А. Доледенок, А. Меньщиков, А. Семченков, М. Фадин

Почти все встречающиеся в проекте неравенства являются симметрическими, поэтому если при подстановке в неравенство тройки чисел (a_0, b_0, c_0) получается равенство, то и при подстановке любой тройки, получающейся из (a_0, b_0, c_0) перестановкой чисел, также получится равенство. Для краткости, мы будем указывать лишь случаи равенства, не получающиеся друг из друга перестановкой, подразумевая, что остальные тоже подходят.

По этой же причине после сведения неравенства к случаю равенства двух переменных или равенства одной из переменных нулю, мы будем сразу полагать $a = b$ или $a = 0$, а не писать "две переменные равны, без ограничения общности $a = b$".

1. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca).$$

Решение 1. Перепишем неравенство в следующем виде: $1 + 12r \geqslant 4q$, при условии $p = 1$. Зафиксируем p и r. q максимально, если $a = b$. Из условия $c = 1 - 2a$. После подстановки неравенство переписывается следующим образом:

$$24a^3 - 24a^2 + 8a - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 24\left(a - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{9} \leqslant 0.$$

Левая часть наибольшая при наибольшем a, то есть при $a = \frac{1}{2}$. Подставляя, получаем случай равенства $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

Решение 2. Однако это неравенство можно решить и методом Штурма. Без ограничения общности, c – наименьшее из чисел a, b, c, тогда $c \leqslant \frac{1}{3}$ и $3c - 1 \leqslant 0$. Перепишем неравенство в виде

$$1 + 4ab(3c - 1) \geqslant 4c(a + b).$$

Будем сближать числа a и b, фиксируя сумму, пока они не станут равны. Тогда, т.к. произведение ab при сближении возрастает, левая часть будет уменьшаться, а правая — сохраняться. Значит, неравенство достаточно доказать в случае $a = b$, далее см. решение 1.

2. Про вещественные числа a, b, c известно, что $a + b + c = 9$, $ab + bc + ca = 24$. Докажите, что $16 \leqslant abc \leqslant 20$. Докажите также, что для любого $r \in [16, 20]$ существуют вещественные a, b, c такие, что $a + b + c = 9$, $ab + bc + ca = 24$, $abc = r$.

Решение. По задаче 21 числа a, b, c вещественные, если и только если p, q, r вещественны и $T(p, q, r) \geqslant 0$. Если подставить $p = 9$ и $q = 24$, то многочлен перепишется в виде

$$T(9, 24, r) = -27(r - 16)(r - 20).$$

Его значение положительно при $r \in [16, 20]$.

3. Пусть P — симметрический многочлен от трех переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a,a,c) \geqslant 0$ и $P(0,b,c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел a, b, c, то $P(a,b,c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел a, b, c.

Решение. Перепишем многочлен $P(a,b,c)$ в виде $P(a,b,c) = A(p,q)r + B(p,q)$. Зафиксируем p и q. Поскольку p фиксировано, то множество возможных значений r ограничено (так как $0 \leqslant r = abc \leqslant p^3$). Правая часть линейна по r (или не зависит от r), поэтому она принимает наименьшее значение при наибольшем или наименьшем r (или не меняется при изменении r). По лемме об r это означает, что $P(a,b,c)$ принимает наименьшее значение при $a = b$ или $a = 0$.

4. (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $1 + a + b + c = 2abc$. Докажите, что

$$\frac{ab}{1+a+b} + \frac{bc}{1+b+c} + \frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$2q^2 - q(p+1) + 9r + 2pr - 3(p+1)^2 \geqslant 0,$$

при условии $1+p = 2r$. Зафиксируем p и r. Заметим, что в левой части неравенства стоит квадратичная по q функция с положительным старшим коэффициентом. Минимум достигается в точке $q_0 = \frac{p+1}{4}$.

Докажем, что при любом q выполнено $4q - (p+1) \geqslant 0$, из чего будет следовать, что левая часть нашего неравенства монотонна по q. Для минимального q будет верно, что $a = b$, а из условия следует, что $c = \frac{1+2a}{2a^2-1}$. Подставив это в $4q - (p+1) \geqslant 0$, и учтя, что $2a^2 - 1 > 0$, получим неравенство

$$8a^4 - 4a^3 + 10a^2 + 8a \geqslant 0,$$

которое верно.

Поскольку левая часть возрастает, то достаточно рассмотреть минимальное q. В этом случае $a = b$ и $c = \frac{1+2a}{2a^2-1}$. После подстановки в исходное неравенство и сокращения, получим

$$a(2a^2 - 2a - 1)^2 \geq 0.$$

Случай $a = 0$ не подходит, поэтому остается единственный случай равенства $a = b = c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. (Иран, отбор на IMO, 1996) Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

Решение. Зафиксируем p и q. Неравенство тогда перепишется в виде

$$\frac{4qpr + q(p^4 - 2p^2q + q^2)}{(pq - r)^2} \geqslant \frac{9}{4}$$

Заметим, что $r \leqslant pq$, поэтому минимальное значение левой части достигается при минимальном r.

- Если подставить $a = 0$, то исходное неравенство перепишется в виде

  $$\frac{(b-c)^2(b^2 + bc + c^2)}{2bc(b+c)^2} \geqslant 0.$$

  Случаи равенства $a = 0$, $b = c$.

- Если $a = b$, то, обозначив $t = \frac{c}{b}$, перепишем исходное неравенство в виде

  $$t(t-1)^2 \geqslant 0.$$

  Случай равенства $a = b = c$.

6. Выразите через $a + b$ и ab выражения $a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4, (a - b)^2$.

Решение.

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab),$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a+b)^2 - 2ab)^2 - 2(ab)^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab.$$

7. Выразите через p, q, r выражения $a^2 + b^2 + c^2$, $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$, $a^3 + b^3 + c^3$, $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$, $a^4 + b^4 + c^4$, $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Решение.

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca) = p^2 - 2q,$$

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = pq - 3r,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 6abc = p^3 - 3pq + 3r,$$

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc) = q^2 - 2pr,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr,$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (p-c)(p-a)(p-b) = p^3 - p \cdot p^2 + pq - r = pq - r.$$

8. Для целых неотрицательных k положим $s_k = a^k + b^k + c^k$. Выведите рекуррентную формулу (с коэффициентами, зависящими от p, q, r), выражающую s_k ($k \geqslant 3$) через s_{k-1}, s_{k-2} и s_{k-3}.

Решение 1. Докажем, что $s_k = ps_{k-1} - qs_{k-2} + rs_{k-3}$. Действительно,

$$ps_{k-1} - qs_{k-2} + rs_{k-3} = (a+b+c)(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}) - (ab+bc+ca)(a^{k-2}+b^{k-2}+c^{k-2}) + \\ + abc(a^{k-3}+b^{k-3}+c^{k-3}) = (s_k + ab^{k-1} + ac^{k-1} + ba^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1} + cb^{k-1}) - \\ - (ab^{k-1} + ac^{k-1} + ba^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1} + cb^{k-1} + abc^{k-2} + ab^{k-2}c + a^{k-2}bc) + \\ + (abc^{k-2} + ab^{k-2}c + a^{k-2}bc) = s_k.$$

Решение 2. По задаче 18 числа a, b, c являются корнями уравнения

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Домножим его на x^{k-3} и перепишем следующим образом:

$$x^k = px^{k-1} - qx^{k-2} + rx^{k-3}.$$

Осталось подставить a, b, c и просуммировать три полученных равенства.

9. Докажите, что любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от переменных p, q, r.

Решение. Рассмотрим наш многочлен $G(a, b, c)$. Представим его в виде суммы $G = G_1 + G_2 + G_3$, где одночлены в G_i содержат ровно i переменных, для $i = 1, 2, 3$. Представим каждый из G_i как многочлен от p, q, r.

