Вокруг теоремы Понселе

Е.Диомидов, А.Заславский, В.Калашников, П.Кожевников, Г.Челноков

В наиболее простой форме теорема Понселе утверждает следующее.

Теорема Понселе. Пусть даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из точки A_0 большей окружности Ω проведем касательную к меньшей ω и найдем вторую точку A_1 пересечения этой касательной с большей окружностью. По точке A_1 аналогично построим точку A_2 и т.д. Тогда, если $A_0 = A_n$ для какой-то точки A_0, это будет выполнено и для любой другой точки большой окружности

Говоря неформально, вписанно-описанный многоугольник[1] можно "вращать" между двумя окружностями (при этом его форма, вообще говоря, меняется). Будем называть такой "вращающийся" многоугольник *многоугольником Понселе*.

Целью данного проекта является доказательство теоремы Понселе и изучение свойств многоугольников Понселе, а также знакомство с обобщениями теоремы Понселе и некоторыми другими похожими теоремами.

1 Теорема Понселе для $n = 3, 4$

1. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r — их радиусы. Докажите **формулу Эйлера**

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

2. Докажите теорему Понселе для $n = 3$.

С каждым треугольников связан ряд так называемых замечательных точек или центров. Когда треугольник "вращается" между описанной и вписанной окружностями, эти точки движутся по каким-то кривым. В следующих задачах требуется найти соответствующие траектории.

3. Какую траекторию описывает

a) точка пересечения медиан M;

b) ортоцентр H;

c*) точка Жергонна G (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью)

d*) точка Лемуана L, изогонально сопряженная M.

треугольника Понселе?

4. Пусть A', B', C' — точки касания сторон треугольника Понселе с вписанной окружностью. Найдите траекторию центра тяжести M_0 треугольника $A'B'C'$.

5.* Дан треугольник Понселе и неподвижная точка P. Найдите траекторию точки, изогонально сопряженной P.

6.* Докажите, что для фиксированной точки X на Ω, ее прямая Симсона относительно треугольника Понселе проходит через фиксированную точку Y (причем, прямая ℓ, проходящая через Y перпендикулярно XY, касается ω).

7. Полувписанной окружностью треугольника ABC называется окружность, касающаяся сторон AC, BC и описанной окружности треугольника

a) Найдите траекторию центра полувписанной окружности.

[1] будем употреблять этот термин, хотя на самом деле в теореме Понселе возникает не многоугольник а замкнутая ломаная, возможно, самопересекающаяся

b) Докажите, что полувписанная окружность треугольника Понселе все время касается, помимо Ω, еще одной окружности.

c) Докажите аналогичное утверждение про окружности, проходящие через две вершины треугольника Понселе и касающиеся ω.

8*. Пусть дан треугольник ABC и точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают BC, CA, AB соответственно в точках A', B', C'. Тогда точки пересечения прямых $A'B'$ и AB, $B'C'$ и BC, $C'A'$ и CA лежат на одной прямой, которая называется *трилинейной полярой* X относительно ABC.

a) Докажите, что трилинейная поляра фиксированной точки X на Ω относительно треугольника Понселе проходит через фиксированную точку Y.

b) Найдите ГМТ $Y(X)$

9. Окружность с центром I лежит внутри другой окружности. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников IAB, где AB — хорда внешней окружности, касающаяся внутренней.

10. Даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников ABC, где AC и BC — хорды внешней окружности, касающиеся внутренней.

11. Две окружности радиуса 1 пересекаются в двух точках, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены ко второй касательные CA и CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B' и A'. Найдите расстояние AA'.

12. Дана окружность и точка P внутри нее. Рассмотрим пары перпендикулярных лучей с началом P, пересекающих окружность в точках A и B.

a) Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

b) Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в точках A и B.

13. Докажите теорему Понселе для $n = 4$.

14. Пусть две окружности с центрами O, I и радиусами R, r удовлетворяют теореме Понселе для $n = 4$. Выведите соотношение, связывающее величины R, r и $d = OI$.

15.

a) Докажите, что диагонали всех вписанно-описанных четырехугольников с данными вписанной и описанной окружностями пересекаются в одной точке P, лежащей на прямой OI.

b) Вывести соотношение, связывающее OP, R и d.

16. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон вписанно-описанного четырехугольника с вписанной окружностью, являются биссектрисами углов между его диагоналями.

17. Найдите траекторию центра тяжести M четырехугольника.

18*. Докажите, что в четырехугольнике Понселе

a) произведение тангенсов углов, образованных диагоналями с прямой OI;

b) произведение длин диагоналей

постоянно.

