Игра «Избегание линий» – 1

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась Д., Кохась К.

1 Предварительные задачи

Мы будем рассматривать игры, в которых два игрока — Петя и Вася (они же Алиса и Боб, они же Первый и Второй, ну, или попросту P1 и P2) — по-очереди совершают ходы. В наших играх они будут что-нибудь красить, причем каждый игрок будет использовать свой «личный» цвет: для определенности пусть Петя все красит в пурпурный цвет (а лучше, не в пурпурный, а в первый), а Вася пусть красит, эээ..., в васильковый (а лучше, второй)! Во всех играх Петя ходит первым. «А Вася?» — спросите вы. А Вася ходит вторым!

Обычно за один ход разрешается покрасить один еще неокрашенный объект (если в условии явно не указано противоположное). Чего они хотят добиться своими раскрашиваниями, указано в условиях задач, но стоит иметь в виду, что, вообще говоря, им, быть может, и не удастся добиться желаемого, тогда игра окончиться ничьей. Поэтому на вопрос «Кто выиграет?» вполне возможен ответ «Никто!».

1.1. Петя и Вася по-очереди красят вершины додекаэдра. Игрок, после хода которого две вершины какого-то ребра окажутся окрашенными в один цвет, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

1.2. Петя и Вася по-очереди красят вершины какого-то многогранника. Игрок, после хода которого все вершины какой-то грани окажутся окрашенными в один цвет, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

1.3. На окружности поставлено 99 точек. Петя и Вася по-очереди красят эти точки. Игрок, после хода которого две соседние точки окажутся окрашенными одинаково, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

1.4. На окружности стоят n точек. Петя и Вася по-очереди, каждый — своим фломастером, проводят хорды, в том числе, можно соединять соседние точки. За один ход можно провести сразу несколько хорд. Игрок, после хода которого образуется треугольник с вершинами на исходной окружности, все стороны которого окрашены одинаково, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре? Достаточно выяснить вопрос для достаточно больших значений n.

2 Доски с пересекающимися линиями

Пусть на плоскости или еще где-нибудь отмечено произвольное конечное множество точек — будем называть эти точки узлами — и проведено несколько линий: каждая линия проходит через несколько узлов. Линию можно представлять себе, как «кривую произвольной формы», проходящую через узлы. Пусть для любых двух линий множества узлов, принадлежащих этим линиям, не совпадают. Фактически линии просто задают подмножества в множестве узлов. Будем говорить, что две линии пересекаются, если они имеют хотя бы один общий узел. Геометрические подробности расположения линий, в том числе, их пересечения не в узлах, нам несущественны. Позже мы будем использовать конфигурацию из узлов и линии как игровую доску и введем дополнительное требования, которому должна удовлетворять доска. А пока несколько предварительных утверждений.

2.1. На доске n узлов. Все линии попарно пересекаются.

a) Докажите, что количество линий не больше 2^{n-1}.

b) Пусть количество линий равно 2^{n-1}. Докажите, что если к линии добавить узел, то снова получится линия.

2.2. На доске n узлов. Все линии попарно пересекаются. Докажите, что можно добавить несколько линий так, чтобы их количество стало равно 2^{n-1} и чтобы по-прежнему все линии пересекались.

2.3. На доске n узлов и несколько линий. Пусть наименьшая линия содержит k узлов. Докажите, что если любые $k+1$ линий имеют хотя бы один общий узел, то и все линии вообще тоже пересекаются в каком-то узле.

2.4. Дан кубик $3 \times 3 \times 3$. Пусть его единичные кубики будут узлами доски, можно считать, что это тройки целых чисел (x_1, x_2, x_3), $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 2$. Пусть все линии на доске содержат ровно по 3 узла, а именно, будем считать, что линия, проходящая через узлы (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), проходит также через узел $(-x_1-y_1, -x_2-y_2, -x_3-y_3)$ (вычисления по модулю 3). Кто выиграет на этой доске?

Игра «Избегание линий» – 2

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась Д., Кохась К.

3 Общий вариант игры «Избегание линий»

Пусть дана игровая доска с узлами и линиями, как в предыдущем разделе. Петя и Вася по-очереди красят узлы. Игрок, после хода которого все узлы какой-то линии окажутся окрашенными одинаково, проигрывает. Если этого не произошло к тому времени, когда все узлы на доске оказались покрашенными, объявляется ничья.

