Вокруг теоремы Понселе
Решения.

1 Теорема Понселе для $n = 3, 4$

1. Проведем прямую через I и вершину C треугольника ABC и найдем вторую точку C' пересечения этой прямой с описанной около ABC окружностью (рис.1).

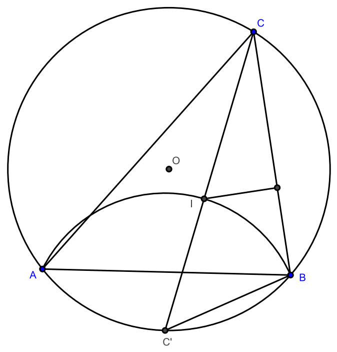

Рис.1

Так как $C'A = C'B$, $\angle AIB = \pi - (\angle A + \angle B)/2 = (\pi + \angle C)/2$ и $\angle AC'B = \pi - \angle C$, C' — центр окружности, описанной около треугольника AIB. Значит, $IC' = C'B = 2R \sin \frac{\angle C}{2}$. С другой стороны, $IC = r/\sin \frac{\angle C}{2}$, следовательно

$$R^2 - OI^2 = CI \cdot C'I = 2Rr.$$

2. Пусть дан треугольник ABC. Из произвольной точки C' на его описанной окружности проведем касательные к вписанной окружности треугольника и найдем вторые точки A', B' их пересечения с описанной окружностью. Надо показать, что прямая $A'B'$ также касается вписанной окружности.

Предположим противное. Например, пусть $A'B'$ не пересекает вписанной окружности треугольника ABC. Будем увеличивать угол $A'C'B'$, так чтобы прямая $C'I$ оставалась его биссектрисой. Тогда расстояние от I до прямых $C'A'$ и $C'B'$ будет увеличиваться, а до прямой $A'B'$ — уменьшаться, и в какой-то момент окружность с центром I и радиусом $r' > r$ окажется вписанной в треугольник $A'B'C'$. Но из формулы Эйлера следует, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ равны — противоречие. Случай, когда $A'B'$ пересекает вписанную окружность, рассматривается аналогично.

3. Проще всего воспользоваться **теоремой Фейербаха**, утверждающей, что окружность Эйлера, проходящая через середины A_0, B_0, C_0 треугольника ABC, касается его вписанной окружности. Из нее следует, что центр этой окружности, совпадающий с серединой отрезка OH, лежит на окружности с центром I и радиусом $R/2 - r$. Значит, точки M и H лежат на образах этой окружности при гомотетиях с центром O и коэффициентами $2/3$ и 2, соответственно.

Точка Жергонна также движется по окружности, причем эта окружность соосна с описанной и вписанной окружностями треугольника. Однако, простое геометрическое доказательство этого факта пока получить не удалось.

Точка Лемуана движется по эллипсу, малая ось которого лежит на прямой OI. Простое геометрическое доказательство этого факта также неизвестно.

4. Пусть A'', B'', C'' — вторые точки пересечения высот треугольника $A'B'C'$ с вписанной окружностью ABC. Тогда $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ — биссектрисы углов $A''B''C''$, т.е. ортоцентр H' треугольника $A'B'C'$ совпадает с центром вписанной окружности $A''B''C''$. Кроме того, нетрудно проверить, что стороны $A''B''C''$ параллельны соответствующим сторонам ABC, и значит эти треугольники гомотетичны. При этой гомотетии O переходит в I, а I — в H', следовательно, H' лежит на прямой OI и $IH'/OI = r/R$. Поэтому при вращении треугольника H', а значит и делящий отрезок $H'I$ в отношении $2:1$ центр тяжести $A'B'C'$ остается неподвижным.

5. **Ответ.** Пусть P' — точка, инверсная P относительно описанной окружности треугольника. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром P', переводящую P в I, и найдем образ Q точки I при этой гомотетии. Искомая траектория — окружность с центром Q (рис.2). Это можно доказать, используя комплексные числа. Геометрическое доказательство неизвестно.