2 Теорема Понселе с алгебраической точки зрения

При $n > 4$ теорему Понселе также можно доказать геометрически. Но дальнейшее изучение многоугольников Понселе чисто геометрическими методами представляется затруднительным. Более эффективными оказываются средства алгебраической геометрии. Для начала покажем, как с помощью этих средств получить доказательство теоремы Понселе.

Введем на плоскости систему координат, начало которой совпадает с центром описанной окружности, а ось абсцисс - с линией центров. Пусть R, r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей, d - расстояние между их центрами, так что центр вписанной окружности имеет координаты $(d, 0)$. Координаты точек большой окружности можно задать формулами $x = R(1-t^2)/(1+t^2), y = R \cdot 2t/(1+t^2)$, причем соответствие между точками окружности и значениями t будет взаимнооднозначным, если считать, что точке $(-R, 0)$ соответствует $t = \infty$. Такой способ задания кривой называется ее рациональной параметризацией. Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ — значения параметра t, соответствующие вершинам многоугольника.

19.

a) Выведите соотношение, связывающее t_0 и t_1.

b) Выведите соотношение, связывающее t_0 и t_2.

c*) Докажите, что t_0 и t_n связаны соотношением $P_n(t_0, t_n) = 0$, где $P_n(x, y)$ — некоторый симметричный многочлен от двух переменных, степень которого по каждой переменной равна 2.

20. Докажите теорему Понселе.

Обобщенная теорема Понселе. Пусть внутри окружности Ω лежат окружности $\omega_1, \ldots, \omega_n$, причем все эти окружности соосны, т.е имеют общую радикальную ось. Если существует вписанный в Ω многоугольник $A_1 \ldots A_n$ такой, что A_1A_2 касается ω_1, A_2A_3 касается ω_2,...,A_nA_1 касается ω_n, то существует бесконечно много таких многоугольников.

21.

a) Докажите обобщенную теорему Понселе.

b) Докажите "совсем обобщенную" теорему Понселе, в которой вместо соосных окружностей берутся коники, проходящие через четыре данных точки.

Из обобщенной теоремы Понселе следует, что, если $A_1 \ldots A_n$ — многоугольник Понселе, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω, то его диагонали A_iA_{i+k} при фиксированном k касаются некоторой окружности, соосной с Ω и ω.

22. Пусть для многоугольника Понселе радиусы описанной и вписанной окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами d. Найдите радиус окружности, касающейся диагоналей A_iA_{i+2} и расстояние от ее центра до центра описанной окружности.

23. Выведите формулы, связывающие R, r и d для

a) шестиугольника;

b) восьмиугольника;

c) пятиугольника Понселе.

24. (С.Маркелов) Пусть R, r и d являются радиусами описанной и вписанной окружностей и расстоянием между их центрами для n-угольника Понселе. Докажите, что d, r и R также являются радиусами описанной и вписанной окружностей и расстоянием между их центрами для некоторого многоугольника Понселе, причем число его сторон равно либо n, либо $2n$, либо $n/2$.

25. Найдите траекторию

a) центра тяжести вершин;

b) центра тяжести точек касания вписанной окружности со сторонами многоугольника Понселе.

26. Даны центры описанной и вписанной окружностей и центр тяжести вершин вписанно-описанного n-угольника. Можно ли восстановить этот n-угольник с помощью циркуля и линейки при

a) $n = 3$?

b) $n = 4$?

27.

a) Пусть $t_1, \dots, t_n$ — значения параметра, соответствующие вершинам $A_1, \dots, A_n$ n-угольника Понселе; $\sigma_1 = t_1 + \dots + t_n$, $\sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + \dots + t_{n-1}t_n$,…,$\sigma_n = t_1 \cdots t_n$ — симметрические многочлены Виета от $t_1, \dots, t_n$. Докажите, что все четные многочлены Виета постоянны, а нечетные пропорциональны друг другу.

b) Пусть $d_1, \dots, d_n$ — длины касательных из вершин $A_1, \dots, A_n$ n-угольника Понселе к его вписанной окружности; $\sigma_1 = d_1 + \dots + d_n$, $\sigma_2 = d_1d_2 + d_1d_3 + \dots + d_{n-1}d_n$,…,$\sigma_n = d_1 \cdots d_n$ — симметрические многочлены Виета от $d_1, \dots, d_n$. Докажите, что все четные многочлены Виета постоянны, а нечетные пропорциональны друг другу.

28*. Даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Рассматриваются ломаные $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, вершины которых лежат на внешней окружности, а звенья касаются внутренней. Найдите геометрическое место центров тяжести точек касания.

