецы проиграли.

Это рассуждение работает, даже если $\widehat{v} = 2$.

1.9. Это утверждение получается применением конструктора из задачи 3.4, где в качестве G_2 берется граф, состоящий из одной вершины шляпности 1! Действительно, мудрецы выигрывают на пути, изображенном на рис. 2, а описанный в задаче граф получается добавлением к этому пути одновершинного графа G_2, при этом в месте склейки шляпности увеличиваются на 1.

1.10. Это утверждение получается применением конструктора из задачи 3.5. Действительно, мудрецы выигрывают на пути, изображенном на рис. 2, а описанный в задаче граф получается добавлением к этому пути нового ребра со шляпностями вершин 2 и 3 и подходящим изменением шляпностей вершин, к которым они прикрепляются.

1.11. Ответ: нет.

Пусть $\langle G, a\rangle$ — простой выигрышный граф, $A \in V(G)$.

Дадим мудрецу A шляпу цвета 0. Тогда для остальных мудрецов зафиксировалась стратегия на проигрышном графе $G \setminus A$. Значит, мудрецам на графе $G \setminus A$ можно раздать шляпы так, что никто из них не угадает. В полученном раскладе шляп на всем графе G угадать может только мудрец A.

1.12. Приведем стратегию судьи. Сначала рассмотрим на доле A, состоящей из 50 мудрецов, 51 расклад шляп, когда все мудрецы из A получают шляпы одного цвета, и этот цвет один из первых 51. На каждого из мудрецов второй доли B наденем ту шляпу, которую он не назовет по своей стратегии ни для одного из 51 раскладов. Зафиксируем построенный на доле B расклад и посмотрим, что по стратегии скажут для него мудрецы из A. Их 50, значит, какой-то цвет из первых 51 не назовет никто. Наденем шляпы этого цвета на всех мудрецов доли A. В результате никто из мудрецов не угадал.

Приведенное рассуждение работает для всех двудольных графов, у которых в минимальной доле не более $k-2$ вершин, где k — шляпность мудрецов. Если одна из долей содержит $k-1$ вершину, то мудрецы выигрывают в случае, когда размер второй доли очень велик.

1.13. Ответ: да, мудрецы выигрывают.

Пусть мудрец A играет по стратегии «Вижу 2 — говорю 2, иначе говорю 0», а мудрец B — по стратегии «Вижу 2 — говорю 2, иначе говорю 1», Мудрецы C и D, если видят на своем одиноком (A или B) соседе шляпу цвета 0 или 1, говорят 2. В противном случае они полагают, что у них не 2, и играют с остальными мудрецами в игру из задачи 1.5.

По этой стратегии мудрецы действительно выиграют. Потому что либо у мудрецов A и B шляпа цвета 0 или 1 и тогда кто-то из этих четырех выиграет сразу, либо у них шляпа цвета 2 и тогда у мудрецов C и D точно не 2 (иначе A или B угадали), и тогда C и D выигрывают на пути между ними.

1.14. Допустим, что мудрецы выигрывают с подсказкой. Зафиксируем для всех мудрецов, кроме A, стратегии, которые они используют при игре с подсказкой, и покажем, как можно задать стратегию мудреца A, чтобы с этим набором стратегий мудрецы выигрывали без подсказки.

Допустим, что при назначении мудрецу A шляпы цвета x нашелся расклад шляп на всем графе, в котором мудрец A получил цвет x, соседи мудреца A получили цвета $u, v, w, \ldots$, остальные мудрецы тоже получили какие-то цвета, и при этом никто из мудрецов (исключая A) не угадал. Тогда мы хотим, чтобы в этой ситуации мудрец A угадал свой цвет, т. е. его стратегия должна удовлетворять требованию $f_A(u, v, w, \ldots) = x$.

Эти требования, полученные для разных раскладов, не противоречат друг другу. Действительно, если бы существовал еще один расклад, где у соседей по-прежнему цвета $u, v, w, \ldots$, а мудрец A получил другой цвет y, то мудрецы не могли бы выиграть с подсказкой A^* , поскольку, имея эти два расклада, можно сообщить мудрецу A, что цвет его шляпы x или y, после чего реализовать тот из раскладов, для которого он не угадывает цвет своей шляпы.

Игра на клике

2.1. Ответ: да.

Например «бантик» (рис. 15). С помощью конструктора из задачи 3.4 можно строить подобные примеры для любого n.

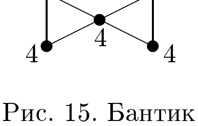


Рис. 15. Бантик

2.2. Так как i-й мудрец угадывает на $\frac{1}{a_i}$-й доле всех раскладов, то если сумма меньше 1, найдется расклад, где никто не угадает.

Докажем, что если сумма больше либо равна 1, мудрецы выигрывают. Мы предлагаем два решения.

Решение 1 (теорема Холла). Зафиксируем i (номер какого-то мудреца) и разобьем множество всех раскладов шляп на подмножества по a_i элементов. В каждом раскладе шляп удалим цвет c_i и для оставшегося набора $c = (c_1, \ldots, c_{i-1}, \widehat{c_i}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ (шляпка означает, что цвет пропущен) положим

$$A_c^i = \{(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_n) : x \in \mathrm{Col}(A_i)\}.$$

Имея в виду применение теоремы Холла о паросочетаниях, назовем множества A_c^i «девушками», а сами расклады шляп — «юношами». Будем говорить, что юноша и девушка знакомы, если расклад шляп является элементом множества A_c^i. Каждый юноша знаком с n девушками, при этом для каждого i каждый юноша знаком ровно с одной девушкой вида A_c^i. Каждая девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами.

Докажем, что существует паросочетание, сопоставляющее каждому юноше девушку. Для этого достаточно проверить условие теоремы, утверждающее, что каждые m юношей знакомы вместе с не менее чем m девушками. Рассмотрим произвольный набор из m юношей. Так как при каждом i девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами, m юношей для каждого i знакомы в сумме не менее чем с m/a_i девушками вида A_c^i. Суммируя по i, получаем, что общее число знакомых девушек не меньше $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \ldots + \frac{m}{a_n} \geqslant m$. Условие теоремы Холла выполнено.

Итак, существует паросочетание, которое каждому раскладу шляп ставит в соответствие множество вида A_c^i. Отметим, что при выполнении равенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$ это паросочетание фактически отмечает один элемент в каждом множестве A_c^i. Если же выполняется неравенство $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} > 1$, то «останутся одинокие девушки», т. е. в некоторых множествах A_c^i может не оказаться ни одного отмеченного элемента.

Построенное паросочетание позволяет задать стратегию мудрецов. Пусть j-й мудрец действует по правилу: увидев шляпы других мудрецов, т. е. набор цветов $c = (c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)$, он однозначно восстанавливает множество A_c^j, которое фактически состоит из всевозможных способов дополнить набор c до расклада шляп. При этом текущий расклад шляп является одним из элементов этого множества. Мудрец должен назвать тот цвет, который в множестве A_c^j отмечен нашим паросочетанием (а если отмеченного элемента нет, называет цвет произвольно).

Поскольку каждый расклад шляп отображается нашим паросочетанием как отмеченный элемент одного из множеств A_c^i, для этого расклада шляп i-й мудрец угадает цвет.

Решение 2 (явная стратегия). Пусть $N = \text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для k от 1 до n положим $d_k = N/a_k$. Будем отождествлять множество возможных цветов шляпы k-го мудреца с множеством остатков d_k, $2d_k$, …, $a_k d_k$ по модулю N.

Пусть мудрецам даны шляпы: k-й мудрец получает шляпу цвета $x_k d_k$, где $x_k \in \{1, 2, \ldots, a_k\}$. Положим $S = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_k d_k \pmod N$. Каждый мудрец, видя окружающих, может написать все слагаемые этой суммы кроме своего собственного. Делая предположение о цвете своей шляпы, он получает предполагаемое значение всей суммы. Пусть первый мудрец проверяет гипотезу $S \in \{1, 2, \ldots, d_1\}$; второй мудрец проверяет гипотезу $S \in \{d_1+1, d_1+2, \ldots, d_1+d_2\}$ и т. д., n-й мудрец проверяет гипотезу $S \in \{d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + 1, \ldots, d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + d_n\}$. Гипотеза k-го мудреца затрагивает d_k последовательных остатков, среди которых ровно один делится на d_k. Именно этот остаток и определяет цвет шляпы, который должен назвать k-й мудрец.