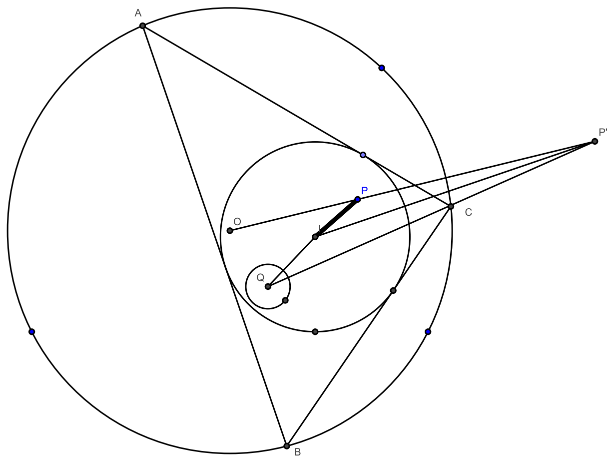

Рис.2

6. **Указание.** Прямая Симсона делит пополам отрезок между соответствующей точкой и ортоцентром H треугольника. Параллельная ей прямая, проходящая через H, вторично пересекает окружность, по которой движется H, в фиксированной точке (рис.3).

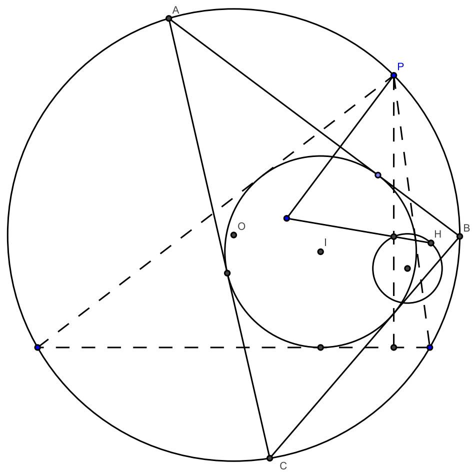

Рис.3

7.

а) Докажем более общее утверждение.

Даны две окружности, одна внутри другой. Из произвольной точки X внешней окружности проводятся касательные к внутренней и в образованный ими угол вписывается окружность, касающаяся внешней. Тогда геометрическое место центров таких окружностей — эллипс, фокусом которого является центр внешней окружности.

Доказательство. Пусть O, I — центры данных окружностей, Y — точка касания. Тогда все хорды XY пересекают прямую OI в одной точке - центре H гомотетии данных окружностей. Поскольку центр Z полувписанной окружности является точкой пересечения прямых OY и IX, он движется по эллипсу. Чтобы доказать, что O — фокус этого эллипса, сделаем полярное преобразование относительно окружности с центром O. Оно переведет точки I, H в параллельные прямые i, h, а точки X, Y — в касательные x, y к окружности, пересекающиеся в некоторой точке P прямой h. Пусть U, V — точки пересечения x и y с i, Q — вершина параллелограмма $PUQV$. Тогда Q лежит на прямой, симметричной h относительно i. Поскольку PQ — четвертая гармоническая к прямым x, y, h, она пересекает перпендикуляр из O к h в одной и той же точке — полюсе h. Сделав гомотетию с центром в этой точке, получим, что все прямые QU, QV (т.е. образы точек Z) касаются одной окружности.

Другое решение. Достаточно доказать, что все полувписанные окружности имеют общий радикальный центр L. Действительно, пусть p — степень L относительно всех окружностей. Тогда все они касаются образа Γ при инверсии с центром L и радиусом $sqrt|p|$ или композиции этой инверсии и симметрии с центром L при $p < 0$.

Зафиксируем внешнюю окружность Γ (с центром O и радиусом R), и центр I внутренней окружности γ (ее радиус r может меняться). Пусть $Z, A, B, C, D\Gamma$ таковы, что ZA, AB, BC, CD касаются γ. Пусть ω_A, ω_B, ω_C — полувписанные окружности треугольников ZAB, ABC, BCD, вписанные в углы A, B, C и касающиеся Γ в точках T_A, T_B, T_C соответственно. Докажем, что радикальный центр L окружностей ω_A, ω_B, ω_C лежит на IO (доказательство предложено С.Боевым). Тогда из соображений непрерывности будет следовать, что L — радикальный центр всех полувписанных окружностей.

Рассмотрим гомотетию h, переводящую γ в Γ. По теореме Монжа прямые AT_A, BT_B и CT_C пересекаются в центре T этой гомотетии. Значит, T, I и O лежат на одной прямой.