Напомним, что перестановка — это взаимно однозначное отображение конечного множества на себя. Мы будем рассматривать перестановки множества узлов доски. Будем говорить, что перестановка узлов доски сохраняет линии, если для любой линии образ набора узлов, из которых состоит эта линия, — тоже линия. Мы будем рассматривать только доски, обладающие свойством транзитивности: для любых двух узлов u и v существует перестановка σ узлов доски, сохраняющая линии, такая что $\sigma(u) = v$.

Пример. Игра Сим. На окружности стоят n точек. Петя и Вася, по-очереди проводят хорды, каждый — своим фломастером, в том числе, можно соединять соседние точки. В отличие от задачи 1.4, за один ход можно провести одну хорду. Игрок, после хода которого образуется треугольник с вершинами на исходной окружности, все стороны которого окрашены одинаково, проигрывает.

Чтобы превратить Сим в транзитивную игру с избеганием линий, обозначим исходные точки A_1, $A_2, \ldots, A_n$ и рассмотрим доску, на которой заданы узлы N_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (узел N_{ij} соответствует хорде A_iA_j). Пусть для каждого трехэлементного множества $\{i, j, k\}$ (считаем, что $i < j < k$) задана линия, проходящая через три узла N_{ij}, N_{ik}, N_{jk}. Получилась транзитивная доска. Игра на этой доске эквивалентна игре Сим. Проведение хорды — это закрашивание узла, а треугольник — это линия!

Может показаться, что игра «Избегание линий» на транзитивной доске неблагоприятна для первого игрока: в силу транзитивности все точки на доске «одинаковы», чем раньше начнешь красить, тем раньше соберешь линию. На доске с нечетным числом узлов первый игрок (если дело дойдет до самого конца) закрасит больше точек, чем второй, к тому же на последнем ходу у второго игрока будет выбор, а у первого – нет.

Основной вопрос. При каких n существует транзитивная доска с n узлами, на которой Петя выигрывает?

3.1. Пусть все линии на доске состоят лишь из двух узлов. Докажите, что Петя не выиграет.

3.2. Рассмотрим «жадный» вариант игры. В нем на своем ходу игрок может покрасить не один узел, а любое непустое множество узлов по своему выбору. Докажите, что ни на какой доске Петя не может выиграть жадную игру.

3.3. Существует ли доска из 6 узлов, на которой Петя выигрывает?

3.4. Пусть n — нечетное составное число. Докажите, что существует доска с n узлами, на которой Петя выигрывает.

3.5. Для $n = 12k + 6$ существует доска, на которой все линии содержат по 3 узла и Петя выигрывает.

3.6. Докажите, что для любого числа r существуют сколь угодно крупные n, для которых можно построить доску с n узлами и линиями, содержащими ровно по r узлов, на которой Петя выиграет.

3.7. a) Докажите, что для $n = 2b$, где b — нечетно, существует доска, на которой Петя выигрывает.

b) Докажите, что для $n = 2^a b$, где b — нечетно, $a > 1$, существует доска, на которой Петя выигрывает. Вы можете разбирать отдельные частные случаи этого вопроса.

3.8. Докажите, что Петя не сможет выиграть ни на какой доске, содержащей ровно 2^n узлов.

3.9. Открытый вопрос. Для каких простых чисел n существует доска с n узлами, на которой Петя выигрывает?

Например, что вы можете сказать о небольших значениях n: $n = 3, 5, 7, 11, 13$?

Игра «Избегание линий» – 3

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась Д., Кохась К.

4 *Специальные доски*

Все доски, рассматриваемые в этой серии задач, предполагаются транзитивными.

Обозначим через A множество таких n, для которых существует транзитивная доска с n узлами, на которой любые две линии пересекаются и количество линий равно 2^{n-1}. Вопрос о том, какие натуральные числа принадлежат множеству A, а какие нет, до конца не выяснен.

Перестановка τ точек множества X называется произведением перестановок ρ и σ, если $\tau(k) = \rho(\sigma(k))$ при всех $k \in X$, т. е. если τ — это композиция отображений ρ и σ. Умножение перестановок, вообще говоря, некоммутативно. Набор перестановок G называют группой, если он замкнут относительно операции произведения перестановок. В этом случае G обязательно содержит тождественную перестановку e, а также для каждого $\sigma \in G$ в наборе G содержится перестановка, обратная к σ, т. е. такая перестановка $\bar{\sigma}$, что $\bar{\sigma}\sigma = \sigma\bar{\sigma} = e$.