Заметим, что по предыдущей задаче для любого k многочлен s_k выражается через p, q, r (очевидно, s_0, s_1, s_2 выражаются через p, q, r). Если в исходном многочлене присутствует одночлен a^l, то в силу того, что многочлен симметрический, в нем также будут присутствовать одночлены b^l и c^l. Тогда мы сможем выразить G_1 через p, q, r. По аналогичным соображениям, исходя из тождества

$$s_k s_l - s_{k+l} = a^k b^l + a^k c^l + b^k a^l + b^k c^l + c^k a^l + c^k b^l,$$

мы делаем вывод, что G_2 также можно выразить через p, q, r. Если же у нас есть сумма

$$a^k b^l c^m + a^k c^l b^m + b^k a^l c^m + b^k c^l a^m + c^k a^l b^m + c^k b^l a^m,$$

то, вынеся $(abc)^n$ за скобку (где $n = \min(k, l, m)$), мы сведем задачу к предыдущим случаям — нам достаточно будет расписать через p, q, r то, что останется в скобках.

10. Дано вещественное число t. Решите систему уравнений $\begin{cases} a + b + c = t, \\ a^2 + b^2 + c^2 = t^2, \\ a^3 + b^3 + c^3 = t^3. \end{cases}$

Решение. Выразим левые части уравнений через p, q, r. Подставим первое уравнение ($p = t$) во второе ($p^2 - 2q = t^2$) и получим, что $q = 0$. Подставив это в третье уравнение ($p^3 - 3pq + 3r = 0$), получим, что $r = 0$. Из равенства $r = 0$ следует, что одна из переменных, без ограничения общности a, равна 0. Тогда $q = ab + bc + ca = bc = 0$, откуда еще одна переменная равна 0. Итого получаем, что у системы три решения: $a = b = 0$, $c = t$ и две его перестановки.

11. Для вещественных чисел a, b, c докажите, что $q^2 \geqslant 3pr$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3(a + b + c)abc.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Тогда исходное неравенство будет равносильно следующему:

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

В свою очередь, это неравенство можно переписать так:

$$\frac{1}{2}(ab - ac)^2 + \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(ac - bc)^2 \geqslant 0.$$

12. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что $\dfrac{p}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{q}{3}} \geqslant \sqrt[3]{r}$.

Решение. Первое неравенство равносильно тому, что $p^2 \geqslant 3q$, или $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$, что верно. Перепишем второе неравенство в виде

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Оно верно, поскольку это неравенство средних для чисел ab, bc, ca.

13. Докажите, что a и b — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$, и других корней нет.

Решение. Заметим, что

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - px + q.$$

Левая часть равна 0 тогда и только тогда, когда $x = a$ или $x = b$.

14. Докажите, что если оба числа p и q — вещественные, то числа a и b или оба вещественны, или комплексно сопряжены.

Решение. Если a вещественно, то $b = p - a$ тоже вещественно, как разность вещественных чисел. Пусть $a = x + yi$, где $y \neq 0$. Тогда $b = p - a = (p - x) - yi$. Мы знаем, что число

$$q = ab = (x + iy)(p - x - yi) = (xp - x^2 + y^2) + (py - 2xy)i$$

вещественное, поэтому $py - 2xy = 0$, то есть $p = 2x$, откуда $b = x - yi = \overline{a}$.

На самом деле, утверждение задачи следует из известного факта: если многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень z, то число $\overline{z}$ также является корнем $P(x)$.

15. Докажите, что если p и q вещественны, то $(a - b)$ является или вещественным, или чисто мнимым числом.

Решение. Если a и b оба вещественны, то их разность вещественная. Если a и b сопряжены, то $a - b = x + yi - (x - yi) = 2yi$ — чисто мнимое число.

16. Выразите условие того, что a и b вещественны, в терминах p и q и неравенств от этих величин.

Решение. Для того, чтобы a и b были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы p и q были вещественны, а также квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ имело два вещественных (возможно, кратных) корня, то есть $p^2 - 4q \geqslant 0$.

17. Докажите, что a и b вещественны и неотрицательны тогда и только тогда, когда p и q неотрицательны и выполнены условия на p и q из предыдущей задачи.

Решение. Если a и b вещественны и неотрицательны, то неотрицательны p и q, а также выполнены условия из предыдущей задачи. Обратно, из условий предыдущей задачи следует вещественность a и b. Поскольку q неотрицательно, то a и b — это числа одного знака (или одно из них равно 0). Но тогда они неотрицательны, поскольку p неотрицательно.

18. Докажите, что a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

Решение. Как и в задаче 13, проверяется непосредственной подстановкой.

19. Докажите, что если числа p, q, r вещественны, то либо все числа a, b, c вещественны, либо среди них одно вещественное, а два других комплексно сопряжены.

Решение. Воспользуемся известным фактом, что у многочлена нечётной степени с вещественными коэффициентами есть вещественный корень. Пусть a — вещественный корень многочлена $x^3 - px^2 + q - r$. Разделим этот многочлен на $(x - a)$:

$$x^3 - px^2 + q - r = (x - a)P(x),$$

где $P(x)$ — квадратный трёхчлен с вещественными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Поскольку числа b и c являются его корнями, то он равен $P(x) = x^2 - (b + c)x + bc$. По задаче 14 числа b и c или оба вещественны, или комплексно сопряжены.

20. Известно, что все числа p, q, r — вещественные. Докажите, что число

$$(a - b)(b - c)(c - a)$$

является вещественным, если все числа a, b, c вещественны, и чисто мнимым в противном случае.

Решение. Если a, b, c вещественны, то утверждение задачи очевидно. Предположим, что a вещественно, а b и c — комплексные. Запишем равенство:

$$(a - b)(b - c)(c - a) = -(a^2 - (b + c)a + bc)(b - c).$$

По предыдущей задаче числа b и c сопряжены. Пусть $b = x + yi$, $c = x - yi$, $y \neq 0$. Тогда $b + c = 2x$, $b - c = 2yi$, $bc = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$. Поэтому значение выражения $-(a^2-(b+c)a+bc)$ является действительным, а значение выражения $(b-c)$ — чисто мнимым. В произведении получится чисто мнимое число.

21. Докажите, что

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2.$$

Решение.

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = (ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a)^2 = (ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a)^2-$$

$$-4(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) = (pq-3r)^2-4((ab)^3+(bc)^3+(ca)^3)-$$

$$-4(a^4bc+ab^4c+abc^4+3(abc)^2) = (pq-3r)^2-4(q^3-3pqr+3r^2)-4r(p^3-3pq+3r)-12r^2 =$$

$$= -4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2.$$

22. Критерий вещественности. Пусть дана тройка чисел (p, q, r). Докажите, что тройка чисел (a, b, c), определяемая как набор корней уравнения $x^3-px^2+qx-r=0$, состоит из вещественных чисел тогда и только тогда, когда p, q, $r \in \mathbb{R}$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$, где многочлен $T(p,q,r)$ определяется как $T(p,q,r) = -4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2$.

Решение. Если a, b, c вещественные, то, очевидно, p, q, $r \in \mathbb{R}$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$. Докажем в обратную сторону. Обозначим $P(x) = x^3-px^2+qx-r$. Предположим, что не все a, b, c вещественные. Тогда по задаче 20 число $(a-b)(b-c)(c-a)$ является чисто мнимым. Но тогда число $T(p,q,r) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ будет отрицательным, что противоречит условию.

23. Лемма о неотрицательности. Докажите, что неравенства $p, q, r \geqslant 0$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$ равносильны тому, что числа a, b, c вещественны и неотрицательны.