Пусть $Q_{AB} = AB \cap T_A T_B$, $Q_{BC} = BC \cap T_B T_C$. Заметим, что $Q_{AB}Q_{BC}$ — поляра T относительно Γ. Так как $T \in IO$, получаем, что $Q_{AB}Q_{BC} \perp IO$.

Пусть M_{AB}, M_{BC} — середины дуг AB, BC; P_{AB} — точка пересечения $T_A T_B$ с касательной к Γ в точке M_{AB}. Аналогично определим P_{BC}.

Радикальная ось $l(\omega_A, \omega_B)$ проходит через M_{AB} и точку пересечения касательных к Γ в точках T_A и T_B. Поэтому P_{AB} — полюс $l(\omega_A, \omega_B)$ относительно Γ. Аналогично P_{BC} — полюс радикальной оси $l(\omega_B, \omega_C)$ относительно Γ. Теперь $P_{AB}P_{BC}$ — поляра радикального центра L относительно Γ. Чтобы убедиться, что $L \in IO$, осталось показать, что $P_A P_C \parallel Q_A Q_C$.

Пусть X_{AB}, X_{BC} — точки касания ω_B с AB и BC. Заметим, что T_B, XAB, M_{AB} лежат на одной прямой, T_B, XBC, M_{BC} также лежат на одной прямой, и $\frac{T_B X_{BC}}{T_B M_{BC}} = \frac{T_B X_{AB}}{T_B M_{AB}}$, так как гомотетия с центром T_B переводит ω_B в Γ.

Получаем $\frac{T_B Q_{BC}}{T_B P_{BC}} = \frac{T_B X_{BC}}{T_B M_{BC}} = \frac{T_B X_{AB}}{T_B M_{AB}} = \frac{T_B Q_{AB}}{T_B P_{AB}}$, что завершает доказательство.

Рассмотрев симметричную относительно OI конфигурацию, получаем, что $\vec{OL} = \frac{2Rr}{R^2 - d^2 - r^2}\vec{OI}$, где $d = OI$.

b) Из предыдущего пункта получаем, что все полувписанные окружности касаются, помимо окружности с центром O еще одной окружности с центром в другом фокусе эллипса.

c) **Указание.** Геометрическим местом центров таких окружностей является эллипс с фокусами O и I.

8. **Указание.** Трилинейная поляра точки описанной окружности проходит через точку Лемуана L и вторично пересекает эллипс, по которому движется L в фиксированной точке (рис.4).

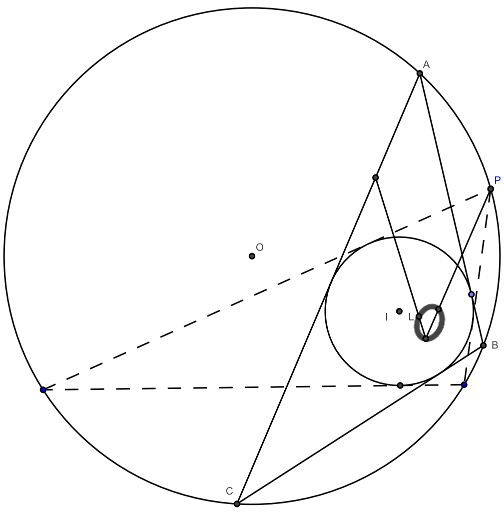

Рис.4

9. Пусть R, r — радиусы большей и меньшей окружностей, O — центр большей окружности, O' — центр описанной окружности треугольника ABI. Из условия следует, что O и O' лежат на серединном перпендикуляре к плоскости AB.

Дважды применим теорему косинусов — к треугольникам $AO'O$ и $OO'I$:

$$R^2 = O'A^2 + O'O^2 - 2O'A \cdot O'O \cos\angle AO'O$$

$$OI^2 = O'I^2 + O'O^2 - 2O'I \cdot O'O \cos\angle IO'O.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$R^2 - OI^2 = 2O'O(O'A\cos\angle AO'O - O'I\cos\angle IO'O = 2O'O\cdot r.$$

Следовательно, искомое ГМТ — окружность с центром O и радиусом $(R^2-OI^2)/2r$.