2.3. Ответ: точные стратегии существуют только на кликах и только в том случае, когда выполняется равенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1. \qquad (1)$$

Пусть в графе имеются две несмежные вершины A и B. Тогда выдадим произвольный расклад шляп всем мудрецам, кроме A и B. Теперь ответы мудрецов A и B определены по стратегии. Выдадим им такие шляпы, чтобы они угадали. На построенном раскладе шляп A, B и, возможно, кто-то еще угадают. Следовательно, стратегия не является точной. То, что в случае клики существование точной стратегии эквивалентно равенству (1), следует из доказательства задачи 2.2.

2.4. Ответ: нет, мудрецы проигрывают.

Пару мудрецов A, B можно интерпретировать как шахматиста с доской $n \times n$. Нетрудно видеть, что доля общего числа раскладов, на которых он выигрывает, равна $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$. Что касается остальных мудрецов, каждый выигрывает на $\frac{1}{n}$-й части всех раскладов. Таким образом, суммарная доля раскладов, на которых кто-то выигрывает, меньше 1.

2.5. Ответ: да, мудрецы выигрывают.

Будем интерпретировать цвета шляп A и B как вычеты по модулю 6, цвет C — как вычет по модулю 2, цвет D — как вычет по модулю 3. Обозначим цвета шляп мудрецов A и B через a и b. Пусть C называет цвет $c = (a + b) \bmod 2$, D — цвет $d = (a + b) \bmod 3$. Если мудрецы C и D не угадали, выполняются равенство $a+b = c+1 \bmod 2$ и ($a+b = d+1 \bmod 3$ или $a+b = d+2 \bmod 3$). Тогда пусть A вычисляет свой цвет в предположениях $a + b = c + 1 \bmod 2$ и $a + b = d + 1 \bmod 3$; а B — в предположениях $a + b = c + 1 \bmod 2$ и $a + b = d + 2 \bmod 3$.

Предлагаем читателю в качестве упражнения получить этот же результат, используя конструктор задачи 3.3.

2.6. Пусть X — множество раскладов шляп для первых $n - 2$ мудрецов, т. е., иначе говоря, это множество наборов из $n - 2$ цветов, где первый цвет — это возможный цвет шляпы мудреца A_1, второй цвет — мудреца A_2 и т. д., $(n - 2)$-й цвет — мудреца A_{n-2}. Пусть $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_{n-2}$, тогда $|X| = \alpha$. Обозначим через L_i $(i = 1, 2, \ldots, a_{n-1})$ — подмножества X, такие что если мудрец A_{n-1} видит комбинацию из L_i, то он называет цвет i. Аналогично определим множества R_j $(j = 1, 2, \ldots, a_n)$ для мудреца A_n. Пусть L_k — множество L_i минимальной мощности, $|L_k| = M \leqslant \frac{\alpha}{a_{n-1}}$. Теперь рассмотрим множества $R_j \setminus L_k$ $(j = 1, 2, \ldots, a_n)$. В них суммарно $\alpha - M$ элементов, поэтому если $R_m \setminus L_k$ — минимальное по мощности, то $|R_m \setminus L_k| \leqslant \frac{\alpha - M}{a_n}$. Следовательно,

$$|L_k \cup R_m| \leqslant M + \frac{\alpha - M}{a_n} = \frac{\alpha}{a_n} + M\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \frac{\alpha}{a_n} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = \tag{1}$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n}\right) = \alpha\left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{a_1} - \ldots - \frac{\alpha}{a_{n-2}}.$$

Таким образом, когда на мудреце A_{n-1} надета шляпа цвета k, а на мудреце A_n — цвета m, выигрывать должен кто-то из мудрецов A_1, A_2, $\ldots A_{n-2}$, и число раскладов, для которых происходит это событие, составляет долю $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}}$ от общего числа раскладов. Но как мы знаем, указанная доля ограничивает сверху число раскладов, на которых могут выиграть мудрецы A_1, A_2, $\ldots A_{n-2}$. Следовательно, оба неравенства (1) должны обращаться в равенство. Тогда $|L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ (и вообще $|L_i| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ для всех i) и $|R_m \setminus L_k| = \frac{\alpha}{a_n} - \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$.

Аналогично $|R_j| = \frac{\alpha}{a_n}$, значит, $|R_m \cap L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$, и α делится на $a_{n-1}a_n$.

2.7. Ответ: да, мудрецы выигрывают.

Пусть G_1 и G_2 — 4-клики, из которых склеен бантик, A — общая вершина клик, цвета мудрецов — остатки по модулю 5.

Мудрецы $G_1 \setminus A$ подсчитывают сумму остатков-цветов на G_1 и разыгрывают гипотезы для трех последовательных значений остатка этой суммы, скажем, для 2, 3 и 4. Аналогично поступают мудрецы на $G_2 \setminus A$.

Что же делать мудрецу A? Он должен ухитриться отыграть сразу две гипотезы на G_1 и две гипотезы на G_2. Спасает его только то, что обе гипотезы — об одной и той же его несчастной шляпе! Чтобы стратегия сработала, надо по разному конвертировать цвета A в остатки по модулю 5, например, так:

Цвет	Красный	Синий	Белый	Желтый	Черный
Его код в G_1	0	1	2	3	4
Его код в G_2	0	2	4	1	3

Указанная кодировка обладает тем свойством, что любая пара, состоящая из последовательных остатков в строке G_1, пересекается с любой парой последовательных остатков в строке G_2 не более чем по одному элементу. Мудрец A вычисляет два последовательных остатка, соответствующих гипотезам «сумма всех остатков на G_1 равна 0 или 1» и «сумма всех остатков на G_2 равна 0 или 1», и называет цвет пересечения этих пар, если он есть.

2.8. Ответ: да, мудрецы и здесь выигрывают.

Рассмотрим вычеты по модулю $740 = 4 \cdot 5 \cdot 37$. Пусть цвета шляп мудреца шляпности k — вычеты, делящиеся на $\frac{740}{k}$. Тогда рассмотрим S_1 и S_2 — суммы вычетов-цветов в левой и правой 5-кликах. Пусть левый мудрец шляпности 4 предполагает, что S_1 лежит в множестве $\{1, 2, \ldots, 185\}$. Он получает 185 подряд идущих вычетов, среди которых ровно один делится на 185. Цвет, соответствующий этому вычету, мудрец и называет. Аналогично три левых мудреца шляпности 5 предполагают, что S_1 лежит в множествах $\{186, \ldots 333\}$, $\{334, \ldots 481\}$, $\{482, \ldots 629\}$ соответственно. Так же, но только работая с S_2, поступают правые мудрецы. Если еще никто не выиграл, то A (мудрец со шляпностью 37) понимает, что S_1 лежит в $\{630, \ldots 720\}$, так что ему нужно выбирать из не более чем 6 подряд идущих цветов. То же можно сказать про S_2. Чтобы все сработало, давайте мудрецы левой и правой клики будут по-разному переводить цвета мудреца A в вычеты. По нашему правилу цвета шляп мудреца A — это вычеты по модулю 740, делящиеся на 20, т.е. фактически это вычеты по модулю 37. Если мудрецы левой клики сопоставляют некоторому цвету вычет x, то пусть мудрецы правой клики сопоставляют этому же цвету вычет $6x \pmod{37}$ (отображение $x \mapsto 6x$ взаимно однозначно на множестве остатков при делении на 37). Как нетрудно проверить, любые два множества вида $\{x, x+1, \ldots, x+5\}$ и $\{6y, 6y+6, \ldots, 6y+30\}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Значит, A назовет цвет из пересечения этих множеств, либо назовет произвольный цвет, если пересечение пусто.