Назовем перестановку флипом, если она разбивает все точки множества на пары и меняет местами точки в каждой паре. Назовем перестановку флопом, если длина каждого ее цикла равна степени 2. Пусть B — множество тех n, для которых можно построить группу перестановок множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, которая действует на множестве $[n]$ транзитивно и не содержит флопов.

4.1. a) Пусть для данной доски существует флип, сохраняющий линии. Докажите, что Петя не сможет выиграть на такой доске.

b) В магазине игрушек продается доска, на которой n узлов, где n четное, все линии попарно пересекаются и их количество равно 2^{n-1}. Докажите, что существует доска, на которой n узлов, выигрышная для первого.

4.2. Пусть транзитивная группа G перестановок множества $[2k]$ содержит перестановку τ, которая отображает некоторое k-элементное множество X на его дополнение $[2k] \setminus X$. Докажите, что группа G содержит флоп.

4.3. На доске n узлов. Все линии попарно пересекаются. При этом никакой флоп не является перестановкой, сохраняющей линии. Докажите, что можно добавить несколько линий так, чтобы их количество стало равно 2^{n-1}, доска осталась транзитивной, а флопы по-прежнему не сохраняли бы линии.

4.4. Пусть $n = 2^a \cdot b$, где $b > 1$ нечетно. Докажите, что существует доска с n узлами, на которой нет флипов.

4.5. Докажите, что $A = B$.

4.6. Докажите, что множество A замкнуто относительно умножения: если $k, n \in A$, то $kn \in A$.

4.7. Докажите, что если $b > 1$ — нечетное число, то $2b \in A$.

4.8. Докажите, что если $b > 3$ — нечетное число, то $4b \in A$.

5 *Некоторые факты из теории групп*

Мы приводим несколько теорем из теории групп, они требуются в решении задачи 3.8 Относительно элементарная постановка вопроса и его сведение с помощью задачи 4.1 к факту Любая транзитивная группа перестановок множества из 2^n элементов содержит флип оставляет шанс на то, что существует решение, не требующее всей этой техники.

5.1. Теорема Лагранжа.

a) Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа. Тогда $|G| \vdots |H|$.

b) Пусть $x \in G$, обозначим через k наименьшее натуральное число, для которого $x^k = e$. Это число называется порядком элемента x. Тогда $|G| \vdots k$.

5.2. Пусть G — конечная группа. Тогда для любого элемента $h \in G$ число элементов в его классе сопряженных элементов, т. е. в множестве $G_h = \{aha^{-1},\ a \in G\}$ является делителем числа $|G|$. Более точно: пусть $N_h = \{x \in G :\ hx = xh\}$. Тогда множество N_h представляет собой группу и $|G_h| \cdot |N_h| = |G|$.

5.3. Пусть G — конечная группа перестановок множества M. Для каждых $x \in M$, $g \in G$ обозначим через gx образ точки x под действием перестановки g. Множество $\mathcal{O}_x = \{gx,\ g \in G\}$ называется орбитой элемента x, а множество $S_x = \{g \in G :\ gx = x\}$ — стабилизатором точки x. Тогда для любой точки $x \in M$ $|\mathcal{O}_x| \cdot |S_x| = |G|$.

5.4. Пусть G — конечная группа. Множество $C = \{c \in G :\ \forall\, g \in G\ gc = cg\}$ называется центром группы G. Оно непусто, поскольку всегда $e \in C$. Тогда если $|G| = p^n$, где p — простое число, то $C \neq \{e\}$.

5.5. Теорема Силова. Пусть G — группа из n элементов, p^a — максимальная степень простого числа, на которую делится n. Тогда группа G содержит подгруппу H, состоящую из p^a элементов.

Решения

1 *Предварительные задачи*

1.1. Ответ: выигрывает Вася. Он может пользоваться центрально-симметричной стратегией и тогда не проиграет. При этом игра не может окончиться ничьей, поскольку если вершины пятиугольной грани додекаэдра покрашены в два цвета, обязательно найдутся две соседние вершины, окрашенные одинаково.

1.2. Ответ: возможно два исхода: выигрывает Петя, либо ничья.

Первый вариант возможен, например, на октаэдре, второй — на тетраэдре. Ни на каком многограннике Вася не может выиграть, потому что если у Васи есть выигрышная стратегия, то Петя может ее украсть.