Решение. Условия p, q, $r \in \mathbb{R}$ и $T(p,q,r) \geqslant 0$ равносильны тому, что a, b, c вещественны. Если в добавок a, b, c неотрицательны, то p, q, r, очевидно, также неотрицательны. Если p, q, r неотрицательны, то у уравнения $x^3-px^2+qx-r=0$, очевидно, не может быть отрицательного корня, поэтому a, b, c неотрицательны.

24. Лемма об r. Пусть для заданных $p=p_0$ и $q=q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке корней или есть два равных, или один из них равен 0. А для максимального r такого, что (p_0, q_0, r) допустима, верно, что в соответствующей тройке корней есть два равных.

Решение. Для того, чтобы тройка (p_0, q_0, r) была допустимой, необходимо, чтобы $T(p_0, q_0, r) \geqslant 0$ и $r \geqslant 0$ (p_0 и q_0 не меньше 0 по условию). $T(p_0, q_0, r)$ является квадратичной функцией от r с отрицательным старшим коэффициентом, поэтому решением неравенства $T(p_0, q_0, r) \geqslant 0$ является отрезок. Соответственно, максимальное r является правым концом этого отрезка, а минимальное — либо левым концом, либо нулем. На концах этого отрезка значение $T(p_0, q_0, r)$ равно 0, поэтому два числа из a, b, c равны (так как $T(p,q,r) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$). Если же $r = 0$, то одно из чисел a, b, c равно 0.

25. Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

Решение. $T(p_0, q, r_0)$ является многочленом третьей степени от q с отрицательным старшим коэффициентом. Свободный член равен $-4p_0^3r_0 - 27r_0^2$, то есть он неположителен. Следовательно, решением неравенства $T(p_0, q, r_0) \geqslant 0$ является объединение отрезка, у которого концы неотрицательны, и луча $(-\infty, q']$, где $q' \leqslant 0$. Отсюда следует утверждение задачи.

26. Лемма о p. Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных. Отдельно рассмотрите случай $r_0 = 0$.

Решение. Пусть $r_0 \neq 0$. Тогда $T(p, q_0, r_0)$ является многочленом третьей степени от p с отрицательным старшим коэффициентом. Свободный член равен $-4q^3 - 27r^2$, то есть он отрицателен. Поэтому в этом случае решение аналогично предыдущей задаче.

Пусть $r_0 = 0$, то есть одно из чисел a, b, c равно 0. Тогда $T(p, q_0, r_0) = p^2q_0^2 - 4q_0^3$. Если $q_0 = 0$, то две из трех переменных равны 0, третья принимает произвольное положительное значение. Если $q_0 \neq 0$, то $p \in [2\sqrt{q_0}, +\infty)$, то p может быть сколь угодно велико.

27. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается в следующем виде:

$$r - q + p - 9 \geqslant 0,$$

при условии $q = r$. Из условия следует, что $a, b, c > 1$, в частности $r \neq 0$. Зафиксируем q и r. p минимально, если $a = b$. В этом случае $c = \frac{a}{a-2}$, и после подстановки неравенство переписывается следующим образом:

$$2a^2 - 12a + 18 = 2(a-3)^2 \leqslant 0.$$

Случай равенства $a = b = c = 3$.

28. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$\frac{81 \cdot 3 - 18q + rp}{81 \cdot 9 - 81q + 9rp - r^2} \leqslant \frac{3}{8},$$

при условии $p = 3$. Домножив на знаменатель, перепишем неравенство в виде

$$-3r^2 + 19rp - 99q + 243 \geqslant 0.$$

Зафиксируем p и r. q максимально, если $a = b$. В этом случае $c = 3 - 2a$, и после подстановки в исходное неравенство, получим:

$$6a^4 - 9a^3 - 27a^2 + 57a - 27 = 3(a-1)^2(2a^2 + a - 9) \leqslant 0.$$

Поскольку $0 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$, то вторая скобка меньше 0, поэтому единственный случай равенства $a = b = c = 1$.

29. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{2}{1+abc}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$4r^2p + 4rq - 4rp - 16r^2 + 3r + 1 \geqslant 0,$$

при условии $p = 3$. Зафиксируем p и r. q минимально, если $a = b$. В этом случае $c = 3 - 2a$, и после подстановки в исходное неравенство, получим:

$$4a^4 - 12a^3 + 13a^2 - 6a + 1 = (2a-1)^2(a-1)^2 \geqslant 0.$$

Случаи равенства $a = b = c = 1$, $a = b = \frac{1}{2}$ и $c = 2$.

30. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$, $a + b + c = 4$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Докажите, что

$$a^6 + b^6 + c^6 \leqslant a^5 + b^5 + c^5 + 32.$$

Решение. Из условия имеем $p = 4$ и $q = 5$. По задаче 8 верны следующие равенства:

$$a^5 + b^5 + c^5 = p^5 - 5p^3q + 5pq^2 + 5p^2r - 5qr,$$

$$a^6 + b^6 + c^6 = p^6 - 6p^4q + 6p^3r + 9p^2q^2 - 12pqr - 2q^3 + 3r^2.$$

Подставим их в исходное неравенство и перенесем все в левую часть. Тогда в левой части будет стоять квадратичная по r функция с положительным старшим коэффициентом, поэтому наибольшее значение левая часть достигает при минимальном или максимальном r. Заметим также, что из доказательства леммы об r следует, что достаточно рассмотреть случай $a = b$ (у $T(4, 5, r)$ значение в 0 отрицательно). В этом случае $c = 4 - 2a$, и после в условие $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, получим:

$$2(a-1)(3a-5) = 0.$$

Отсюда либо $a=b=1$ и $c=2$, либо $a=b=\frac{5}{3}$ и $c=\frac{2}{3}$. Подстановкой в исходное неравенство убеждаемся, что второй случай не является случаем равенства, а первый — является.

31. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что
$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:
$$\frac{p^4-4p^2q+5q^2-2pr}{q^2p^2-2q^3-2p^3r+4pqr-r^2}\geqslant\frac{10}{p^2}.$$

Легко видеть, что если домножить на знаменатели и перенести все в левую часть, то в левой части получится квадратичная по r функция с положительным старшим коэффициентом. Зафиксируем p и q. Коэффициент при r будет равен $18p^3-40pq$. Поскольку $p^2\geqslant 3q$, то этот коэффициент будет неотрицательным, следовательно, минимальное значение функция принимает при минимальном r.

- Если $a=b$, то, обозначив $t=\frac{a}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде
$$20t^3-11t^2+4t+1\geqslant 0.$$
Левая часть больше 0 при неотрицательных t.
- Если $a=0$, то, обозначив $t=\frac{b}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде
$$(t-1)^2(t^4+4t^3+t^2+4t+1)\geqslant 0.$$
Получаем случай равенства $a=0$, $b=c$.

32. Известно, что a, b, $c\geqslant 0$. Докажите, что
$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca)\geqslant a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a).$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:
$$p^5-5p^3q+7p^2r+4pq^2-3qr\geqslant 0.$$

В случае $a=b=c=0$ получим равенство. Зафиксируем p и q. Заметим, что $7p^2>3q$, если не все числа a,b,c равны 0, поэтому выражение слева линейно по r, причем минимум достигается при минимальном r.

- Если подставить $a=0$, то исходное неравенство переписывается в виде
$$(b^2-c^2)(b^3-c^3)=(b-c)^2(b+c)(b^2+bc+c^2)\geqslant 0.$$
Случай равенства $a=0$, $b=c$.

- Если подставить $a = b$, то исходное неравенство переписывается в виде

$$c(c^2 - a^2)^2 \geqslant 0.$$

Случай равенства $a = b = c$.