Конструкторы

3.1. Цвет шляпы мудреца v в графе $G_1 \times_v G_2$ можно интерпретировать как пару цветов (c_1, c_2), где c_i — цвет шляпы v в графе G_i. Пусть зафиксированы выигрышные стратегии для графов G_1 и G_2. Построим стратегию на $G_1 \times_v G_2$: пусть все мудрецы, кроме v, играют по выигрышной стратегии для соответствующего графа. Что касается мудреца v, он будет играть сразу по обеим стратегиям: пусть он независимо даст два ответа c_1 и c_2 — ответ c_i соответствует его выигрышной стратегии для графа G_i (для вычисления этого ответа мудрец v смотрит только на своих соседей из графа G_i). Пара (c_1, c_2) — это корректный цвет шляпы мудреца v на графе $G_1 \times_v G_2$, это и есть ответ мудреца v в конструируемой стратегии.

Построенная стратегия выигрышная, потому что либо кто-то из G_1 или из G_2 угадает цвет, либо v угадает обе компоненты своего цвета.

3.2. Пусть f_1 и f_2 — выигрышные стратегии игр на графах G_1 и G_2 соответственно.

Также пусть каждый мудрец u из подграфа G_2 графа G получает композитный цвет (c_1, c_2), где $0 \leqslant c_1 \leqslant h_1(v)-1$, $0 \leqslant c_2 \leqslant h_2(u)-1$. Тогда все «левые половины» этих мудрецов отыгрывают стратегию $f_1(v)$, а «правые половины» этих мудрецов отыгрывают стратегию f_2. В частности это означает, что все мудрецы из подграфа G_2 будут называть цвета, у которых первая компонента одна и та же.

Что касается остальных мудрецов из G, те из них, кто не является соседом v, играют по стратегии f_1. Мудрецы из G_1, являющиеся соседями мудреца v, после подстановки обнаружили, что вместо одного соседа v у них теперь имеется $|V_2|$ соседей (причем, вообще говоря, с разными шляпами). Эти мудрецы поступают следующим образом: все они вместо одной шляпы v видят все шляпы на подграфе G_2 и знают стратегии мудрецов на этом подграфе. Значит, они понимают, кто выигрывает в игре на подграфе G_2, обозначим этого игрока v_{new} (если победителей несколько, они выбирают в качестве v_{new} одного из победителей, например, того, кто идет первым в заранее составленном списке). В результате, каждый (бывший) сосед v смотрит только на v_{new}, точнее, на первую компоненту его цвета, и тоже играет по стратегии f_1.

В результате либо угадает кто-то из подграфа $G_1 \setminus \{v\}$, либо v_{new} угадает левую компоненту своего цвета, а правую компоненту он угадывает по своему определению. Таким образом, всегда кто-нибудь угадает свой цвет.

3.3. Цвета шляп игроков B и C можно интерпретировать как пары вида (c, ϵ), где c — возможный цвет шляпы в игре $\langle G, h\rangle$, $\epsilon \in \{0, 1\}$. Пусть мудрец A отыгрывает гипотезу $c(A) = \epsilon_B + \epsilon_C \pmod 2$. Мудрецы B и C видят своих соседей в графе G и знают, какие цвета $c(B)$, $c(C)$ они должны назвать по выигрышной стратегии в игре $\langle G, h\rangle$. Видя шляпу мудреца A, а также шляпы друг друга, мудрецы B и C могут вычислить, какие значения ϵ_B и ϵ_C им следует взять в дополнение к $c(B)$, $c(C)$.

3.4. По сравнению с исходными графами у мудрецов A_i и B_j добавился один новый цвет, будем считать, что этот цвет — красный. Пусть «мегамудрец» A говорит, что у него все шляпы красные, если видит хоть одну красную шляпу у мудреца B, в противном случае пусть A играет по обычной стратегии в графе G_1. Если «мегамудрец» B видит хоть одну красную шляпу у A, то он понимает, что A выиграл, если у B есть хоть одна красная шляпа. Тогда B должен позаботиться о тех раскладах, где у него нет ни одной красной шляпы, и просто отыгрывать свою стратегию на графе G_2. Если же «мегамудрец» B не видит ни одной красной шляпы у A, то он понимает, что A выиграл, только если у B тоже нет красных шляп, тогда, чтобы проконтролировать оставшиеся расклады, B говорит, что у него все шляпы красные.

3.5. Мы укажем стратегию для новых вершин и частично для старых, затем разберем несколько раскладов, на которых они выиграют «сразу», а затем скажем, что на остальных они выиграют при помощи стратегии для графа G.

Опишем выигрышную стратегию. Будем обозначать c_x цвет шляпы, которую получил мудрец x. Цвет вершины Z будем считать «композитным»: $c_Z = (\epsilon, C)$, где первый «бит» ϵ может принимать значения 0 и 1, а второй цвет C — те $h(Z)$ цветов, которые были изначально в графе G.

- Мудрец A, в случае если видит на мудреце B шляпу цвета 0 или 1, говорит то, что видит на нем, иначе говорит первый бит цвета c_Z.
- Мудрец B, в случае если видит на мудреце C шляпу нового цвета, говорит «2», а иначе он говорит значение разности $1 - c_A$.

Разберем все варианты пар (c_A, C_B) и опишем остальную часть стратегии, заодно доказав, что она выигрышная. В случаях $(0, 0)$ и $(1, 1)$ мудрец A сразу угадывает. В случаях $(0, 1)$ и $(1, 0)$, если не дать мудрецу C шляпу нового цвета, то угадает мудрец B. Поэтому мудрец C, видя на мудреце B шляпу цвета отличного от 2, может смело называть шляпу нового цвета и кто-то из A, B, C угадает. Остались варианты $(0, 2)$ и $(1, 2)$. В них мудрец A угадает, если его цвет совпадет с первым битом c_Z, поэтому Z может считать, что у него первый бит отличается от цвета c_A, то есть ему нужно угадывать только второй «бит», то есть $h(Z)$ возможных значений. В то же время мудрец B в этих двух случаях угадает только в случае, когда у мудреца C новый цвет. То есть C, видя на мудреце B шляпу цвета 2, может считать, что нового цвета у него нет. Таким образом, нужно выиграть в игру $\langle G, h\rangle$, что мы умеем делать по условию.

3.6. Утверждение непосредственно следует из теоремы о произведении (задача 3.1).

3.7. Пусть A — новая висячая вершина, B — соседняя с ней вершина графа G, обозначим граф с добавленной вершиной через G_1.

В одну сторону утверждение очевидно. Если игра на G выигрышная, то игра на G_1 тоже выигрышная. Докажем теперь, что если игра на G_1 выигрышная, то и на G_1 тоже выигрышная.

Пусть мудрецы выбрали выигрышную стратегию на G_1. Напомним, что в задаче 1.14 доказано, что если во время теста судья дает одному из мудрецов, скажем B, подсказку вида «у тебя шляпа одного из двух цветов c_1 или c_2», то эта подсказка не повлияет на исход игры. Назовем эту подсказку B^*.

Докажем, что если мудрецы выигрывают в игру на G_1, то они смогут выиграть на графе G с подсказкой B^*. Пусть фиксирована выигрышная стратегия f на графе G_1. Построим выигрышную стратегию на G с подсказкой B^*. Пусть все мудрецы из $V(G) \setminus B$ пользуются стратегией f. Для каждой пары цветов (b_1, b_2), $b_1 \neq b_2$, которые можно выдать мудрецу B, найдем такой цвет $a \in \operatorname{Col} A$, что $f_A(b_1) \neq a$, $f_A(b_2) \neq a$, такой цвет найдется, поскольку $\widehat{A} \geqslant 3$.

Теперь зададим стратегию мудреца B на графе G с учетом подсказки, а именно, пусть в случае, когда B видит у соседей на графе G комплект цветов c и получает подсказку «твоя шляпа цвета b_1 или b_2», он выдает ответ $f_B(a, c)$, т. е. отвечает по стратегии f, как если бы он видел на G_1 цвет a у мудреца A и комплект цветов c у остальных соседей. При этом может оказаться, что цвет, который назовет B, не совпадет ни с b_1, ни с b_2.