1.3. Ответ: выигрывает Вася. Своим первым ходом он отметит точку через один от Петиной и дальше будет пользоваться симметричной стратегией.

Другая возможная стратегия для Васи — каждым ходом красить точку, соседнюю по часовой стрелке с точкой, которую только что закрасил Петя.

1.4. Ответ: при $n \geqslant 6$ выигрывает Вася. Это следствие 5 из [2]. По задаче 3.2 Петя не может выиграть. При $n \geqslant 6$ игра не может закончиться ничьей, так как рамсеевское число $R(3,3) = 6$.

2 *Доски с пересекающимися линиями*

2.1. a) Множество и его дополнение не могут одновременно оказаться линиями. Кстати, если количество линий равно 2^{n-1}, для любой пары взаимно дополнительных множеств одно является линией, а другое нет.

b) Если F — линия, $F \subset G$, то $F \cap (X \setminus G) = \varnothing$. Следовательно, $X \setminus G$ — не линия. Тогда по решению п. a) G — линия.

2.2. Это [1, лемма 2.2]. Пусть X — множество узлов доски, $\mathcal{L}$ — множество линий. по условию любые две линии пересекаются. Множество линий, которое мы хотим построить, должно удовлетворять утверждению 2.1 b), возьмем на заметку все множества узлов, которые содержат линию: положим

$$\mathcal{L}_1 = \{B \subset X : A \subset B \ \text{ для некоторой линии } A \in \mathcal{L}\}.$$

В частности, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$. Если найдется множество B, которое пересекается с каждой линией, но ни одну линию не содержит (это значит, что его дополнение $\bar{B}$ тоже пересекается с каждой линией и ни одну из них не содержит), то одно из множеств B, $\bar{B}$ тоже стоит назначить линией. Выберем то из них, в котором больше узлов (в случае равенства числа узлов — выберем любое). Пусть $\mathcal{L}_2$ — совокупность множеств, выбранных таким образом.

Проверим, что $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ — семейство попарно пересекающихся линий, в котором ровно 2^{n-1} элементов. То, что любые две линии в нем пересекаются, ясно по построению. Пусть Y — произвольное подмножество X, $\bar{Y}$ — его дополнение. Если Y содержит какую-то линию, то $Y \in \mathcal{L}_1$; если Y не пересекается какой-нибудь линией, то $\bar{Y} \in \mathcal{L}_1$; если же и то, и другое не выполнено, то Y или $\bar{Y}$ лежит в $\mathcal{L}_2$.

2.3. Это утверждение Ph. Zumstein. Если $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — минимальная линия, и ни одна из ее точек не является общей точкой пересечения всех множеств, то для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$ существует линия L_i, для которой $x_i \notin L_i$. Но тогда пересечение $L \cap L_1 \cap \ldots \cap L_k$ пусто.

2.4. Ответ: выигрывает Петя.

Сделаем несколько замечаний об устройстве игровой доски. Прежде всего, любые два различных кубика действительно определяют линию, состоящую из трех кубиков (в том смысле, что третий кубик, найденный по рецепту из условия задачи, не совпадает с исходными двумя). Далее, правило, описывающее линии, весьма симметрично: если по кубикам A и B конструкция из условия задачи задает кубик C, то по кубикам A и C эта же конструкция дает кубик B, а по кубикам B и C эта конструкция дает кубик A. Также нетрудно проверить, что через каждый кубик проходит 13 различных линий.

Заметим, что все кубики на этой доске, кроме кубика $(0,0,0)$, можно разбить на пары с помощью отображения: $x \mapsto -x$. Пусть Петя первым ходом закрасит кубик $(0,0,0)$, после чего каждым ходом он будет закрашивать кубик, парный к предыдущему ходу соперника. Пользуясь этой стратегией, Петя не проиграет.

Осталось доказать, что позиция, которая получится в конце игры, не может быть ничейной. Допустим, что ничейная позиция все-таки получилась. В финальной позиции 14 кубиков закрашено Петей. Имеется $C_{14}^2 = 7 \cdot 13$ всевозможных пар Петиных кубиков, и каждая пара A, B задает линию, содержащую некоторый третий кубик C. Поскольку позиция ничейная, этот кубик закрашен Васей. Перебирая все $7 \cdot 13$ пар, мы обнаружим $7 \cdot 13$ кубиков, закрашенных Васей. Но Вася закрасил всего 13 кубиков, значит, какой-то из этих кубиков мы «обнаружили» не менее 7 раз. Таким образом, мы обнаружили 7 линий (A_1, B_1, C), (A_2, B_2, C), $\ldots$, (A_7, B_7, C), проходящих через Васин кубик C. У этих линий кубики A_i, B_i закрашены Петей, и никакие два кубика среди этих 14 кубиков не могут совпадать. Значит, эти линии содержат все 14 кубиков, закрашенных Петей, а остальные 6 линий, проходящие через точку C, целиком состоят из Васиных кубиков. Противоречие.