33. а) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geqslant \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$3p^5 - 14p^3q + 8q^2p + 12p^2r + 9qr \geqslant 0.$$

В случае $a = b = c = 0$ получим равенство. Зафиксируем p и q. Функция слева линейна по r, коэффициент при r больше 0, поэтому минимум достигается при минимальном r.

- Если $a = 0$, то, обозначив $t = \frac{b}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$3t^4 - 2t^3 - 2t + 4 \geqslant 0,$$

что верно, случая равенства нет.

- Если $a = b$, то, обозначив $t = \frac{a}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$4t^5 - 5t^4 + 6t^3 - 10t^2 + 2t + 3 = (t - 1)^2(4t^3 + 3t^2 + 8t + 3) \geqslant 0.$$

Случай равенства $a = b = c$.

б) Найдите наименьшее $k \geqslant 0$ такое, что для любых a, b, $c \geqslant 0$ справедливо

$$k\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + (1 - k)\frac{3abc}{a + b + c} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Решение. Рассуждая как в предыдущем пункте, получаем, что коэффициент при r равен $12kp^2 + 9(1 - k)q$. Заметим, что $k \leqslant 1$, поэтому минимум достигается при минимальном r.

- Если $a = 0$, то, обозначив $t = \frac{b}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$3k(t^4 + 1) \geqslant t^3 + t.$$

При $k < \frac{1}{3}$ и $t = 1$ неравенство не выполняется, поэтому k не меньше $\frac{1}{3}$. Если $t = \frac{1}{3}$, то неравенство можно переписать в виде

$$(t - 1)^2(t^2 + t + 1) \geqslant 0,$$

что верно, поэтому при $a = 0$ и $k \geqslant \frac{1}{3}$ неравенство выполнено всегда, причем константу $\frac{1}{3}$ нельзя уменьшить.

- Если $a = b$, то, обозначив $t = \frac{a}{c}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$(t-1)^2((12k-4)t^3 + (21k-9)t^2 + (12k-2)t + 3k) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (12k-4)t^3 + (21k-9)t^2 + (12k-2)t + 3k \geqslant 0. \Leftrightarrow k \geqslant \frac{4t^3 + 9t^2 + t}{12t^3 + 21t^2 + 12t + 3}.$$

Максимум правой части при неотрицательных t достигается в точке, которая является большим корнем уравнения $t^4 + 9t^3 + 17t^+ 8t - 4$. Значение в этой точке и есть ответ (поскольку оно больше $\frac{1}{3}$).

34. Известно, что $a, b, c > 0$, $X = \frac{a^2+b^2}{2c^2} + \frac{b^2+c^2}{2a^2} + \frac{c^2+a^2}{2b^2}$; $Y = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}$. Докажите, что

$$4X + 69 \geqslant 27Y.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$-225r^3 - 50p^3r^2 + 4q^3r + 55pqr^2 + 6p^2q^2r - 4p^4qr - 4pq^4 + 2p^3q^3 \geqslant 0. \quad (*)$$

Докажем, что для второй производной по r левой части выполнено неравенство

$$-1350r - 100p^3 + 110pq \leqslant 0$$

Зафиксируем p и r. Левая часть линейна по q, поэтому максимальное знавение выражение слева принимает, когда $a = b$. В силу того, что неравенство однородно, будем считать, что $a = b = 1$. При подстановке, неравенство примет вид

$$-20(5c^3 + 19c^2 + 100c + 29) \leqslant 0,$$

что верно для положительных c.

Зафиксируем p и q. По доказанному выше, слева стоит вогнутая по r функция, поэтому она достигает минимума при минимальном или максимальном r.

- Если подставить $a = 0$ в $(*)$, то оно переписывается в виде

$$pq^3(2p^2 - 4q) \geqslant 0.$$

  Выражение в скобках всегда не меньше 0. Случай равенства $a = b = 0$ не подходит в исходное неравенство.

- Если подставить $a = b = 1$ в исходное неравенство, то оно примет вид

$$(c-2)^2(c-1)^2(4c+1) \geqslant 0.$$

  Случай равенства $2a = 2b = c$ и $a = b = c$.

35. а) Дан однородный симметрический многочлен $P(a,b,c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.

Решение. Приведем пример алгоритма в случае, когда степень $P(a,b,c)$ равна 8, для меньших степеней алгоритм аналогичен. Неравенство $P(0,b,c) \geqslant 0$ проверяется следующим образом. Сначала проверим, что выполняется неравенство $P(0,0,c) \geqslant 0$. Затем, обозначив $t = \frac{c}{b}$ и разделив неравенство на b^8, получим неравенство от одной переменной $P(0,1,t) \geqslant 0$. Неравенство $P(a,a,c) \geqslant 0$ также проверяется аналогично.

Перепишем неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ в терминах p, q, r. Поскольку многочлен P однородный, можно считать, что $p = 1$. Тогда неравенство запишется в виде

$$A(q)r^2 + B(q)r + C(q) \geqslant 0.$$

Зафиксируем q такое, что $A(q) \leqslant 0$. Тогда неотрицательность достаточно проверять для минимального или максимального r, то есть в случаях $a = b$ и $a = 0$. Зафиксируем q такое, что $A(q) > 0$. Минимум левой части неравенства достигается в точке $r_0 = -\frac{B(q)}{2A(q)}$. Заметим, из условия $T(p,q,r) \geqslant 0$ следует, что r лежит в отрезке $I = \left[\frac{9q-2}{27} - \frac{2-6q}{27}\sqrt{1-3q}, \frac{9q-2}{27} + \frac{2-6q}{27}\sqrt{1-3q}\right]$. Если r_0 не лежит в этом отрезке, то достаточно проверить неотрицательность в случаях $a = b$ и $a = 0$. Иначе достаточно проверить неотрицательность в точке r_0. При подстановке r_0 получим неравенство на q:

$$4A(q)C(q) - B^2(q) \geqslant 0. \quad (*)$$

Получаем следующий алгоритм:

1. Проверить, что выполнено неравенство $P(0,b,c) \geqslant 0$.
2. Проверить, что выполнено неравенство $P(a,a,c) \geqslant 0$.
3. Переписать неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ в терминах p, q, r и подставить $p = 1$.
4. Найти множество тех q, для которых выполнено неравенство $A(q) > 0$.
5. Найти множество тех q, для которых точка $r_0 = -\frac{B(q)}{2A(q)}$ лежит в отрезке I.
6. Для q, лежащих в пересечении множеств из пунктов 4 и 5, проверить выполнение неравенства $(*)$.

б) Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена степени не выше 17.

Указание. Вспомните формулы Кардано и Феррари. Обратите внимание на то, что корни в этих формулах могут получаться комплексные.

в*) Приведите аналогичный алгоритм для однородного симметрического многочлена произвольной степени (или хотя бы для степени 18).

36. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Докажите, что

$$2(a+b+c-2)^2+(ab+bc+ca)(2+3(a+b+c)) \geqslant 35.$$

Решение. Сделаем замену $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$. После этого исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$2p^4+10q^2-8p^2q-8p^2+16q+3p^2q^2-6p^3r-6q^3-4pr-27 \geqslant 0,$$

при условии, что $p=3$. Зафиксируем p и q. Функция слева линейна по r, причем коэффициент при r меньше 0, поэтому минимальное значение левой части достигается при максимальном r, то есть при $x=y$. В этом случае $z=3-2x$, и после подстановки неравенство переписывается следующим образом:

$$(x-1)^2(54x^4-144x^3+165x^2-70x+21) \geqslant 0.$$

Это неравенство верно, случай равенства $a=b=c=1$.