Другое решение. Зафиксируем внешнюю окружность Γ (с центром O и радиусом R), и центр I внутренней окружности γ (ее радиус r может меняться). Пусть $A, B, C \in \Gamma$ таковы, что AB и BC касаются γ. Пусть S и R — центры описанных окружностей треугольников AIB, BIC соответственно. Мы имеем $OS \perp AB$, $OR \perp BC$ и $SR \perp IB$ (так как SR — серединный перпендикуляр к IB). Поскольку $\angle(AB, BI) = \angle(IB, BC)$, получаем, что $\angle(OS, SR) = \angle(SR, RO)$, hence $OS = OR$.

Пусть $X, Y \in \Gamma$ и XY касается γ так, что $\angle(\vec{IX}, \vec{IY}) < \pi$. Определим отображение $g_r : \Gamma \to \Gamma$ так, что $g_r(X) = Y$. Пусть $S_r(X)$ — центр описанной окружности треугольника $XIg_r(X)$, а $OS_r(X) = \rho_r(X)$. Заметим, что $\rho_r(X)$ непрерывно зависит от (X, r).

Докажем, что $\rho_r(X) = \rho_r(g_r(X))$. Отсюда будет следовать, что $\rho_r(X)$ не зависит от X.

Назовем r *регулярным* если орбита $\{X, g_r(X), g_r^2(X), \ldots\}$ плотна в Γ. Для каждого регулярного r получаем, что $\rho_r(X)$ не зависит от X. Если r_0 не регулярно (случай траектории Понселе), представим $\rho_{r_0}(X) = \lim\limits_{r\to r_0} \rho_r(X)$, где r регулярны. Тогда $\rho_r(X)$ не зависит от X при всех r.

Рассмотрев симметричную относительно OI конфигурацию, получим, что $\rho_r(X) = \frac{R^2-d^2}{2r}$, где $d = OI$.

10. Пусть O, D — центры внешней и внутренней окружностей; R, r — их радиусы; A', B', C' — середины дуг BC, CA, AB; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда в треугольнике $A'B'C'$ I будет ортоцентром, а значит, $\vec{OI} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'}$. Следовательно, вектор $C'I$ лежит на прямой CD, а его длина равна $2R\sin\angle OA'B' = 2Rr/CD$. С другой стороны, $C'D = (R^2 - OD^2)/CD$, так что отношение $C'I/C'D$ не зависит от точки C. Но тогда и отношение DI/DC' не зависит от C, т.е. точка I лежит на окружности, гомотетичной внешней относительно D.

Другое решение. Зафиксируем внешнюю окружность Γ (с центром O и радиусом R), и центр I внутренней окружности γ (ее радиус r может меняться). Пусть $A, B, C \in \Gamma$ таковы, что AB, AC, BD касаются γ. Пусть AI и BI вторично пересекают Γ в точках A' и B' соответственно. Пусть S и R — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ABD соответсвенно. Мы имеем $B'R/B'I = B'A/B'I = \lambda = A'B/A'I = A'S/A'I$. Значит S и R лежат на образе Γ при гомотетии с центром I и коэффициентом $1-\lambda$.

Рассмотрев частый случай, найдем λ.

Теперь решение аналогично предыдущей задаче.

11. Пусть O — центр окружности, на которой лежит точка C, O' — центр другой окружности. Так как $OO' = \sqrt{3}$, прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C'. Следовательно, $\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, $\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$. Так как $O'A = OA'$, $AO'A'O$ — равнобокая трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$.

12. Пусть C — четвертая вершина прямоугольника $PACB$. Так как $OP^2 + OC^2 = OA^2 + OB^2$, C описывает окружность с центром O. Значит, середина отрезка AB описывает окружность, центром которой является середина OP, и инверсная к ней точка пересечения касательных также описывает окружность.

13. **Указание.** Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника с вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

14. **Ответ.**

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.$$

15. **Ответ.**

$$\frac{R+OP}{R-OP} = \frac{(R+d)^2}{(R-d)^2}.$$

16. Из формулы предыдущей задачи нетрудно получить, что P — предельная точка пучка, порожденного описанной и вписанной окружностями четырехугольника. Поэтому для любой точки X описанной окружности отношение расстояния XP к касательной из X к вписанной окружности будет одним и тем же. Утверждение задачи следует из этого факта и того, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон описанного четырехугольника с вписанной окружностью, проходят через точку пересечения диагоналей.