3 Общий вариант игры с линиями

3.1. Это теорема 3 из [2]. Вася может украсть стратегию. Действительно, пусть Петя имеет выигрышную стратегию S_x, согласно которой первым ходом следует покрасить узел x. Пусть $\{x, y\}$ — какая-нибудь линия. В силу транзитивности существует выигрышная (для первого игрока) стратегия S_y, начинающаяся с хода в узел y. Тогда Вася может игнорировать тот факт что узел x закрашен и играть как бы за первого по стратегии S_y. Эта стратегия никогда не потребует от него, чтобы он походил в узел x, так как это проигрышный ход, поэтому Вася всегда будет иметь возможность ходить по стратегии.

3.2. Это теорема 4 из [2]. Вася может украсть стратегию. Пусть существует стратегия первого игрока, которая рекомендует первым ходом закрасить множество узлов S. Докажем, что у Васи имеется способ не проиграть, каким бы ни был первый ход Пети.

Пусть первым ходом Петя закрасил множество U. Если U — это всё поле, то игра уже закончилась и Вася не проиграл. В противном случае на доске имеется неокрашенный узел x. В силу транзитивности существует выигрышная стратегия первого игрока, начинающаяся с закрашивания множества узлов S', содержащего x. Пусть тогда Вася закрасит узел x и остальные неокрашенные узлы из S', если таковые имеются, после чего будет далее играть в соответствии с этой выигрышной стратегией. Наличие Петиных узлов в S' может только облегчить выигрыш, в то время как узлы, закрашенные Петей за пределами S', можно мысленно причислить к его второму ходу.

3.3. Ответ: да. Пример из [2]. Расположим 6 узлов в виде двух рядов по три узла, линии — это трехточечные множества одного из двух видов: либо это множество содержит по одному узлу из каждой пары, причем в верхнем ряду четное число узлов, либо содержит две точки из одной пары и одну точку из следующей по циклу пары. То, что эта доска транзитивная и первый выигрывает, проверяется непосредственно.

3.4. Это теорема 6 из [2]. Пусть $n = pq$. Будем считать, что на доске нарисовано q непересекающихся кругов, в каждом круге находится p узлов. Положим $p' = (p+1)/2$, $q' = (q+1)/2$. Рассмотрим семейство W, содержащее все множества из $p'q'$ узлов, каждое из которых содержит по p' узлов из каких-то q' кругов. В качестве множества линий L возьмем все множества из $p'q'$ узлов, не входящие в W. Транзитивность такой доски тривиальна, если мы ограничим себя перестановками, которые переставляют круги целиком, а также точки в них.

Так как каждая пара множеств из W пересекается, для доказательства того, что Первый выигрывает, достаточно проверить, что за первые $p'q'$ своих ходов он сможет построить множество из W (тогда Второй следующим ходом построит линию). Назовем круг активным, если Первый закрасил в нем не менее одного узла, но менее, чем p'. Назовем круг заполненным, если Первый закрасил в нем p' узлов. Стратегия Первого состоит в том, что он применяет первое из следующих правил, которое удается применить.

1) Если Второй только что ходил в активный круг, то Первый ходит туда же.

2) Если меньше q' кругов являются активными или заполненными, Первый ходит в пустой круг.

3) Первый ходит в любой активный круг.

Правило 1 означает, что после хода Первый закрасил в этом активном круге больше узлов, чем Второй. Правило 2 означает, что после хода Первого более половины непустых кругов активны или полны. В результате после $p'q'$ ходов Первый закрасит ровно по p' узлов в точности в q' кругах.

3.5. Это теорема 24 из [2]. Нужно взять $2k+1$ копий доски из решения задачи 3.3 (а линиями будем считать множества из трех узлов в каждой из копий, которые ранее там считались линиями). Транзитивность очевидна. Один экземпляр Петя оставит для содержательной игры (в ней он выигрывает по задаче 3.3), а остальные разобьет на пары и будет совершать в них симметричные ходы (и тут он не проиграет).