37. Известно, что a, b, $c \geqslant 1$ и $a+b+c=9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab+bc+ca} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Решение. Сделаем замену $a=(x+1)^2$, $b=(y+1)^2$, $c=(z+1)^2$. После этого исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$q^2+p^2-2pr+2pq-2p-6r-6 \geqslant 0,$$

при условии, что $p^2-2q-2p=6$. Зафиксируем p и q. В левой части неравенства стоит линейная по r функция, коэффициент при r отрицательный, поэтому минимальное значение левой части достигается при максимальном r, то есть при $x=y$. В этом случае $a=b$ и $c=9-2a$, и после подстановки исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$-3a^2+16a-9 \leqslant 4\sqrt{9a-2a^2}.$$

При $1 \leqslant a \leqslant \frac{9}{2}$ левая часть больше 0, поэтому можно возвести в квадрат. После возведения, неравенство примет вид

$$3(a-3)^2(3a^2-14a+3) \leqslant 0,$$

что верно при $1 \leqslant a \leqslant \frac{9}{2}$. Случай равенства $a=b=c=3$.

Также эту задачу можно решить, используя соображения раздела 5.

38. Известно, что a, b, $c>0$. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2.$$

Решение. Сделаем замену $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{a+c}$, $z = \frac{c}{a+b}$. Заметим, что $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = 1$. После замены исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$p^3r - 3pqr + 3r^2 - 2r + 13 \geqslant 0,$$

при условии $q + 2r = 1$. Зафиксируем q и $r > 0$. Функция слева монотонна по p, поскольку производная, равная $3p^2r - 3qr$, не меньше 0. Поэтому достаточно проверить неравенство для $x = y$, то есть $a = b$. Подставив в исходное неравенство, и обозначив $t = \frac{c}{a}$, перепишем неравенство в виде

$$(t-1)^2(t^3 + 5t^2 + 12t + 4) \geqslant 0,$$

что верно. Случай равенства $a = b = c$.

39. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{4-bc} + \frac{b^2}{4-ca} + \frac{c^2}{4-ab} \leqslant 1.$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$abc(a^3+b^3+c^3)-4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2+16(a^2+b^2+c^2)+16(ab+bc+ca)-64 \leqslant 0.$$

Подставив в это неравенство условие, получим

$$abc(a^3 + b^3 + c^3 + 4(ab + bc + ca) + abc - 16) \leqslant 0.$$

Если $a = 0$, то получаем случай равенства $a = 0$, $b^2 + c^2 = 4$. В противном случае, сократив на abc, получим неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant 16 - abc - 4(ab + ac + bc). \quad (*)$$

Сделаем замену $a = x-2$, $b = y-2$, $c = z-2$, где $x, y, z > 2$. Неравенство перепишется в виде

$$p^3 - 3pq + 4r \leqslant 6p^2 - 14q,$$

при условии $r = 4q - p^2$. Чтобы сделать неравенство однородным, домножим неравенство на условие:

$$(p^3 - 3pq + 4r)(4q - p^2) \leqslant (6p^2 - 14q)r \Leftrightarrow 0 \leqslant r(10p^2 - 30q) - (p^3 - 3pq)(4q - p^2).$$

Коэффициент при r равен 0 только если $x = y = z$, то есть $a = b = c$. В этом случае, при подстановке в исходное неравенство получим случай равенства $a = b = c = 1$. В противном случае, правая часть минимальна при минимальном r.

- Если $x = 0$, то $a = 2$, и при подстановке в исходное условие, получим $b = c = 0$, что является частным случаем равенства, описанного выше.

- Если $x = y$, то

$$z = 4x - x^2 = 4(a+2) - (a+2)^2 = 4 - a^2.$$

Поэтому $a = b$, $c = 2 - a^2$. Подставив эти равенства в $(*)$, получим

$$0 \leqslant (a-1)^2(a+2)^2(a^2 - 2a + 2).$$

Получаем случай равенства $a = b = c = 1$.

40. Для вещественных чисел a, b, c докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 3(a^3b + b^3c + c^3a),$$

причем равенство возможно только в случаях $a = b = c$ и

$$\frac{a}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}, \quad \frac{b}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{c}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}$$

$$\frac{c}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}} = \frac{a}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}} = \frac{b}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}.$$

Подсказка. Сделайте замену $a = x + 2ty$, $b = y + 2tz$, $c = z + 2tx$ для некоторого t.

Решение. Заметим, что достаточно доказать неравенство для неотрицательных a, b, c. Сделаем замену, указанную в подсказке, для $t = \cos\frac{\pi}{7}$, считая $x, y, z \geqslant 0$. Тогда

$$a^3b = \left(6x^2y^2\cos\frac{\pi}{7} + 8y^4\cos^3\frac{\pi}{7} + xyz(12x\cos^2\frac{\pi}{7} + 24y\cos^3\frac{\pi}{7})\right) +$$

$$+ \left(x^3y + 2x^3z\cos\frac{\pi}{7} + 12y^3x\cos^2\frac{\pi}{7} + 16y^3z\cos^4\frac{\pi}{7}\right).$$

Расписав аналогично два оставшихся слагаемых, получим, что сумма первых скобок будет симметрической. В сумме вторых скобок будут коэффициенты двух видов: $\left(1 + 16\cos^4\frac{\pi}{7}\right)$ и $\left(2\cos\frac{\pi}{7} + 12\cos^2\frac{\pi}{7}\right)$. Но эти коэффициенты равны, поэтому сумма левых скобок будет также симметрической. Заметим, что сумма линейна по r и коэффициент при r равен $12p\left(\cos^2\frac{\pi}{7} + 2\cos^3\frac{\pi}{7}\right)$. При разложении на элементарные симметрические левой части исходного неравенства r встречаться не будет, поэтому, если перенести все в правую часть, то коэффициент при r будет отрицательным, и минимальное значение левой части достигается при максимальном r.

Если $x = y = 0$, то неравенство верно и единственный случай равенства $a = b = c = 0$. Иначе можно считать, что $x = y = 1$, так как неравенство однородно. После подстановки и преобразований получим:

$$(z-1)^2(z - 4\cos^2\frac{2\pi}{7}(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}) + 2\cos\frac{\pi}{7})^2 \geqslant 0.$$

Получаем случаи равенства $x = y = z$, то есть $a = b = c$, и

$$x = y = (4\cos^2\frac{2\pi}{7}(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}) - 2\cos\frac{\pi}{7})z,$$

что после преобразований приводит к случаю равенства из условия задачи.

Существует и другое решение. Обозначим

$$f(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Можно заметить, что

$$f(a, b, c) = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc - c^2 + ac)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + ac - a^2 + ab)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(c^2 - 2ac + ab - b^2 + bc)^2.$$

Или же

$$f(a, b, c) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 3ab + 3ac - 2c^2)^2 + \frac{3}{4}(a^2 - ab - ac - b^2 + 2bc)^2.$$

41. а) Какие условия на числа p, q, r равносильны тому, что все числа a, b, c не меньше 1?

Решение. По задаче 22 вещественность чисел a, b, c равносильна тому, что p, q, r вещественные и выполняется неравенство $T(p, q, r) \geqslant 0$. Вещественные числа $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ неотрицательны, и по теореме о неотрицательности это равносильно следующим условиям:

$$(a-1) + (b-1) + (c-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant 3,$$

$$(a-1)(b-1) + (b-1)(c-1) + (c-1)(a-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow q - 2p + 3 \geqslant 0,$$

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow r - q + p - 1 \geqslant 0.$$

б) А тому, что a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?

Решение. Как и в предыдущей задаче p, q, r должны быть вещественными и должно выполняться неравенство $T(p, q, r) \geqslant 0$. Также числа

$$a,\ b,\ c,\ (a + b - c),\ (a - b + c),\ (-a + b + c)$$

неотрицательны, что по теореме о неотрицательности равносильно следующим условиям:

$$p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad r \geqslant 0, \quad 4q - p^2 \geqslant 0, \quad -p^3 + 4pq - 8r \geqslant 0.$$

Заметим, что четвертое неравенство является следствием третьего, поэтому его можно убрать.