29*. Определим прямую Симсона точки X относительно вписанного n-угольника по индукции как прямую, на которой лежат основания перпендикуляров из X на все прямые Симсона $(n-1)$-угольников, полученных выкидыванием каждой из вершин. Докажите, что для фиксированной точки X на Ω ее прямые Симсона относительно многоугольника Понселе проходят через фиксированную точку.

30. Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω радиуса 1, а прямые AB, BC, CA касаются окружностей ω_1, ω_2, ω_3, причем все эти окружности соосны. а расстояния от центров ω_1, ω_2, ω_3 до центра Ω равны d_1, d_2, d_3. Выведите соотношение между d_1, d_2, d_3.

3 Другие теоремы замыкания

Теорема Понселе является одним из примеров так называемых теорем замыкания. Приведем еще несколько примеров таких теорем.

Поризм Штейнера. Даны две окружности: α и лежащая внутри нее β. Рассмотрим цепочку окружностей $\omega_1, \omega_2, \dots$, касающихся α внутренним и β внешним образом, таких, что ω_{i+1} касается ω_i. Если при некотором выборе окружности ω_1 окружность ω_n ее касается, то это выполнено и при любой другой окружности ω_1.

Теорема о зигзаге. Даны две окружности: α и β. Возьмем произвольную точку A_0 на α и найдем на β такую точку B_0, что $A_0B_0 = 1$. Затем найдем на α отличную от A_0 точку A_1 такую, что $A_1B_0 = 1$ и т.д. Если точка A_n совпадает с A_0, то это же верно и для любой другой точки A_0.

Отметим, что теорема о зигзаге верна даже для окружностей, не лежащих в одной плоскости.

Теорема Эмха. Даны три окружности: α, лежащая внутри нее β и лежащая внутри β γ. Рассмотрим цепочку окружностей $\omega_1, \omega_2, \dots$, касающихся α внутренним и γ внешним образом, таких, что ω_{i+1} и ω_i пересекаются в точке, лежащей на β. Если при некотором выборе окружности ω_1 окружность ω_n ее касается, то это выполнено и при любой другой окружности ω_1.

Теорема о ломаной Брокара. Даны окружность ω, точка P внутри нее и угол ϕ. Для произвольной точки X_0 на ω построим такую точку X_1, что $\angle PX_0X_1 = \phi$. Аналогично по точке X_1 построим точку X_2 и т.д. Если для некоторой точки X_0 $X_n = X_0$, то это верно и для любой другой точки X_0.

Теорема Протасова. Пусть S_0, S_1, S_2 — три сферы в пространстве, центры которых не лежат на одной прямой. Рассмотрим семейство Σ сфер, касающихся S_1 и S_2 (сферы из Σ касаются каждой из сфер S_1, S_2 одинаковым образом — внутренним или внешним) и перпендикулярных S_0. Пусть ω — окружность в пространстве, не лежащая ни на какой сфере из Σ и не проходящая через точки, принадлежащие более, чем двум сферам из Σ. Для произвольной точки X_0 на ω возьмем проходящую через нее сферу $s_1 \in \Sigma$ и найдем вторую точку X_1 пересечения s_1 с ω. Возьмем отличную от s_1 сферу $s_2 \in \Sigma$, проходящую через X_1 и найдем вторую точку X_2 ее пересечения с ω и т.д. Если для некоторой точки X_0 $X_n = X_0$, то это верно и для любой другой точки X_0.

31. Докажите эти теоремы алгебраически.

Любая окружность на плоскости задается уравнением вида $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Поставим в соответствие такой окружности точку пространства с координатами (a, b, c).

32. Является ли это соответствие взаимнооднозначным?

33. Какие пары точек соответствуют двум касающимся окружностям?

34. Какие утверждения получаются при этом соответствии из теорем Штейнера и Эмха?

35. Выведите

a) Теорему Эмха и теорему о ломаной Брокара из теоремы Понселе.

b) Теорему Понселе, поризм Штейнера и теорему о зигзаге из теоремы Эмха.

36. Докажите теорему Протасова.

37. Выведите из теоремы Протасова теорему о зигзаге, теоремы Понселе и Эмха, поризм Штейнера.

Литература

1. Заславский А.А., Челноков Г.Р. Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии. Математическое образование. 2001. N 4(19).

2. Заславский А., Косов Д., Музафаров М. Траектории замечательных точек треугольника Понселе. Квант. 2003. N 2.

3. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

4. V.Yu. Protasov. Generalized closing theorems. Elem.Math. 66 (2011) p.98-–117.