Эта стратегия выигрышная, потому что когда в игре на G_1 мы даем во время теста мудрецу A шляпу цвета a и следим, чтобы он не угадал (не выдавая B какие-то шляпы) то для мудреца B остаются возможными помимо прочего цвета b_1 и b_2, и на графе G_1 кто-то угадывает. Значит, с подсказкой B^* угадывают.

3.8. Докажем более общий факт, из которого следуют сразу оба утверждения.

Добавление к графу G с вершиной A двух новых вершин B и C и ребер AB, BC, CA не влияет на выигрышность, если шляпности новых вершин удовлетворяют условию $2(\widehat{B} + \widehat{C}) < \widehat{B} \cdot \widehat{C}$ (шляпности вершин графа G не изменились).

Пусть G' — полученный граф. Если мудрецы выигрывают на графе G, то они выигрывают и на G'. Проверим, что из выигрышности G' следует выигрышность G.

Пусть f' — выигрышная стратегия на G'. Построим f — выигрышную стратегию на G. Для мудрецов из $G \setminus A$ стратегия остается прежней. Зададим стратегию мудреца A. Пусть дан расклад шляп на графе G. Мудрец A видит цвета всех своих соседей в графе G и рассматривает $\widehat{B} \cdot \widehat{C}$ способов выбрать цвета для B и C. Далее мудрец A смотрит, что он должен отвечать на все эти варианты согласно стратегии f', и называет цвет, встречающийся в его ответах чаще всего (точнее, не реже всего).

Покажем, что полученная стратегия выигрывает на графе G. Зафиксируем расположение шляп на графе G и предположим, что ни один мудрец из $G \setminus A$ не угадал. Если на мудрецов B и C надеть шляпы произвольным образом, то мы получим расстановку шляп на G', в которой все мудрецы из $G \setminus A$ не угадают свой цвет по стратегии f'. Значит, его угадает A, B или C. Но из имеющихся $\widehat{B}\cdot\widehat{C}$ случаев расстановки шляп на B и C мудрец B угадает в $\widehat{C}$ случаях, а мудрец C — в $\widehat{B}$ случаях. Значит, A должен угадать свой цвет не менее чем в $\widehat{B}\cdot\widehat{C} - (\widehat{B}+\widehat{C}) > \frac{\widehat{B}\cdot\widehat{C}}{2}$ случаях. Таким образом, мудрец A угадывает свой цвет в большинстве вариантов, и как раз этот цвет он угадает по стратегии f.

3.9. Обозначим через N_i множество соседей мудреца A в графе G_i, а через S множество всевозможных раскладов шляп у мудрецов из N_2. Если x — один из двух возможных цветов шляпы мудреца A, то второй цвет мы будем обозначать $\overline{x}$.

Зафиксируем для мудрецов на графе G произвольную стратегию f и опишем стратегию чертика, по которой он сможет обыграть мудрецов.

Выберем произвольный расклад шляп $s \in S$ у соседей A в подграфе G_2. Этот расклад однозначно задает стратегию f^s мудрецов в подграфе G_1, которая, как мы знаем, проигрышная на этом подграфе. Выберем произвольный опровергающий расклад шляп φ_s на графе G_1 для стратегии f^s. Тогда мудрец A получает шляпу $\varphi_s(A)$ и не угадывает, это значит, что выбранный расклад шляп φ_s определяет такой расклад шляп $t = \varphi_s\big|_{N_1}$ мудрецам из N_1, что $f_A(t,s) = f^s_A(t) = \overline{\varphi_s(A)}$.

Пусть чертик строит опровергающие расклады шляп на всем графе G, применяя следующий принцип: если в конструируемом опровергающем раскладе шляп предполагается дать мудрецам из N_2 расклад шляп s, то при этом всем мудрецам в подграфе G_1 будет выдан расклад φ_s. При соблюдении этого принципа, во-первых, мудрец A и все остальные мудрецы на подграфе G_1 заведомо не угадают цвет своей шляпы, а во-вторых, стратегия мудреца A теперь полностью определяется лишь раскладами шляп из S (потому что на компоненте G_1 мы сразу же задаем расклад h_s и никаких других вариантов не рассматриваем).

Итак, чертик видит, что мудрецы из $V(G_2) \setminus A$ применяют стратегию f, а мудрец A фактически пользуется стратегией «вижу у соседей из N_2 расклад s — называю цвет $\overline{\varphi_s(A)}$». Поскольку граф G_2 проигрышный, для этой стратегии существует опровергающий расклад шляп ψ на подграфе G_2. Этот расклад шляп позволяет чертику корректно задать опровергающий расклад шляп на всем графе G. Действительно расклад шляп ψ определяет набор $s = \psi\big|_{N_2}$ цветов шляп у соседей A в подграфе G_2, а набор s задает опровергающий расклад шляп φ_s на подграфе G_1, при этом расклады ψ и φ_s совместимы: оба расклада назначают мудрецу A цвет $\varphi_s(A)$, тогда как стратегия f требует назвать цвет $\overline{\varphi_s(A)}$.

3.10. Пусть мудрецы зафиксировали стратегию f на графе G'. Построим проигрышный расклад для этой стратегии. Для этого посмотрим на стратегию мудреца A. Он какой-то из двух цветов говорит реже, а именно не более, чем $h(B)-1$ раз. Выдадим ему шляпу этого цвета. Теперь, чтобы он не угадал, мы обязаны давать B шляпу одного из оставшихся $h(B)$ цветов (если их осталось больше, оставим ровно $h(B)$). Ну и отлично, мы как раз умеем выдавать расклад на оставшемся графе, где у B только $h(B)$ цветов. Это и будет опровергающий расклад на всем графе.

Шахматы вслепую

4.1.

W1) Тривиально. На языке шляп это игра, где какому-то из мудрецов всегда дают шляпу одного и того же цвета, конечно, он его угадает, даже не глядя на других.

W2) На языке шляп в соответствующем 4-цикле шляпность двух соседних мудрецов равна двум, эти два мудреца и обеспечат выигрыш, не глядя на остальных.

W3) Это утверждение — пересказ на язык игры «Шах ладьей» утверждения о том, что мудрецы выигрывают на 4-цикле, если всем дают шляпы трех цветов. Например, стратегия мудрецов, описанная в [1], на шахматном языке выглядит следующим образом. Если шахматист видит, что король напарника стоит в центре, он ставит ладью в центр. В противном случае он ставит ладью на ту клетку, куда показывает стрелка, ведущая от короля (на вспомогательной диаграмме для этого шахматиста), см. рис. 16. Координаты клеток на рисунке соответствуют номерам цветов шляп из [1]. Так, шахматист $\mathcal{L}$, увидев, что король напарника стоит на клетке $(2, 2)$, ставит свою ладью на клетку $(1, 0)$ (этот случай соответствует более жирной стрелке на левом рис. 16).

Стратегия $\mathcal{L}$ Стратегия $\mathcal{R}$

Рис. 16.

W4) Пронумеруем клетки доски $L(2 \times 3)$ слева направо сверху вниз, рис. 17*a*. Пусть стратегия шахматиста $\mathcal{R}$ задается таблицей на рис. 17*b*. Здесь в клетках доски $R(3 \times 4)$ поставлено 6 меток. Метка r_i означает, что шахматист $\mathcal{R}$, увидев, что король напарника стоит на i-й клетке доски $L(2 \times 3)$, поставит ладью на клетку доски $R(3 \times 4)$ с меткой r_i.

Стратегию шахматиста $\mathcal{L}$ тоже зададим с помощью доски 3×4, см. рис. 17*c*. Здесь в каждой клетке доски $R(3 \times 4)$ поставлено число от 1 до 6 — номер какой-то клетки доски $L(2 \times 3)$. Когда шахматист $\mathcal{L}$ видит, что король стоит на доске $R(3 \times 4)$ в клетке с меткой k, он поставит ладью на клетку номер k доски $L(2 \times 3)$. Чтобы избежать недоразумений в обозначениях, для шахматиста $\mathcal{R}$ мы используем метки вида «буква r с индексом», а для шахматиста $\mathcal{L}$ — метки вида «число».