в) А тому, что для неотрицательных a, b, c выполнено $2\min(a,b,c) \geqslant \max(a,b,c)$?

Решение. Условие равносильно следующим неравенствам:

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad 2a \geqslant b, \quad 2a \geqslant c, \quad 2b \geqslant a, \quad 2b \geqslant c, \quad 2c \geqslant a, \quad 2c \geqslant b.$$

Заметим, что условия $2a \geqslant b$, $2b \geqslant a$ равносильны тому, что $(2a-b)(2b-a) \geqslant 0$, поэтому условие равносильно следуюзим неравенствам:

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad (2a-b)(2b-a) \geqslant 0, \quad (2b-c)(2c-b) \geqslant 0, \quad (2a-c)(2c-a) \geqslant 0.$$

Осталось записать условия теоремы о неотрицательности для двух троек чисел.

42. Известно, что a, b, $c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Докажите, что

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{7}{5}.$$

Решение. Обозначим $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$ и перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geqslant \frac{7}{5}, \qquad (*)$$

при условии $xyz = 1$, и x, y, $z \in \left[\frac{1}{9}, 9\right]$. Последний переход был неэквивалентным, но если мы докажем новое неравенство, то из него будет следовать исходное. Перепишем $(*)$ следующим образом:

$$8 + 3p - 2q - 7r \geqslant 0.$$

Зафиксируем q и r, тогда левая часть принимает наименьшее значение при наименьшем p. Рассмотрим, какие значения может принимать p. На значения p наложены следующие ограничения:

- $T(p,q,r) \geqslant 0$. В этом случае для минимального p выполнено $x = y$. Неравенство переписывается в виде

  $$(3-x)(2x^2 - 2x + 1) \geqslant 0,$$

  что верно, поскольку $x \leqslant 3$. Случай равенства $x = y = 3$, $z = \frac{1}{9}$, то есть $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = 3$ и его циклические перестановки.

- условия из теоремы о неотрицательности для чисел $x - \frac{1}{9}$, $y - \frac{1}{9}$, $z - \frac{1}{9}$. В этом случае для минимального p выполнено $x = \frac{1}{9}$. Учитывая, что $z = \frac{9}{y}$, перепишем неравенство в виде $(y-3)^2 \geqslant 0$. Случай равенства такой же.

- условия из теоремы о неотрицательности для чисел $9 - x$, $9 - y$, $9 - z$. В этом случае для минимального p выполнено $x = 9$. Учитывая, что $z = \frac{1}{9y}$, перепишем неравенство в виде

  $$-27y^2 + 50y - 3 \geqslant 0,$$

  что верно, поскольку $y \leqslant 1$.

43. Известно, что a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\right).$$

Решение. Исходное неравенство переписывается следующим образом:

$$18r^2+(6p^3-11pq)r-p^2q^2 \leqslant 0.$$

Зафиксируем p и q. Слева стоит квадратичная по r функция, коэффициент при r^2 положителен, коэффициент при r неотрицателен, поэтому функция монотонно возрастает. На r наложены следующие ограничения:

$$r \geqslant 0, \quad T(p,q,r) \geqslant 0, \quad -p^3+4pq \geqslant 8r,$$

поэтому достаточно проверить неравенство для случаев, когда $a=b=1$ и $a=b+c=1$ (в силу однородности). Оба случая легко разбираются, случаи равенства $a=b=c$ и $a=2b=2c$.

44. Докажите, что существует многочлен $S(x,y,z)$ такой, что тройка a, b, c является вещественной тогда и только тогда, когда $S(x,y,z) \geqslant 0$, где

$$x=a+b+c, \quad y=a^2+b^2+c^2, \quad z=a^3+b^3+c^3.$$

Решение. Заметим, что

$$p=x, \quad q=\frac{x^2-y}{2}, \quad r=z-p^3+3pq=\frac{x^3-3xy+2z}{2}.$$

Определим многочлен S следующим образом:

$$S(x,y,z)=T(p,q,r)=T\left(x,\frac{x^2-y}{2},\frac{x^3-3xy+2z}{2}\right)$$

Понятно, $S(x,y,z)$ — искомый многочлен.

45. Докажите, что для любого числа $s \in \left[\frac{86}{9},10\right]$, существуют числа x, y, z такие, что

$$a+b+c=4, \quad a^2+b^2+c^2=6, \quad a^3+b^3+c^3=s,$$

а вот ни для каких других s это не верно.

Решение. Из предыдущей задачи a, b, c вещественные тогда и только тогда, когда $S(4,6,s) \geqslant 0$. Несложно заметить, что многочлен $S(x,y,z)$ является квадратичной функцией по z с отрицательным коэффициентом при z^2. Отсюда следует, что возможные значения s — это отрезок. На краях отрезка верно, что $S(x,y,z)=0$, то есть $a=b$. Подставляя в условия, получаем требуемое.

46. (США, отбор на IMO, 2001) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что

$$ab+bc+ca-abc \leqslant 2.$$

Решение 1. Положим

$$x = a + b + c = p, \quad y = a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q, \quad z = abc.$$

a, b, c вещественны, если $S(x, y, z) = T(x, \frac{x^2 - y}{2}, z) \geqslant 0$. Ясно также, что если $S(x, y, z) = 0$, то две переменных из a, b, c равны.

Теорема о неотрицательности переписывается следующим образом:

$$p \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0, \quad q \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - y \geqslant 0, \quad r \geqslant 0 \Leftrightarrow z \geqslant 0.$$

Условие $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ переписывается в виде $y + z = 4$. Неравенство $ab + bc + ca - abc \leqslant 2$ переписывается в виде $x^2 - y - 2z \leqslant 4$.

Зафиксируем y и z. Неравенство достаточно проверить для максимального x (максимальное x существует, поскольку $x \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 12$). В соответствующей тройке a, b, c две переменные равны. Подставив в исходное неравенство $a = b$, получим верное неравенство. Случаи равенства: $a = b = c = 1$ и $a = b = \sqrt{2}$, $c = 0$.

Решение 2. (Дидин Павел) Исходное неравенство переписывается следующим образом: $q - r \leqslant 2$, при условии $p^2 - 2q + r = 4$. Зафиксируем q_0 и r_0, для которых существует p_1, удовлетворяющее условию. Для этих q_0 и r_0 рассмотрим минимальное p_0 такое, что тройка (p_0, q_0, r_0) допустима (но не обязательно выполнено $p_0^2 - 2q_0 + r_0 = 4$). Поскольку исходное неравенство не зависит от p, то докажем, что оно выполняется для тройки (p_0, q_0, r_0), отсюда будет следовать справедливость неравенства для тройки (p_1, q_0, r_0). В силу минимальности p_0 достаточно проверить неравенство для $a = b$, при условии $p^2 - 2q + r \leqslant 4$.

47. (Китай-запад, 2004) Известно, что a, b, $c > 0$. Докажите, что

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство следующим образом:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Сделаем замену $x = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, $y = \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}$, $z = \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}$.

Неравенство переписывается в следующем виде:

$$1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Условия переписываются следующим образом:

$$x, y, z \geqslant 1 \Leftrightarrow p - 3 \geqslant 0, \quad q - 2p + 3 \geqslant 0, \quad r - q + p - 1 \geqslant 0.$$

На новые переменные наложено следующее условие:

$$(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=1 \Leftrightarrow (r+p)^2-(q+1)^2=1.$$

Левое неравенство доказывается легко, будем доказывать правое. Запишем его в виде

$$q \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}\,r.$$

Сделаем замены: $p'=p+r$, $q'=q$, $r'=r$. Все условия могут быть переформулированы в терминах p', q', r'. Значит, мы можем зафиксировать значения p' и q', и нам надо доказать неравенство

$$r' \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}q'.$$

Осталось доказать неравенство в случае, когда $x=y$.

48. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+nabc=n+3$.

а) Пусть $0 \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}$. Докажите, что $a+b+c \leqslant 3$.

б) Пусть $\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant 2$. Докажите, что $a+b+c \leqslant \sqrt{2(n+3)}$.

в) Пусть $n=2$. Докажите, что $ab+bc+ac-abc \leqslant \frac{5}{2}$.

Указание: а), б) Введите обозначения

$$x=a+b+c, \quad y=a^2+b^2+c^2+nabc, \quad z=abc.$$

с) Аналогично решению задачи 46.

49. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(2+\sqrt{4-3abc}).$$

Решение. Обозначим

$$x=a^2+b^2+c^2+abc=4, \quad y=ab+bc+ca, \quad z=abc.$$

Тогда $p=\sqrt{x-z+2y}$, $q=y$, $r=z$. Условие вещественности чисел a, b, c записывается в виде $S(x,y,z)=T(\sqrt{x-z+2y},y,z) \geqslant 0$. Хоть это уже и не многочлен, но все еще непрерывная функция в области $x-z+2y \geqslant 0$. Как обычно, из равенства $S(x,y,z)=0$ следует, что две из a, b, c равны. Неравенство переписывается следующим образом:

$$q^2-2rp \geqslant r(2+\sqrt{4-3r}) \Leftrightarrow y^2-2z\sqrt{x-z+2y} \geqslant z(2+\sqrt{4-3z}).$$

Зафиксируем x и z. Заметим, что выражение слева монотонно возрастает по y, ведь его производная неотрицательна:

$$2y-2\frac{2z}{2\sqrt{x-z+2y}} \geqslant 0 \Leftrightarrow y\sqrt{x-z+2y} \geqslant r \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant r,$$

что очевидно. Теперь нам надо рассмотреть минимальный возможный y, он берется или из того, что $S(x,y,z)=0$, или из $x-z+2y=0$ (как граница области определения, но этот случай невозможен). Дальше можно без потери общности полагать, что $a=b$.

50. Докажите, что следующие функции непрерывны: $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна для любого $x\in(0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна для любого $x\in(0,+\infty)$, $f(x,y)=x+y$ непрерывна для любых $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Решение. Если $f(x)=\frac{1}{x}$, то положим $\delta=\min\left(\frac{x}{2},\frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}\right)$. Тогда

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-x}{xy}\right|\leqslant\frac{\delta}{x(x-\delta)}\leqslant\varepsilon.$$

Если $f(x)=\sqrt{x}$, положим $\delta=\min\left(1,x,\left(\frac{2\sqrt{x}\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right)$. Тогда

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{\delta}{2\sqrt{x}-\sqrt{\delta}}\leqslant\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{x}-\sqrt{\delta}}\leqslant\varepsilon.$$

Если $f(x,y=x+y)$, то положим $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$(x+y)-(x_1+y_1)\leqslant\sqrt{(x-x_1)^2}+\sqrt{(y-y_1)^2}\leqslant2\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\leqslant\delta.$$

51. Пусть функция $g(x)$ непрерывна для всех $x\in M\subset\mathbb{R}^n$, а все её значения лежат в множестве $N\subset\mathbb{R}$. Пусть также функция $f(y)$ непрерывна для всех $y\in N$ и принимает вещественные значения. Докажите, что функция $f(g(x))$ непрерывна для всех $x\in M$.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0\in M$ и $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции f знаем, что для любогофиксированного x существует такое $\delta_1>0$, что если $|x-y|<\delta_1$, то $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Поскольку функция $g(x)$ непрерывна, то существует такое δ, что если $||x_0-y||<\delta$, то $|g(x_0)-g(y)|<\delta_1$. Получается, что если $||x_0-y||<\delta$, то $|f(g(x_0))-f(g(y))|<\varepsilon$, поэтому функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

52. а) Докажите, что многочлен $P(x)$ от одной переменной является непрерывной функцией для всех $x\in\mathbb{R}$.

б) Докажите, что многочлен $P(x_1,\dots,x_n)$ от n переменных является непрерывной функцией для всех $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Указание. Докажите, что если функции $f(x_1,\dots,x_n)$ и $g(y_1,\dots,y_m)$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, то функция $f(x_1,\dots,x_n)\cdot g(y_1,\dots y_m)$ непрерывна на $\mathbb{R}^{n+m}$.

53. Предположим, на переменные a, b, c наложено симметрическое условие G. Зафиксируем $r=r_0$, для которого существует допустимая тройка (p_0,q_0,r_0) такая, что $G(p_0,q_0,r_0)=0$. Предположим, что условие G равносильно тому, что $p=f(q)$

(с учётом фиксированного r), где f — некоторая функция, а множество возможных значений q ограничено. Докажите, что q достигает своего максимума и минимума, причём в экстремальных точках обязательно какие-то две из переменных равны,

а) если f — линейная функция;

б) если f — многочлен.

Решение. Заметим, что множество возможных значений q определяется следующими условиями. Во-первых, должно быть выполнено $T(p,q,r) = T(f(q),q,r) \geqslant 0$. Во-вторых, p должно быть неотрицательным, то есть $f(q) \geqslant 0$. Решением первого неравенства служит объединение нескольких отрезков, а решением второго — объединение нескольких отрезков и лучей. В пересечении получится объединение нескольких отрезков. На концах этих отрезков либо $T(p,q,r) = 0$, либо $p = 0$. В обоих случаях получаем, что какие-то две переменные равны. Заметим, что если f является непрерывной функцией, а не обязательно многочленом, то условие задачи остается верным. Действительно, в этом случае множество решений неравенства $f(q) \geqslant 0$ замкнуто, следовательно, максимум и минимум существуют.

54. Предположим, на переменные a, b, c наложено симметрическое условие G. Пусть (x,y,z) — произвольная перестановка (p,q,r). Зафиксируем $z = z_0$, для которого существует допустимая тройка (p,q,r) такая, что $G(p,q,r) = 0$. Предположим, что условие G равносильно тому, что $x = f(y)$ (с учётом фиксированного z), где f — многочлен, а множество возможных значений y ограничено. Тогда y достигает своего максимума и минимума, причём если $z = r$, то в любой точке экстремума $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, иначе в любой точке экстремума $abc(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Решение. Аналогично предыдущей задаче.

55. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = 10$. Докажите, что

$$\frac{9}{8} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{6}{5}.$$

56. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что

$$(a+b+c)(1+abc) \geqslant 6.$$

57. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $ab+bc+ca = a^3+b^3+c^3$. Докажите, что

$$ab+bc+ca \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

58. Известно, что $a,b,c \geqslant 0$. Им естественным образом соответствуют p,q,r, причём оказалось, что $q+r = 4$. Докажите, что

$$p^3 - 27r \geqslant 7(p^2-3q).$$

59. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca+(abc-1)^2$. Докажите, что

$$ab+bc+ca+3 \geqslant 2(a+b+c).$$

60. Является ли отрезок $[0, 1]$ компактом? Является ли луч $[0, +\infty)$ компактом? А множество, состоящее из точки $(1, 1, \dots, 1)$? Шар радиуса 1 с центром в точке $(1, 1, \dots, 1)$? Этот же шар без точки $(1, 1, \dots, 1, 0)$? А сфера радиуса 1 с центром в точке $(1, 1, \dots, 1)$?

Следующей задачей в дальнейшем можно будет пользоваться без доказательства.

Решение. Да, является. Нет, он не ограничен. Да, является, Да, является. Нет, множество не замкнуто. Да, является.