17. Точка M — середина отрезка между серединами диагоналей четырехугольника. Используя тот факт, что прямая, соединяющая середины диагоналей описанного четырехугольника, проходит через центр вписанной окружности, нетрудно вывести, что траектория M — окружность.

18.

a) Пусть U, V — середины диагоналей. Так как U, V лежат на окружности с диаметром OP, а прямая UV проходит через I, получаем

$$\mathrm{tg}\angle UPO\,\mathrm{tg}\angle VPO = \frac{UO\cdot VO}{UP\cdot VP} = \frac{S_{OUV}}{S_{PUV}} = \frac{OI}{IP} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-OP^2}}.$$

b) **Указание.** Длины диагоналей равны $2\sqrt{R^2-OP^2\sin^2\angle UPO}$ и $2\sqrt{R^2-OP^2\sin^2\angle VPO}$. Отсюда с учетом предыдущего пункта получаем, что произведение диагоналей равно $4R\sqrt{R^2-OP^2}$.

2 Теорема Понселе с алгебраической точки зрения

19.

a) Напишем уравнение прямой A_0A_1 и используем, что расстояние от точки $(d, 0)$ до этой прямой равно r. В результате получим

$$((R+d)^2 - r^2)t_0^2t_1^2 - r^2(t_0^2 + t_1^2) + 2(R^2 - d^2)t_0t_1 + ((R-d)^2 - r^2) = 0$$

b) **Указание.** Обозначим многочлен из предыдущего пункта через P_1. Исключив t_1 из системы $P_1(t_0, t_1) = 0$, $P_1(t_1, t_2) = 0$, получим многочлен от t_0, t_2, степень которого по каждой переменной равна 4. Разделив его на $(t_0 - t_2)^2$, получим искомое соотношение.

c) Действуя аналогично предыдущему пункту, по индукции получим искомое утверждение.

20. Пусть, начав из некоторой точки t_0, мы на n-ном шаге вернулись в нее. Это означает, что выполнена следующая система уравнений: $P_n(t_0, t_n) = 0$ $t_0 = t_n$. Подставив второе уравнение в первое, получаем уравнение степени, не выше 4 от одной переменной, t_0 является его корнем. Однако очевидно, что также его корнями являются также $t_1, t_2, \ldots$ и т. д. Однако если у полиномиального уравнения корней больше, чем его степень, то оно тождественно равно нулю, и все числа являются его корнями, что при $n \geq 5$ доказывает теорему Понселе.

21. **Указание.** Пусть хорды A_0A_1 и A_1A_2 касаются двух окружностей пучка. Написав соответствующие уравнения для параметров и исключив из них t_1, получим многочлен от t_0, t_2, степень которого по каждой переменной равна 4. Этот многочлен разлагается в произведение двух множителей, каждый из которых соответствует некоторой окружности пучка. Следовательно, A_0A_2 касается одной из двух окружностей, в зависимости от того, как выбирались исходные касательные. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущей задаче.

22. Введем обозначения $x_i = r_i/(R + d_i)$, $y_i = r_i/(R - d_i)$, где r_1, r_2 — радиусы окружностей, касающихся сторон и диагоналей, d_1, d_2 — расстояния от их центров до центра описанной окружности. Рассмотрев многоугольники, симметричные относительно линии центров, нетрудно получить соотношения

$$x_1 = (x_2^2 + y_2^2 - 1)/(1 - x_2^2 + y_2^2), \quad y_1 = (x_2^2 + y_2^2 - 1)/(1 + x_2^2 - y_2^2) \qquad (1).$$

решив эту систему относительно x_2, y_2, получим:

$$x_2 = \sqrt{(x_1(1 + y_1)/(x_1 + y_1))}, \quad y_2 = \sqrt{(y_1(1 + x_1)/(x_1 + y_1))} \qquad (2)$$

23.