1	2	3
4	5	6

a) Разметка доски L

r_4	r_5		
r_6			r_3
		r_2	r_1

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{R}$

1	3	3	5
2	1	4	5
2	6	6	4

c) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

Рис. 17. Выигрышная стратегия для игры $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$

Опишем, каким образом задаются выигрышные стратегии с помощью введенных обозначений.

Утверждение. Стратегия шахматистов выигрышная в том и только том случае, когда для любых трех различных клеток a, b, c доски $L(2 \times 3)$, таких что клетки b и c не лежат в кресте клетки a, выполняется следующее свойство на доске R: *все клетки доски* $R(3 \times 4)$*, помеченные числом* a*, лежат в пересечении крестов* r_b *и* r_c.

Например, при $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$ клетки с меткой 1 на доске $R(3 \times 4)$ лежат в пересечении крестов r_5 и r_6. (Пересечение крестов r_5 и r_6 подкрашено на рис. 17*b*.)

Доказательство утверждения. Пусть судья поставил короля на клетку доски $R(3 \times 4)$, где стоит метка 1 (для других меток рассуждения аналогичны), этот случай задает нам тройку клеток $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$. Тогда шахматист L по своей стратегии поставит ладью на клетку 1 доски $L(2 \times 3)$. Далее, пусть судья поставит короля на 5-ю или на 6-ю клетку доски $L(2 \times 3)$ — только в этих случаях король на доске L окажется не под шахом. Значит, в этих ситуациях шах обеспечивает шахматист $\mathcal{R}$. Это значит, что клетка с меткой 1 должна лежать в кресте клетки r_5 и аналогично клетка с меткой 1 должна лежать в кресте клетки r_6. Утверждение доказано.

Осталось заметить (непосредственным перебором), что в приведенном примере утверждение выполнено.

W5) Стратегия задается аналогично случаю W4) (см. рис. 18).

1	2	3	4
5	6	7	8

a) Разметка доски L

r_5		r_6
	$r_1 r_2$ r_3	
r_8	r_4	r_7

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{R}$

3	5	4
8	6	8
2	7	1

c) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

Рис. 18. Выигрышная стратегия для игры $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 3)$

W6) На языке шляп этот случай означает, что цикл содержит путь P_3 со шляпностями вершин 2, x, 2, где $x \leqslant 4$. На таком пути мудрецы выигрывают.

L1) Как в п. W4), пронумеруем клетки доски $L(2 \times 3)$ слева направо сверху вниз, рис. 19*a*. Тогда стратегия шахматиста $\mathcal{R}$ задается таблицей, наподобие той, что показана на рис. 19*b*. Отметим, что для этого способа задания стратегии допускается, что на одной клетке может стоять сразу несколько меток r_i. Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ тоже может быть задана с помощью доски 4×4, например, как это сделано на рис. 19*c*.

1	2	3
4	5	6

a) Разметка доски L

r_4		r_5	
			r_3
		r_2	
r_6	r_1		

b)

1	6	2	6
5	3	1	2
4	3	6	3
2	1	4	5

c)

Рис. 19. Два способа задавать стратегии

Как и в п. W4, имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Стратегия шахматистов выигрышная в том и только том случае, когда для любых трех различных клеток a, b, c доски $L(2 \times 3)$, таких что клетки b и c не лежат в кресте клетки a, выполняется следующее свойство на доске R: *все клетки доски $R(4 \times 4)$, помеченные числом a, лежат в пересечении крестов r_b и r_c.*

Например, для стратегии, показанной на рис. 19*c*, тройка клеток $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$ не удовлетворяет *утверждению*: из трех клеток с меткой 1 лишь одна клетка лежит в пересечении крестов r_5 и r_6. (Пересечение крестов r_5 и r_6 подкрашено на рис. 19*b*.)

Докажем, что у шахматистов нет выигрышной стратегии.

Пусть зафиксирована стратегия шахматиста $\mathcal{R}$. Пользуясь *утверждением*, попробуем понять, где на доске $R(4 \times 4)$ могут находиться клетки с метками 1, 2, и 3. По *утверждению* клетки с меткой 1 лежат в пересечении крестов r_5 и r_6, клетки с меткой 2 — в пересечении крестов r_4 и r_6, а клетки с меткой 3 — в пересечении r_4 и r_5.

Заметим, что объединение попарных пересечений любых трех крестов (возможно, совпадающих) на доске $R(4 \times 4)$ содержит не более 8 клеток. Действительно, разберем случаи.

1. Если центры крестов лежат в разных вертикалях и горизонталях, то каждое попарное пересечение состоит из двух клеток — см. пример на рис. 19b, где закрашено пересечение крестов r_5 и r_6 — итого не более 6 клеток.

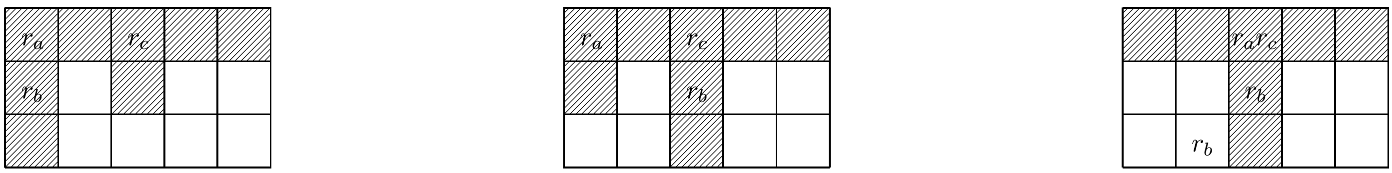
2. Если центры никаких двух крестов не совпадают и при этом два центра лежат на одной горизонтали или вертикали (как например r_4 и r_5 на рис. 19b, то пересечение этих двух крестов содержит 4 клетки и добавление третьего креста может дать в объединение попарных пересечений еще 4 клетки, только если центр этого креста лежит на одной линии с одним из первых двух центров (как r_4 и r_6 на рис. 19b. В этом случае получается 8 клеток, при этом 7 из них лежат в одном кресте (в рассматриваемом примере — в кресте r_4).

3. Если центры двух крестов совпадают, то пересечение крестов содержит 7 клеток. При любом положении третьего центра множество попарных пересечений не увеличится.

Итак, для клеток с метками 1, 2, 3 на доске $R(4{\times}4)$ имеется не более 8 позиций, аналогично для клеток с метками 4, 5, 6 тоже не более 8 позиций. Поскольку доска $R(4{\times}4)$ содержит 16 клеток, мы имеем 8 позиций для меток 1, 2, 3 и 8 позиций для меток 4, 5, 6. Но как установлено в переборе, 8 позиций реализуются только в виде множества «целый крест» плюс одна клетка. Осталось заметить, что двумя крестами и двумя дополнительными клетками невозможно накрыть всю доску $R(4 \times 4)$.

L2) Как и в п. L1 доска $L(2 \times 3)$ здесь та же самая, а правая доска тоже «довольно большая». Аналогично убеждаемся, что объединение попарных пересечений любых трех крестов (возможно, совпадающих) на доске $R(3 \times 5)$ содержит не более 8 клеток; случаи, в которых это пересечение содержит 7 или 8 клеток, показаны на рис. 20, — это случаи, когда центры двух крестов лежат в одной строке или столбце (в том числе, когда они лежат в одной клетке).

Во всех вариантах объединение попарных пересечений трех крестов занимает одну горизонталь доски полностью, а в каждой из двух других горизонталей оно занимает меньше половины клеток. Это значит, что объединение двух таких множеств не может составлять всю доску.