61. Рассмотрим набор условий

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_s(x_1, \dots, x_n) = 0, P_{s+1}(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0, \dots, P_m(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0,$$

где m — натуральное, а s — целое неотрицательное число, $P_1, \dots, P_m$ — многочлены от n переменных. Предположим, что множество точек M в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих всем этим условиям, ограничено. Докажите, что M является компактом.

Решение. Докажем следующий вспомогательный факт: если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $f(A) > 0$, то существует шар с центром в точке A такой, что значения функции f на этом шаре положительны. Действительно, рассмотрим $\varepsilon = \frac{f(A)}{2}$ и соответствующий ему δ (из определения непрерывности функции f). Тогда шар радиуса δ является искомым.

62. Дана симметрическая непрерывная функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на компакте $M \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, f такова, что при любых фиксированных $a_4, \dots, a_n$ (для которых существуют a_1, a_2, a_3 такие, что $(a_1, \dots a_n) \in M$) функция

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, a_4, \dots, a_n)$$

достигает своих экстремальных значений только когда $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) = 0$ (или $x_1x_2x_3(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$). Докажите, что функция f достигает своих экстремальных значений, причём в точке экстремума среди $x_1, \dots, x_n$ есть максимум два различных числа (или максимум два различных ненулевых числа).

Решение. Докажем для точки минимума (для точки максимума аналогично). Предположим, что минимум достигается в точке $(a_1, \dots, a_n)$. Предположим, что a_1, a_2, a_3 — попарно различные числа (попарно различные ненулевые числа). Тогда рассмотрим функцию

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, a_4, \dots, a_n).$$

По условию она достигает минимума, если какие-то две переменные x_1, x_2, x_3 равны (какие-то две переменные x_1, x_2, x_3 равны или одна из переменных равна 0). Получаем противоречие.

63. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$(1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 + (1 - d^2)^2 \geqslant 3.$$

64. (Россия, отбор на IMO, 2015) Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Докажите, что

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab \leqslant 1.$$

65. (IMO Shortlist, 2010) Про вещественные a, b, c, d известно, что $a+b+c+d=6$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Докажите, что

а) $abcd \leqslant 3$;

б) $36 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leqslant 48$.

66. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$. Докажите, что

$$a^3+b^3+c^3+d^3+4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3} \geqslant 2(abc+bcd+cda+dab).$$

67. (Всероссийская олимпиада, 2016) Известно, что a, b, c, $d>0$ и $a+b+c+d=3$.

а) Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

б) Докажите, что

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

в) Известно, что $x \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}+\frac{1}{c^x}+\frac{1}{d^x}+\left|\frac{(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})(1-\frac{1}{d}))}{2}\right|^x \leqslant \frac{1}{a^xb^xc^xd^x}.$$

68. Известно, что $a,b,c,d \geqslant 0$ и $a+b+c+d=4$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+4 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

69. Известно, что a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$, $a+b+c+d+e=20$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=100$. Найдите экстремальные значения выражения

$$abcd+abce+abde+acde+bcde.$$

70. Известно, что a, b, c, $d>0$ и $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Докажите, что

$$(a+b+c+d)(17+46abcd) \geqslant 252.$$

71. (APMO, 2004) Для вещественных чисел a, b, c докажите, что

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

72. (Иран, 2005) Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$. Докажите, что

$$ab+bc+ca \leqslant \frac{3}{2}.$$

Указание: Допустим противное, пусть $ab+bc+ca > \frac{3}{2}$. Покажите, что в этом случае выполнено неравенство $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}<2$.

73. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b, c радиус описанной окружности равен R. Докажите, что

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} > 5R.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{ab}{cR}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

Обозначим $x=\operatorname{ctg}\alpha$, $y=\operatorname{ctg}\beta$, $z=\operatorname{ctg}\gamma$. Тогда исходное неравенство переписывается в виде

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}>\frac{5}{2},$$

где x, y, $z \geqslant 0$ и $xy+xz+yz=1$. Это неравенство переписывается в виде

$$\frac{p^2+q}{pq-r}>\frac{5}{2},$$

при условии $q=1$. Зафиксируем p и q. Левая часть минимальна при минимальном r, то есть если $x=0$ или $x=y$.

1. Если $x=0$, то $yz=1$. Без ограничения общности $y \leqslant 1$. Тогда неравенство переписывается следующим образом: $(1-y)(5y^2-y+4)>0$, что верно.

2. Если $x=y$, то $z=\frac{1-x^2}{2x}$ и неравенство переписывается в виде

$$5x^3-9x^2+5x-1<0,$$

что верно, так как $x>1$.

74. (Shortlist IMO, 2011) Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, причём $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(a+c-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2} \geqslant \frac{3}{(abc)^2}.$$

Указание: Сделайте замену $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$, после чего можно будет несложно показать, что два из x, y, z равны, а значит, и два из чисел a, b, c

равны. Далее можно анализировать многочлены от одной переменной с помощью производной.

75. Назовём многочлен от трёх переменных $G(a, b, c)$ *циклическим*, если его значение не меняется при циклической перестановке переменных (то есть $G(a, b, c) = G(b, c, a) = G(c, a, b)$). Докажите, что любой циклический многочлен от a, b, c можно представить в виде $X(a, b, c) + Y(a, b, c)(l_{12} - l_{21})$, где X и Y — симметрические многочлены.

Указание: Если такие X, Y нашлись, то верно, что $G(a, b, c) = X + Y(l_{12} - l_{21})$, $G(b, a, c) = X - Y(l_{12} - l_{21})$, откуда видим, что если такие X, Y существуют, то они равны $\frac{G(a,b,c)+G(b,a,c)}{2}$ и $\frac{G(a,b,c)-G(b,a,c)}{2}(l_{12} - l_{21})$ соответственно. Докажите, что они и являются искомыми.

76. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{2}(ab + bc + ca)$. Докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant \frac{25}{8}(a^3b + b^3c + c^3a).$$

77. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leqslant 9.$$

78. Известно, что a, b, $c > 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + 3b^2}{a + 3b} + \frac{b^2 + 3c^2}{b + 3c} + \frac{c^2 + 3a^2}{c + 3a} \geqslant 3.$$

79. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$10(a + b + c)^5 \geqslant 81(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b + b^2c + c^2a + 7abc).$$

80. (Корея, 2012) Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2 = 2abc+1$. Найдите максимум выражения

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab).$$

Указание: Сделайте замену $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$.

81. Известно, что $a, b, c \in [0, 1]$ и $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = abc$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a + b + c}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

82. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$, $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ и $a + b + c \geqslant \sqrt{8}$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant 2 + \sqrt[3]{abc}.$$

83. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = 11(a+b+c-3)$. Докажите, что

$$\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2} \geqslant \sqrt{a+b+c+24}.$$

84. Известно, что a, b, $c > 0$, $abc = 1$. Докажите, что

а)

$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geqslant 3+45((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

б*)

$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geqslant 3+46((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

в) существует константа k такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+kn((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2);$$

г*) существует константа $k > 0$ такая, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+kn^2((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2),$$

но ни для какого $\varepsilon > 0$ не существует константы $k' > 0$ такой, что для любого натурального $n \geqslant 3$

$$a^n+b^n+c^n \geqslant 3+k'n^{2+\varepsilon}((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2).$$

85. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 84$, $(a+b+c)(ab+bc+ac) = \frac{14256}{abc}$. Найдите максимум выражения

$$(a+b+c)^2+(ab+bc+ac)^2+a^2b^2c^2.$$

86. Известно что a, b, c, $d \geqslant 0$, $a+b+c+d = 3$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 5$, $a^4+b^4+c^4+d^4 = 17$. Найдите максимально возможное значение d.