a) Для $n = 3$ имеем формулу Эйлера: $1/r = 1/(R + d) + 1/(R - d)$, т.е. $x + y = 1$ или в параметрической форме $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $0 < t < \pi/4$. Для $n = 6$ из (2) получаем $x = \sin t \cdot \sqrt{1 + \cos^2 t}$, $y = \cos t \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t}$.

b) $x = \sqrt{\frac{\sin t \cdot (1+\cos t)}{(\sin t + \cos t)}}$, $y = \sqrt{\frac{\cos t \cdot (1+\sin t)}{(\sin t + \cos t)}}$.

c) Определив величины x_i, y_i и рассуждая, как при выводе формулы (1), получим:

$$x_2 = (x_1^2 + y_1^2 - 1)/(1 - x_1^2 + y_1^2), \quad y_2 = (x_1^2 + y_1^2 - 1)/(1 + x_1^2 - y_1^2)$$

$$x_1 = (1 - x_2^2 - y_2^2)/(1 - x_2^2 + y_2^2), \quad y_1 = (1 - x_2^2 - y_2^2)/(1 + x_2^2 - y_2^2)$$

Решив вторую пару уравнений относительно x_2, y_2, приравняв два выражения для x_2, возведя в квадрат и избавившись от знаменателя, получим (индекс 1 можно отбросить)

$$x(1-y)(1-x^2+y^2)^2-(x+y)(x^2+y^2-1)^2=0$$

Непосредственная проверка показывает, что это уравнение обращается в тождество при $x=-1$, $y=0$, $x+y=1$. Разделив на соответствующие множители, получим искомое соотношение:

$$(x+y-1)(x+y+1)^2=4xy(x+y)$$

24. При замене R на d и наоборот определенная выше величина x остается неизменной, а y меняет знак. Легко видеть, что, если пара (x,y) удовлетворяет условию замыкания на n-м шаге, то $(x,-y)$ удовлетворяет условию замыкания на $2n$-м, т.е. через какое-то число шагов k, являющееся делителем $2n$, ломаная замыкается. В силу симметричности этого утверждения k может равняться только $n/2$, n или $2n$.

25.

a) Пусть внешняя окружность рационально параметризована и $t_0, t_1, t_{-1}, \ldots$ – значения параметров, соответствующих вершинам многоугольника. Тогда из уравнения, связывающего t_0 и t_i по теореме Виета найдем t_i+t_{-i} и $t_i * t_{-i}$. Затем выразим через t_0 суммы координат соответствующих вершин и, просуммировав по i, найдем координаты центра тяжести. Они будут иметь вид $x=P(t_0)/Q(t_0)$, $y=R(t_0)/S(t_0)$.

Утверждение 1. $S=Q$ и $degQ=2n$. В самом деле, знаменатель рациональной функции определяется ее полюсами, центр тяжести уходит на бесконечность только если одна из точек n-угольника попала в одну из 2 бесконечных точек окружности. То есть Q и S имеют корни именно в этих $2n$ точках.

Теперь, выбрав параметризацию, добьемся, чтобы при t_0, стремящемся к бесконечности центр тяжести на бесконечность не уезжал. Если картинка действительная, то и выбирать нечего – любая параметризация с действительными коэффициентами подходит. Отсюда степени P и R не больше степени Q. Теперь посмотрим, в скольких точках наша кривая может пересекаться с произвольной прямой. Подставив в уравнение прямой рациональные функции степени $2n$ получим уравнение степени $2n$ на t_0, у него $2n$ корней, но каждой точке кривой соответствуют n значений параметра, значит точек на кривой две. (вариант рассуждения: функции степени $2n$ с совпадающими знаменателями параметризуют кривую степени $2n$, но кривая взята с кратностью n (мы нашу окружность на нее n раз намотали), посему степень 2) Итак, наша кривая с каждой прямой пересекается по 2 точкам, то есть она 2 порядка. Теперь посмотрим, где она пересекает бесконечно удаленную. Если $n-1$ точка стремятся к конечному пределу, а одна – к бесконечному, то центр тяжести едет на бесконечность в том же направлении. Итак, наша коника пересекает бесконечно удаленную прямую в тех же 2 точках, в которых ее пересекает любая окружность, а значит и она – окружность.

b) Если центр тяжести точек касания движется, то его траектория должна пересекать бесконечно удаленную прямую. Очевидно, это может происходить только тогда, когда на бесконечность уходит одна из точек касания. Но в бесконечно удаленных точках вписанная и описанная окружности пересекаются, следовательно, для того чтобы точка касания, например стороны A_1A_2 с вписанной окружностью, ушла на бесконечность, в ту же точку должен уходить один из концов этой стороны, например A_1, а значит, и точка касания с вписанной окружностью стороны A_1A_n. При этом обе точки касания движутся на бесконечность в противоположных направлениях, и поведение центра тяжести определяется поведением середины соединяющего их отрезка.