8 клеток 8 клеток 7 клеток
r_b — в любом месте

Рис. 20. Объединение попарных пересечений трех крестов на доске $R(3 \times 5)$

L3) Это рассуждение сообщил нам Олег Чемокос. Зафиксируем какие-нибудь стратегии шахматистов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ и проверим, что найдутся положения королей, в которых оба короля избегают шаха. Заметим, что если король стоит в какой-либо клетке доски $L(2 \times 4)$, то на доске имеется три «слабые» клетки (в другой строке), — клетки, с которых ладья не может побить этого короля. Для выигрышной стратегии все положения короля на доске $R(3 \times 4)$, вызывающие ответный ход шахматиста L в слабую клетку, должны находиться в одном кресте. При этом в роли слабых клеток могут оказаться любые три клетки одной строки — это произойдет, если король находится во второй строке в столбце, содержащем четвертую клетку.

Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ — это отображение $\phi\colon R(3 \times 4) \to L(2 \times 4)$, которое определяет, на какую клетку $\phi(K_R)$ шахматист $\mathcal{L}$ поставит ладью, если увидит короля на клетке K_R доски $R(3{\times}4)$. Покрасим клетки доски $R(3{\times}4)$ в два цвета: клетку x, для которой клетка $\phi(x)$ находится в первой строке доски $L(2 \times 4)$ красим в белый цвет, остальные в черный. Не умаляя общности можем считать, что клеток белого цвета на доске не меньше, чем черного. Разберем два случая, охватывающих все возможности, которыми может быть реализовано это «не меньше».

1. Одна из строк доски $R(3 \times 4)$ содержит три белые клетки r_1, r_2, r_3 (будем называть эту строку первой) и еще одна строка (вторая) — две белые клетки r_4 и r_5. Тогда в первой строке доски $L(2 \times 4)$ можно выбрать клетку ℓ, для которой прообраз $\phi^{-1}(\ell)$ — либо пустое множество, либо одна клетка первой строки, скажем, r_1. В этом случае остальные клетки первой строки являются слабым множеством, а его прообраз содержит клетки r_2, r_3, r_4 и r_5, не лежащие в одном кресте.

2. Каждая строка доски $R(3 \times 4)$ содержит две белые клетки. Тогда выберем в первой строке доски $L(2 \times 4)$ клетку ℓ, для которой прообраз $\phi^{-1}(\ell)$ состоит не более чем из одной клетки (для определенности она находится в третьей строке). В этом случае остальные клетки первой строки доски $L(2 \times 4)$ являются слабым множеством, а их четыре прообраза, лежащие в первых двух строках доски $R(3 \times 4)$, образуют множество, не лежащее в одном кресте.

L4) Допустим, что у шахматистов существует выигрышная стратегия. Воспользуемся обозначениями для описания выигрышных стратегий из п. W4). Пронумеруем клетки доски $L(3 \times 3)$ числами от 1 до 9. Тогда стратегия шахматиста $\mathcal{R}$ задается выставлением на доску $R(3 \times 4)$ девяти символов — r_1, r_2, …, r_9. При этом стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ задается выписыванием в каждой клетке доски $R(3 \times 4)$ чисел от 1 до 9, которые мы будем называть метками.

Как и в предыдущем пункте, при выставлении короля в клетку i на доске $L(3 \times 3)$ имеется 4 клетки, с которых ладья не может бить этого короля. Эти клетки и их номера будем называть i-слабыми. Для выигрышности стратегии необходимо, чтобы при всех i метки на доске $R(3 \times 4)$, совпадающие с i-слабыми номерами, находились в кресте с центром в r_i.

Заметим, что символы r_1, r_5 и r_9 должны находиться в разных строках доски $R(3 \times 4)$. Действительно, нетрудно видеть, что каждая клетка доски $L(3 \times 3)$ находится в слабой позиции по отношению к одной из клеток с номерами 1, 5 или 9. (Например, 1 и 2 в слабой позиции к 9, 3 — в слабой позиции к 5 и т. д.) Следовательно, каждая метка на доске $R(3 \times 4)$ лежит в r_1-, r_5- или r_9-кресте. Это может быть только если символы r_1, r_5 и r_9 находятся в разных строках.

Аналогично, символы r_i, r_j и r_k находятся в разных строках, если клетки i, j, k занимают три разные строки и три столбца доски $L(3 \times 3)$.

Следствие. Для расположения символов r_1, r_2, …, r_9 на доске $R(3 \times 4)$ возможны два случая: 1) либо символы r_1, r_2, r_3 стоят в одной строке доски $R(3 \times 4)$, символы r_4, r_5, r_6 стоят в другой строке, а символы r_7, r_8, r_9 — в третьей;

2) либо символы r_1, r_4, r_7 стоят в одной строке доски $R(3 \times 4)$, символы r_2, r_5, r_8 стоят в другой строке, а символы r_3, r_6, r_9 — в третьей.

Следствие доказывается умеренно противным перебором.

Докажем теперь, что выигрышных стратегий с таким обширным набором свойств не существует. Поставим ладей на все клетки r_i доски $R(3 \times 4)$ (в клетку ставим столько ладей, сколько в ней символов r_i). По следствию в первой строке доски $R(3 \times 4)$ имеется «пустая» клетка, т. е. клетка, не содержащая ни одного символа r_i, но содержащая некоторую метку a. Пусть она для определенности находится в четвертом столбце (рис. 21). По утверждению на эту клетку направлено 4 ладейных удара, причем две из этих четырех ладей находятся в одной строке, и еще две — в другой. Это значит, что в одной из клеток четвертого столбца заведомо стоят две ладьи. Пусть для определенности это клетка находится во второй строке. Теперь мы знаем, что всего во второй строке поставлено 3 ладьи, причем две из них находятся в одной клетке.
Значит, во второй строке есть две «пустые» клетки. Выберем ту из них, над которой в первой строке стоит не более одной ладьи. Пусть эта клетка для определенности находится в первом

			a
b			r_1r_2
r_7r_8	$\times$	$\times$	

Рис. 21. Стратегия для случая L3

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

a) Разметка доски L

1	2	
3	4	

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

Рис. 22. Ищем стратегию для игры $L(2 \times 5)$, $R(3 \times 3)$

столбце и содержит метку b. На выбранную клетку тоже направлено 4 ладейных удара от двух пар ладей, стоящих в двух строках. Одна пара ладей расположена, очевидно, во второй же строке, а другая пара — в третьей строке (в первой строке над клеткой b не более одной ладьи). Теперь мы видим, что одна из клеток третьей строки — во втором или третьем столбце — не может собрать на себя 4 ладейных удара из двух разных строк. Противоречие.

L5) Допустим, что у шахматистов существует выигрышная стратегия. Воспользуемся обозначениями для описания выигрышных стратегий из п. W4). Пронумеруем клетки доски $L(2\times 2)$ числами от 1 до 4. Тогда стратегия шахматиста $\mathcal{R}$ задается выставлением на доску $R(5\times 5)$ четырех символов — r_1, r_2, r_3, r_4. На доске $R(5\times 5)$ найдется хотя бы одна клетка, назовем ее Q, не лежащая ни в одном из четырех крестов, определяемых этими символами. Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ задается выписыванием в каждой клетке доски $R(5\times 5)$ числа от 1 до 4. Рассмотрим число, написанное в клетке Q, не умаляя общности это 1. Рассмотрим число на доске $L(2\times 2)$, стоящее по диагонали от 1, не умаляя общности, это 4. Пусть судья поставит королей: на доске $R(5\times 5)$ в клетку Q, а на доске $L(2\times 2)$ — в клетку 4. Тогда игрок $\mathcal{L}$ поставит ладью на клетку 1 доски $L(2\times 2)$, а игрок $\mathcal{R}$ поставит ладью на клетку r_4 доски $R(5\times 5)$. Ни одна из ладей не ставит шах. Шахматисты проиграли.