3.6. Это следствие 25 из [2]. Достаточно модифицировать пример из задачи 3.5. Пусть $k > 2r$ и при этом настолько крупное, насколько нам хочется. Возьмем $n = 2k + 1$ экземпляров доски из решения задачи 3.3. Пусть L — множество линий длины 3 на этой доске. Зададим линии длины r: пусть

$$L' = \{\ell' \in [n]^{(r)} \colon \ell' \supset \ell \ \text{ для некоторого } \ \ell \in L\}$$

Петина стратегия та же, что в задаче 3.5: на первой доске Петя поддерживает игру из задачи 3.3, на остальных парах досок Петя ходит симметрично. В какой-то момент Вася построит линию ℓ длины 3 из множества L (а Петя к этому моменту еще не построил такой линии). Если к этому времени сделано r пар ходов, то Вася проиграл: линия ℓ плюс остальные его ходы определяют линию из множества L'. Если же r ходов еще не сделано, то Петя начинает просто тянуть время, делая каждый свой ход на новую доску.

3.7. а) Это предложение 10 из [2]. Пусть $n = 2b$, $b' = (b-1)/2$. Будем считать, что доска — это клетчатый цилиндр $b \times 2$, для которого фиксировано направление обхода и клетки которого — это узлы. Будем обозначать клетки парами (x, ϵ), где x — остаток по модулю b, $\epsilon = 0$ или 1.

Множество из b клеток будем называть выигрышным, если оно

— или содержит по одной клетке в каждом столбце и при этом нечетное число клеток в верхней строке

— или содержит ровно один «полный» столбец (в котором обе клетки принадлежат множеству) и при этом «пустой» столбец (не содержащий клеток множества) отстоит от полного не далее чем на b' клеток в направлении обхода.

Обозначим через W семейство всех выигрышных множеств. Очевидно, выигрышное множество содержит половину всех клеток доски и дополнение выигрышного множества не

является выигрышным, так что в семействе W любые два множества пересекаются. Дополнение любого выигрышного множества будем считать линией. Полученная доска транзитивна, поскольку повороты цилиндра, а также одновременные перестановки узлов в двух столбцах сохраняют линии.

Проверим, что первый выигрывает на такой доске. Если A — это множество клеток, содержащее не более одной клетки в каждом столбце, обозначим через $\bar{A}$ множество, содержащее вторые клетки из тех столбцов, где имеются клетки A. Позиции в игре будем обозначать как пары (A, B), где A — множество клеток, закрашенных к данному моменту первым игроком, а B — множество клеток, закрашенных вторым.

Заметим, что в позициях вида $(A \cup (x, \epsilon), \bar{A} \cup (z, \delta))$, где $1 \leqslant z - x \leqslant b'$, у первого игрока есть простой форсированный выигрыш: он должен закрасить клетку $(x, 1-\epsilon)$ и после этого играть так, чтобы закрасить по одной клетке в каждом столбце, за исключением столбца z. Благодаря условию на x и z, в конце игры первый закрасит выигрышное множество второго вида (а второй игрок закрасит линию).

Опишем теперь стратегию первого игрока. Она состоит в том, что если нет простого форсированного выигрыша, то первый должен оставлять после своего хода позицию вида $(A \cup (x, \epsilon), \bar{A})$ для какого-нибудь множества A, содержащего не более одной клетки в каждом столбце и еще одной клетки (x, ϵ). Допустим, что в второй игрок закрашивает в ответ клетку (z, δ). Возможны следующие случаи.

1) Если $1 \leqslant z - x \leqslant b'$, то первый выиграет далее с помощью форсированного выигрыша.

2) Если $(z, \delta) \neq (x, 1-\epsilon)$, то первый ответит на это закрашиванием клетки $(z, 1-\delta)$, чем обеспечит после своего хода требуемый вид позиции.

3) Если $(z, \delta) = (x, 1-\epsilon)$, то после хода второго получилась позиция $(B, \bar{B})$, в которой все столбцы либо полные (обе клетки раскрашены), либо пустые. Выберем самый первый пустой столбец x' и если $x' < b'$, то пусть первый игрок закрасит клетку $(x', 0)$ (и кстати это означает, что самый первый ход первого был $(0, 0)$).