Воспользуемся теперь тем, что середина отрезка, соединяющего точки касания двух прямых с окружностью, является образом при инверсии относительно этой окружности точки пересечения этих прямых. Введя стандартную параметризацию описанной окружности и использовав хорошо известные формулы для инверсии, нетрудно убедиться, что когда точка A_1 стремится к бесконечности, ее инверсный образ стремится к некоторому конечному пределу. Таким образом, центр тяжести точек касания не уходит на бесконечность и, следовательно, остается неподвижным.

26.

a) Нет. Пусть t_a, t_b, t_c — значения параметра, соответствующие вершинам A, B, C треугольника. Координаты центра тяжести являются функциями параметра t_a, и условие попадания центра тяжести в данную точку дает уравнение относительно t_a. Поскольку t_b, t_c также являются корнями этого уравнения, его степень равна 3. Но кубическое уравнение с помощью циркуля и линейки решить нельзя.

b) Да. Центр тяжести M лежит на окружности, противоположными точками которой являются I и середина отрезка OP. Поэтому, перпендикуляр из M к прямой MI пересекает OI в середине OP, т.е. мы можем найти точку пересечения диагоналей P и определить радиусы описанной и вписанной окружностей. Далее, прямая MI пересекает окружность с диаметром OP в серединах диагоналей, что позволяет восстановить вершины четырехугольника.

27.

a) Очевидно, что, например, t_0 и t_1 связаны соответствием, которое алгебраично, симметрично и взаимнодвузначно. Поэтому все многочлены Виета можно выразить через t_0. Так как все эти функции обращаются в бесконечность в одних и тех же точках, любые две из них связаны линейным соотношением, т.е. каждый из многочленов Виета является линейной функцией σ_1. При этом четные многочлены являются четными функциями, а нечетные — нечетными, откуда и следует утверждение задачи.

28. Легко видеть, что верна следующая

Лемма. Даны три соосных окружности. Из произвольной точки C на одной из них проведены касательные CA, CB к двум другим. Точка D делит отрезок AB в фиксированном отношении. Тогда ГМТ D — окружность, соосная с данными.

Теперь утверждение задачи доказывается по индукции.

29.

30. Очевидно, что соотношение между d_1, d_2, d_3 является симметричным и имеет степень 2 по каждой переменной. Поэтому его можно записать в виде $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, где P — многочлен второй степени, а σ_1, σ_2, σ_3 — многочлены Виета от d_1, d_2, d_3. Далее, если одна из трех коник совпадает с внешней, то две другие совпадают друг с другом, поэтому при $d_3 = 0$ $P = (d_1 - d_2)^2$, т.е., с учетом симметричности $P = \sigma_3(a\sigma_3 + b\sigma_2 + c\sigma_1 + d) + \sigma_1^2 - 4\sigma_2$. Если подставить сюда $d_1 = d_2 = d_3 = t$, то получим уравнение относительно t 6 степени. Два из его корней равны нулю, а 4 остальных можно найти, исключая r из следующей системы: $t^2 = 1 - 2r$ (формула Эйлера для треугольника) $l^2 - 1 = (l - t)^2 - r^2$ (условие соосности), где l — абсцисса точки пересечения линии центров и радикальной оси.

В результате получаем

$$P = (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 8l\sigma_3 - 4\sigma_2$$

Литература

1. Заславский А.А., Челноков Г.Р. Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии. Математическое образование. 2001. N 4(19).

2. Заславский А., Косов Д., Музафаров М. Траектории замечательных точек треугольника Понселе. Квант. 2003. N 2.

3. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

4. V.Yu. Protasov. Generalized closing theorems. Elem.Math. 66 (2011) p.98-–117.