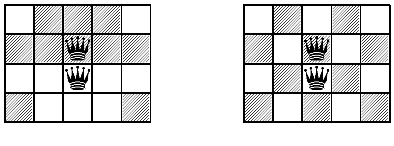
L6) Разметим доску L, как на рис. 22 a). Как и W4), стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ задается выписыванием в каждую клетку доски $R(3\times 3)$ числа от 1 до 10 — номера клетки на доске $L(2\times 5)$. Поскольку на доске $L(2\times 5)$ всего две горизонтали, найдется две строки доски $R(3\times 3)$, в каждой из которых написаны номера двух клеток, таких что все эти четыре клетки (возможно, среди них есть совпадающие) лежат в одной горизонтали доски $L(2\times 5)$. Пусть j — номер клетки из второй горизонтали, являющийся i-слабым сразу по отношению ко всем этим клеткам.

Например, пусть на доске $R(3\times 3)$ стоят метки 1, 2, 3, 4, как на рис. 22 b). Тогда 1-, 2-, 3- и 4-слабым одновременно является номер 10. Это значит, то ладья на клетке r_{10} доски $R(3\times 3)$ держит под боем клетки с метками 1, 2, 3 и 4. Это невозможно: чтобы бить метки 1 и 2, она должна находиться в верхней строке доски $R(3\times 3)$, а чтобы бить 3 и 4 — в нижней.

По той же причине невозможен и общий случай: клетка r_j должна оказаться сразу в двух строках $R(3\times 3)$.

4.2. Покрасим клетки обеих досок, как показано на рис. 23, a). Пусть оба шахматиста выставляют своих ферзей только на клетки, помеченные ферзями, причем пусть первый шахматист действует из предположения «Короли стоят на клетках одинакового цвета», а второй — из предположения «Короли стоят на клетках разного цвета».

Впрочем, на столь небольшой доске работает несколько неожиданный эффект: ферзь, стоящий на клетке $c2$, держит под боем все клетки того же цвета в шахматной раскраске! Поэтому вместо «экзотической» раскраски можно использовать обычную шахматную, рис. 23, b).



a) b)

Рис. 23. «Шах ферзем» на досках 4×5

4.3. Утверждение задачи было найдено с помощью компьютера. Участники конференции предложили симпатичные логические стратегии.

Р е ш е н и е 1 (Кононенко Николай). Зададим стратегию шахматистов. Разметим доску $R(5\times 5)$ как показано на рис. 24 a). Увидев короля на клетке с меткой j, шахматист $\mathcal{L}$ ставит ладью на клетку доски $L(4\times 4)$, помеченную числом j, рис. 24 b). Таким образом, шахматист $\mathcal{L}$ использует всего четыре позиции для своего ферзя. Для каждой клетки доски $L(4\times 4)$ на рис. 24 c) показано, с каких позиций ферзь шахматиста $\mathcal{L}$ не бьет эту клетку. Например, числа 1 и 2 в левом нижнем углу означают, что левая нижняя угловая клетка доски $L(4\times4)$ не пробивается ферзем с 1-й и со 2-й позиций, показанных на рис. 24 b), а прочерк означает, что клетка пробивается со всех позиций.

3	1	3	1	3
1	3	3	3	4
3	3	3	3	3
2	3	3	3	4
3	2	3	2	3
a	b	c	d	e

a) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

	1	3	
		2	
4			

b) Куда ставим ферзя

3	2,4	4	1,2
2	4	–	4
3	–	4	1,4
1,2	3	1	3

c) Инструкция для $\mathcal{R}$

Рис. 24.

Увидев короля на доске $L(4\times4)$, шахматист $\mathcal{R}$ с помощью рис. 24 c) сразу понимает, с каких «невыгодных» позиций ферзь его напарника не может поставить шах. Поэтому он должен разместить своего ферзя на доске $R(5\times5)$ так, чтобы тот пробивал все клетки, отправляющие ферзя шахматиста $\mathcal{L}$ на невыгодную позицию.

Для невыгодных позиций 1, 2 можно поставить ферзя на клетку $b3$, для 1, 4 — на клетку $c4$, для 2, 4 — на клетку $c2$, для 3 — на клетку $c3$.

Решение 2 (Преснова Екатерина, Рацеева Ольга).

Разметим доску $L(4\times4)$ как показано на рис. 25 a). Наблюдение 1: для этой разметки выполняется свойство — для любой пары меток все клетки, помеченные этой парой меток пробиваются одним ферзем. Например, все клетки, помеченные 0 или 1, пробиваются с клетки $a4$; все клетки, помеченные 0 или 2, пробиваются с клетки $c2$ и т. д.

Увидев короля на клетке с меткой j, пусть шахматист $\mathcal{R}$ ставит ладью на клетку ♕$_j$ доски $R(5\times5)$, рис. 25 b). Наблюдение 2: любая клетка доски $R(5\times5)$ пробивается как минимум с двух разных мест из этого набора. Тогда шахматист $\mathcal{L}$, увидев короля на доске $R(5\times5)$ сразу понимает, с каких позиций (среди указанных четырех) ферзь игрока $\mathcal{R}$ не может объявить шах. В силу наблюдения 2 таких «невыгодных» позиций не более двух, и шахматист $\mathcal{L}$ должен поставить своего ферзя на доске $L(4\times4)$ так, чтобы тот пробивал все клетки, отправляющие ферзя шахматиста $\mathcal{L}$ на невыгодную позицию. Это возможно, в силу наблюдения 1.

0	1	0	1
1	0	2	2
0	2	0	2
1	3	2	0

a)

	♕$_0$		♕$_1$	
	♕$_2$		♕$_3$	

b)

Рис. 25.

					C
	B				
A					

Рис. 26.

4.4. Решение 1 (Костина Екатерина, Миргалимова Розалина, Хамикова Марина). Приведем доказательство более сильного факта — что в игре «Шах ферзем» на досках $L(4\times6)$, $R(7\times7)$ мудрецы проигрывают.

Пусть судья планирует поставить короля на одну из клеток A, B, C доски $L(4\times6)$ (рис. 26). Для каждого из этих положений игрок $\mathcal{R}$ готов поставить ферзя на доску $R(7\times7)$. Поскольку три ферзя не могут держать под боем все клетки доски 7×7, на доске $R(7\times7)$ найдется клетка, которую не бьет ни один из ферзей. Если судья поставит короля на эту клетку, игрок $\mathcal{L}$ поставит в ответ ферзя на доску $L(4\times6)$. Так как клетки A, B, C не могут быть побиты одним ферзем, хотя бы одна из них окажется не под боем, и судья, окончательно сформулирует свои планы по поводу доски B: он поставит короля именно на эту клетку. Шахматисты проиграли.

Решение 2 (обычные вероятностные соображения). Но поданы они так, что мозг не сразу готов их воспринимать.

Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ — это отображение $\phi\colon R(7\times 7)\to L(7\times 8)$, которое определяет, на какую клетку $\phi(K_R)$ шахматист $\mathcal{L}$ поставит ферзя, если увидит короля на клетке K_R доски $R(7\times 7)$. Зафиксируем какую-нибудь стратегию шахматиста $\mathcal{L}$ и проверим, что для любой стратегии шахматиста $\mathcal{R}$, найдутся положения королей, для которых они не окажутся под шахом.

Для каждого положения K_L короля на доске L вычислим сумму

$$S(K_L)=\sum_{\substack{Q_L:\\ Q_L\notin C(K_L)}}|\phi^{-1}(Q_L)|.$$

Здесь индекс суммирования Q_L пробегает клетки доски L, находясь на которых ферзь шахматиста $\mathcal{L}$ не дает шах королю, стоящему на клетке K_L. Таким образом, сумма подсчитывает количество возможных положений короля на доске R, для которых игрок $\mathcal{L}$, пользуясь фиксированной стратегией ϕ, не сможет сделать шах.

Теперь просуммируем все эти величины по всем клеткам доски L:

$$S=\sum_{\substack{K_L:\\ K_L\in L(7,8)}}S(K_L)=\sum_{\substack{K_L:\\ K_L\in L(7,8)}}\ \sum_{\substack{Q_L:\\ Q_L\notin C(K_L)}}|\phi^{-1}(Q_L)|. \qquad (2)$$

Величина S равна числу способов поставить двух королей на доски так, чтобы при этом шахматист $\mathcal{L}$ не поставил шах своему королю. Отметим, что индекс K_L в первой сумме пробегает 56 значений — все клетки доски L.