Если же $x' \geqslant b'$, то первый должен проявить некоторую аккуратность, поскольку дело попахивает построением выигрышного множества первого типа, а для этого требуется контролировать четность. Когда этот случай произошел впервые, все столбцы с номерами от 0 до b' уже закрашены, а столбец b' пуст, так как первый игрок в него не ходил, а второй игрок не мог туда ходить, поскольку тогда бы он предоставил первому форсированный выигрыш. Начиная с этого момента, первый по-прежнему будет закрашивать одну клетку (в самом первом) пустом столбце, а второй, если он не хочет, чтобы первый форсированно выиграл, должен будет закрасить вторую клетку в том же столбце. На последнем ходу первый должен выбрать ту незакрашенную клетку, которая обеспечивает нужную четность.

b) Это теорема 13 из [2]. Строится пример доски. Ужасно.

3.8. Это теорема 9 из [2]. Мы приводим ее доказательство в качестве решения «на вырост».

По утверждению задачи 4.1 a) достаточно проверить, что на доске, состоящей из 2^n узлов, всегда есть флип. Это общий факт о группах, транзитивно действующих на множествах. Кстати, по утверждению задачи 4.4 для любого числа узлов, не являющегося степенью двойки, существует транзитивная доска без флипов.

Так как у каждого узла орбитой является вся доска, то по утверждению 5.3 заключаем, что $|G| \vdots 2^n$ и для любого узла x и его стабилизатора S_x выполнено равенство

$$\frac{|G|}{|S_x|} = 2^n. \tag{1}$$

Тогда по утверждению 5.5 заключаем, что в группе G можно найти подгруппу H_2, состоящую из 2^k элементов, где $k \geqslant n$ — наибольший показатель степени 2, на которую делится $|G|$. Группа H_2 действует перестановками узлов на той же доске. Опять по утверждению 5.3 в группе H_2 для любого узла x, его стабилизатора T_x в группе H_2 и его орбиты $\mathcal{O}_x$

относительно группы H_2 выполнено аналогичное равенство

$$\frac{2^k}{|T_x|} = |\mathcal{O}_x|. \tag{2}$$

Но очевидно T_x – подгруппа в S_x, следовательно, $|S_x| \vdots |T_x|$. Тогда мы получаем, что двойка входит в одинаковой степени в числители в формулах (1) и (2), а в знаменатель формулы (2) она входит в степени не большей, чем в знаменатель формулы (1). Следовательно, правая часть формулы (2) делится на 2^n. Но орбита $\mathcal{O}_x$ не может содержать больше 2^n точек. Значит, $|\mathcal{O}_x| = 2^n$. Таким образом, группа H_2 действует перестановками узлов доски транзитивно.

По утверждению 5.4 в группе H_2 содержится непостоянная перестановка σ, коммутирующая со всеми остальными. По теореме Лагранжа $|H_2|$ делится на порядок перестановки σ, пусть этот порядок равен 2^d. Тогда $\tilde{\sigma} = \sigma^{d/2}$ — перестановка второго порядка, тоже лежащая в центре группы H_2. Значит, она представляет собой произведение нескольких независимых транспозиций. Проверим, что перестановка $\tilde{\sigma}$ не может иметь неподвижных точек. Действительно, пусть перестановка $\tilde{\sigma}$ меняет местами узлы x и y и при этом оставляет на месте узел z. В силу транзитивности группа H_2 содержит перестановку τ, отображающую z в x. Тогда $x = \tau\tilde{\sigma}(z) \neq \tilde{\sigma}\tau(z) = y$, т.е. перестановки $\tilde{\sigma}$ и τ не коммутируют! Противоречие.

Таким образом, $\tilde{\sigma}$ и есть искомый флип.

3.9. Дискуссия на стр. 24 в [2]. При $n = 3$, 5, 7 такой доски не существует. При $n = 11$, 13 существует (найдена на компьютере).

4 *Специальные доски*

4.1. a) Это лемма 8 из [2]. С помощью флипа мы можем определить симметричную стратегию.

b) Это предложение 7 из [2]. Купим доску в магазине и модернизируем ее: оставим на ней только линии из $n/2$ узлов. Антилиния — это дополнение линии. Очевидно и обратное верно: дополнение антилинии — это линия. Пусть Петя играет в игру «Построй антилинию». Он может выиграть в эту игру, украв, если надо, стратегию. Выигрыш в этой игре одновременно является и выигрышем в игру с избеганием линий.

4.2. Все циклы перестановки τ имеют четную длину, пусть их длины равны $2^{a_1}b_1$, $2^{a_2}b_2$, …, $2^{a_\ell}b_\ell$, где все числа b_i нечетны. Положим $b = b_1b_2\dots b_\ell$. Тогда τ^b — флоп.