Оценим сумму S другим способом: поставим короля на любую из клеток K_R доски $R(7\times 7)$ (49 вариантов), тогда шахматист $\mathcal{L}$ поставит ферзя на клетку $\phi(K_R)$. На доске $L(7\times 8)$ максимальное число клеток, которое может бить ферзь, равно 26, поэтому для любой клетки $\phi(K_R)$ найдется не меньше $56-26=30$ клеток K_L, находящихся вне ее креста. Таким образом, $S\geqslant 49\cdot 30$.

Возвращаясь к формуле (2), мы можем сделать вывод, что существует клетка K_L, для которой $S(K_L)\geqslant\frac{49\cdot 30}{56}=26{,}25$. Иными словами, если на доске L король поставлен на клетку K_L, то для этой клетки найдется 27 положений короля на доске R, для которого игрок $\mathcal{L}$ не ставит шах своему королю. Во всех этих случаях шах должен поставить игрок $\mathcal{R}$, причем его ход однозначно задается королем на клетке K_L. Но любой ферзь на доске $R(7\times 7)$ бьет не более 25 клеток, значит, найдется положение короля на доске R не под шахом.

Таким образом, всегда можно выбрать позиции королей на обеих досках, для которых оба шахматиста не поставят шах.

4.5. Надо бы это доказать

4.6. Надо бы это доказать

4.7. Ответ: да. На доске 11×11 можно поставить 5 ферзей, которые держат под боем все клетки (например, $b4$, $d10$, $f6$, $h2$ и $j8$). Тогда скомбинируем идею решения задачи 4.2 и стандартную идею игры в шляпы пяти цветов на 5-клике.

5.1. Пусть мудрецы зафиксировали какую-то стратегию на новом графе. Стратегию мудреца A можно задать в виде таблицы 3×7: строки соответствуют цветам шляп мудреца B, столбцы — цветам шляп мудреца A. В клетке таблицы записывают номер цвета (0 или 1), который называет мудрец A, когда видит у B и C соответствующие цвета шляп.

В каждом столбце таблицы один из символов — 0 или 1 — встречается два раза. Отметим клетки, содержащие повторяющийся символ. (Если символ встретился во всех трех клетках столбца, отметим любые две из них.) Отмеченные клетки могут находится либо в первой и второй строках, либо во второй и третьей, либо в первой и третьей. Поскольку столбцов 7, по принципу Дирихле найдутся две строки, в которых отмеченные клетки занимают три столбца. В отмеченных клетках одного столбца может находиться два нуля или две единицы, следовательно, можно выбрать два столбца из трех, так, что в указанных столбцах в отмеченных клетках стоит одно и то же число.

Итак, мы выбрали в таблице две строки (для определенности i-ю и j-ю) и два столбца (для определенности k-й и ℓ-й), на пересечении которых стоит одно и то же число, для определенности 0. Теперь мы без проблем построим опровергающий расклад шляп на все графе. Дадим мудрецу A шляпу цвета 1, мудрецу B будем подбирать шляпу i-го и j-го цвета, а мудрецу C — k-го или ℓ-го. При таком подходе к делу мудрец A заведомо не угадает свой цвет, так как в соответствии с таблицей назовет цвет 0. Что же касается назначения конкретных цветов мудрецам B и C, да и всем остальным, запустим игру на графе G: после фиксации цвета мудреца A стратегия остальных мудрецов на графе G определена однозначно, принятые ограничения на цвета шляп B и C позволяют полагать, что их шляпности теперь равны 2. Поскольку граф G проигрышный, мы сумеем предъявить на нем опровергающий расклад шляп.

5.2. Докажем следующее чуть более сильное утверждение.

Существует натуральное число N такое, что на любом графе G, у которого степени всех вершин не превосходят 3, а функции шляпности задается формулой

$$\widehat{a} = \begin{cases} 3, & \text{если } \deg a = 1, \\ 41, & \text{если } \deg a = 2, \\ N, & \text{если } \deg a = 3, \end{cases}$$

мудрецы проигрывают.

Доказательство. Обозначим $m = 80\binom{81}{41} + 1$. Покажем, что $N = 80\binom{m}{41}\binom{81}{41} + 1$ сгодится.

Индукция по числу вершин. База (граф из двух вершин) очевидна. Переход. Рассмотрим вершину наименьшей степени, обозначим ее A.

Случай 1. $\deg A = 1$. По утверждению задачи 3.7 добавление вершины степени 3 не влияет на выигрышность графа, а если в проигрышном графе еще увеличить шляпность одной из вершин, то он так и останется проигрышным.

Случай 2. $\deg A = 2$. Обозначим соседей A через B и C, $\deg B \leqslant \deg C$.

Лемма. Таблица $(2k-1) \times \left(2(\ell-1)\binom{2k-1}{k} + 1\right)$ покрашена в 2 цвета. Тогда можно выбрать такие k строк и ℓ столбцов, что все клетки на пересечении этих строк и столбцов покрашены в один и тот же цвет.

Доказательство. Рассмотрим произвольный столбец, в нем $2k-1$ клетка. Тогда по принципу Дирихле найдется k клеток одного цвета. Отметим эти k клеток. Сделаем этого для каждого столбца. Число способов отметить k клеток из $2k-1$ равно $\binom{2k-1}{k}$, эти клетки могут быть одного из двух цветов. Значит, по принципу Дирихле найдутся ℓ столбцов таких, что отмеченные клетки находятся в одном и том же наборе строк и они одного и того же цвета. Это и требовалось. □

Случай 2.1. $\deg B = \deg C = 2$. Покажем, что мудрецы проиграют в графе G, даже если $\widehat{A} = 2$. Предположим, что существует выигрышная стратегия мудрецов в G. Стратегия мудреца A — это таблица 41×41, в которой каждая клетка покрашена в один из двух цветов. Оставив от нее только 5 строк, воспользуемся леммой для $k = \ell = 3$. Из таблицы можно выбрать 3 строки и 3 столбца так, что их пересечения покрашены в один цвет. Тогда судья наденет на A шляпу другого цвета, а для B и C будет выбирать только трех цветов, соответствующих трем строкам и трем столбцам соответственно. Мы получим выигрышную стратегию для $G \setminus A$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 3$, что противоречит индукционному предположению.

Случай 2.2. $\deg B = 2$, $\deg C = 3$. Покажем, что и здесь мудрецы проиграют в графе G, даже если $\widehat{A} = 2$. Для $k = 3$, $\ell = 41$ таблица из леммы имеет размеры 5×801, а шляпности мудрецов B и C существенно больше: они равны 41 и N. Применяя лемму аналогично случаю 2.1, опять получаем противоречие.

Случай 2.3. $\deg B = \deg C = 3$. Действуем аналогично случаю 2.1, используем лемму для $k = \ell = 41$. Ей можно пользоваться, поскольку при $k = \ell = 41$ таблица имеет размеры $81 \times m$, оба из которых меньше шляпности мудрецов N.

Случай 3. $\deg A = 3$. Пусть B, C и D — соседи мудреца A. Тогда $\deg B = \deg C = \deg D = 3$. Зафиксируем какой-нибудь цвет мудреца D. Тогда стратегия мудреца A — табличка $N \times N$. Оставив 81 строку и m столбов, используем лемму, находим 41 строку и 41 столбец, пересечения которых покрашены в один цвет. Число способов выбрать 41 строку и 41 столбец равно $\binom{m}{41}\binom{81}{41}$. Проделаем эти действия для каждого из N возможных цветов мудреца D. Так как $N = 80\binom{m}{41}\binom{81}{41} + 1$, то найдется цвет мудреца D, для которого наборы строк, столбцов и цвета пересечений совпадают. Наденем на мудреца A противоположный цвет, оставим по 41 варианту цветов мудрецам B, C, D, и получим противоречие с индукционным предположением.

Список литературы

[1] Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года. М.: МЦНМО, 2017.