4.3. Это предложение 2.3 [1]. Как это ни странно, текст, написанный ниже, является решением задачи, в том числе, и для нечетных n, хотя его содержательность в этом случае в каждый момент кажется крайне сомнительной.

Пусть G — группа перестановок, сохраняющих линии. По результату предыдущей задачи, если бы какое-нибудь множество можно было «переставить» с его дополнением с помощью перестановки $\tau \in G$, то некоторая степень перестановки τ оказалась бы флопом, что запрещено. Таким образом, орбиты группы G в семействе множеств размера $n/2$ распадаются на «взаимодополняющие» пары: если $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ — орбита множества F_1, то $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k\}$ — орбита множества $\bar{F}_1$.

Воспользуемся тогда конструкцией задачи 2.2. Очевидно, что группа G отображает линии из множества $\mathcal{L}_1$ в линии из этого же множества. Что же касается линий из множества $\mathcal{L}_2$, сам тест на принадлежность этому множеству (множества B и $\bar{B}$ должны пересекаться с каждой линией из $\mathcal{L}$) инвариантен по отношению к действию группы G (т. е. при $\tau \in G$ множества τB и $\tau\bar{B}$ тоже будут пересекаться с каждой линией). А замечание о взаимодополняющих парах орбит, позволяет G-инвариантным способом выбрать, какое из множеств B или $\bar{B}$ следует отнести к $\mathcal{L}_2$.

4.4. Это часть теоремы 3.2 [1]. Достаточно построить группу перестановок, транзитивно действующую на множестве узлов и не содержащую флипов. Пусть узлы расположены в виде прямоугольника $2^a \times b$. Обозначим через s_i, $i = 1, \ldots, b$, циклический сдвиг узлов на i-й горизонтали, а через t — перестановку, которая циклически переставляет все горизонтали (в каждом вертикальном ряду узлы переставляются одним и тем же способом). Тогда множество перестановок вида

$$s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_b^{k_b} t^k, \quad \text{где} \;\; k_1 + k_2 + \ldots + k_b \,\vdots\, 2^a \qquad (*)$$

является группой (т. е. просто замкнуто относительно композиций). Поскольку b нечетно, флип в такой группе должен иметь вид $s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_b^{k_b} t^k$, где $k = 0$, а показатели k_i могут быть равны лишь 0 и 2^{a-1}. В силу нечетности b хотя бы один из показателей k_i должен быть нулевым.

4.5. Проверим импликацию $(k \in B) \Rightarrow (k \in A)$. Если G — группа перестановок множества $[n]$, не содержащая флопа, возьмем в качестве начального пустое множество линий. По утверждению задачи 4.3 его можно дополнить до пересекающегося семейства из 2^{n-1} линий.

Для доказательства импликации $(k \in A) \Rightarrow (k \in A)$ заметим, что группа перестановок, действующая на транзитивной доске с 2^{n-1} линиями, не может поменять местами никакое множество с его дополнением. Тогда, как мы заметили в решении задачи 4.3, эта группа перестановок не содержит флопов.

4.6. Лучше проверять это свойство для множества B. Если группа G_1 действует на доске X_1 с k узлами и не содержит флопов, а группа G_2 действует на доске X_2 с n узлами и тоже не содержит флопов, то группа $G_1 \times G_2$ действует на доске $X_1 \times X_2$ с kn узлами и, очевидно, тоже не содержит флопов.

4.7. В решении задачи 4.4 построена транзитивная группа перестановок на доске с $2^a b$ узлами, не содержащая флипа. При $a = 1$ эта группа не может содержать флопа. Действительно, элемент вида $(*)$ не может оказаться флопом, поскольку при $k \neq 0$ его порядок делится на b, а при $k = 0$ это элемент второго порядка, т.е. тогда это флип, что невозможно.

4.8. Нужно слегка обобщить конструкцию решения 4.4. См. подробности в [1], доказательство теоремы 2.4.

Литература

[1] *Cameron P.J., Frankl P., Kantor W.M.* Intersecting families of finite sets and fixed-point-free 2-elements // Europ. J. Combinatorics. Vol. 10. 1989. P. 149–160.

[2] *Johnson J.R., Leader I., Walters M.* Transitive avoidance games. `http://arxiv.org/pdf/math/1607.0294v1.pdf`