Диофантовы уравнения–1

Теорема (Гаусс)**.** Натуральное число представимо в виде суммы трёх квадратов, если и только если оно не представимо в виде $4^n(8m-1)$.

Вводные задачи

Задача 1. Докажите, что уравнения a) $2x^2+2xy-y^2=1$, b) $x^2-xy+y^2=2$ не имеют решений в целых числах.

Задача 2. Докажите, что уравнения a) $x^2-2y^2=1$, b) $x^2-3y^2=1$, c) $x^2-6y^2=1$ имеют бесконечно много решений в целых числах.

Задача 3. Докажите, что уравнение $x^2+1000xy+1000y^2=2001$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Задача 4.* Фиксируем нечётное простое число p. Докажите, что уравнение $x^2-py^2=-1$ имеет решение в целых числах, если и только если p имеет остаток 1 при делении на 4.

Задача 5. Докажите, что для всякого m количества решений в целых числах уравнений

$$x^2-xy+y^2=m \quad \text{и} \quad 3x^2+9xy+7y^2=m$$

одинаковы.

Задача 6. Докажите, что для всякого целого числа n уравнение $x^2+y^2=n$ имеет решение в целых числах, если и только если оно имеет решения в рациональных числах.

Задача 7. Приведите пример квадратичного уравнения с целыми коэффициентами, имеющего решения в рациональных числах, но не имеющего решений в целых числах.

Задача 8. Докажите, что для любых целых положительных чисел a и b существует бесконечно много натуральных чисел m, для которых уравнение $ax^2+by^2=m$ не имеет решений в целых числах.

Задача 9. Докажите, что для всякого целого числа m уравнение $x^2+2y^2-3z^2=m$ имеет решение в целых числах.

Квадратичные формы

Квадратичная форма — это однородный многочлен степени 2. По определению, квадратичная форма f *представляет* число m, если уравнение $f=m$ имеет ненулевые решения в целых числах (тонкость: не всякая форма представляет 0). Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если они представляют одно и то же множество чисел.

Задача 10. Опишите все целые числа, которые представляются формами a) x^2+y^2; b) x^2-y^2; c)* x^2+xy+y^2.

Задача 11. Докажите, что квадратичные формы

$$f(x,y), \quad f(x-y,y), \quad f(x,y-x), \quad f(-x,y) \quad \text{и} \quad f(x,-y)$$

попарно эквивалентны.

Задача 12. a) Докажите, что формы $x^2 + y^2$ и $x^2 + xy + y^2$ не эквивалентны.

b) Докажите, что форма $4x^2 - 6xy + 5y^2$ не эквивалентна форме вида $ax^2 + by^2$ ни для каких целых чисел a и b.

Определение 1. Квадратичная форма называется

a) *положительно определённой*, если она представляет только положительные числа,

b) *неотрицательно определённой*, если она представляет только неотрицательные числа,

c) *неопределённой*, если она представляет и положительные, и отрицательные числа.

Задача 13. Приведите пример неотрицательно определённой формы, которая не является положительно определённой.

Расширенная арифметика: p-адические числа

Теорема (Лежандр)**.** Всякое положительное целое число представимо в виде суммы четырёх квадратов целых чисел.

Задача 14. Пусть m и n – целые числа, свободные от квадратов. Если уравнение

$$z^2 - mx^2 - ny^2 = 0 \tag{1}$$

имеет ненулевое решение в рациональных числах, то выполнены следующие условия

a) хотя бы одно из чисел m, n положительно,

b) m является квадратичным вычетом при делении на n,

c) n является квадратичным вычетом при делении на m.

Задача 15. Сведите метатеорему для двух переменных к решению уравнений вида (1).

Определение 2. Выражение вида

$$a_{-k}p^{-k} + a_{-k+1}p^{-k+1} + \ldots + a_n p^n + \ldots \tag{2}$$

(k — произвольное <u>целое</u> число, $a_i \in \mathbb{Z}$) называется *p-адическим числом.* Если $k \leqslant 0$, то мы называем (2) *целым* p-адическим числом.

Задача 16. Уравнение с целыми коэффициентами $f = 0$ имеет решение в $\mathbb{Z}_p$, если и только если оно имеет решение в остатках при делении на p^n для всякого $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Задача 17. Когда p-адическое число в форме (2) равно 0?

Задача 18. Докажите, что произведение двух ненулевых p-адических чисел не равно 0.

Задача 19. Докажите, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ для всякого простого числа p (докажите, что для всякой пары ненулевых целых чисел m, n существует p-адическое число x такое, что $nx = m$).

Задача 20. Докажите, что -1 является полным квадратом в p-адических числах тогда и только тогда, когда p имеет остаток 1 при делении на 4.

Задача 21. Придумайте описание для p-адических чисел, являющихся полными квадратами.

Задача 22. Докажите, что любое ненулевое 3-адическое число m есть или x^2, или $2x^2$, или $3x^2$, или $6x^2$ для какого-то 3-адического числа x.

Задача 23. Пусть p — нечётное простое число, а $x_1, \ldots, x_5$ — ненулевые p-адические числа. Докажите, что x_i/x_j есть полный квадрат в p-адических числах для каких-то i, j ($1 \leqslant i < j \leqslant 5$).

Задача 24. Докажите, что для всякого нечётного простого числа p существуют ненулевые p-адические числа $x_1, \ldots, x_{p-1}$ такие, что $x_1^2 + \ldots + x_{p-1}^2 + 1 = 0$.

Задача 25. Докажите, что уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ имеет ровно два решения в целых 7-адических числах.

Задача 26. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = -1$ имеет решения в p-адических числах для всякого нечётного простого числа p.

Теорема (Принцип Минковского-Хассе)**.** Квадратное уравнение $f = 0$ от нескольких переменных имеет решение в рациональных числах, если и только если оно одновременно имеет решения

- в вещественных числах,
- в p-адических числах ($:=\mathbb{Q}_p$) для всякого простого числа p.

Задача 27. Докажите принцип Минковского-Хассе для уравнений от одной и двух переменных.

Определение 3. Положим $(a, b)_p = 1$, если $z^2 - ax^2 - by^2 = 0$ имеет p-адические решения, и положим $(a, b)_p = -1$ иначе. Значение $(a, b)_p$ называется *символом Гильберта* пары (a, b) относительно простого числа p.

Задача 28. Докажите, что для символа Гильберта выполнены следующие соотношения

1) $(a, b)_p = (b, a)_p$, 2) $(a, c^2)_p = 1$,
3) $(a, -a)_p = 1, \quad (a, 1-a)_p = 1$, 4) $(a, b)_p = (a, -ab)_p = (a, (1-a)b)_p$.

Задача 29. Пусть $(a, b)_p = 1$. Тогда $(a', b)_p = (aa', b)_p$ для любого a'.

Определение 4. Чтобы компактно записать явную формулу для символа Гильберта, нам потребуется *символ Лежандра* $\left(\frac{x}{p}\right)$, определённый для любых целого x и простого p. Он равен 1, -1 или 0 в зависимости от того, является x ненулевым квадратичным вычетом, невычетом или нулём по модулю p. Для нечётного простого p символ Лежандра вычисляется по формуле

$$\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Задача 30. Пусть p – нечётное простое число, $a = p^\alpha u$, $b = p^\beta v$, где α, β, u, v – это целые числа такие, что u и v взаимно просты с p. Докажите, что

$$(a, b)_p = (-1)^{\alpha\beta\varepsilon(p)} \left(\frac{u}{p}\right)^\beta \left(\frac{v}{p}\right)^\alpha,$$

где $\varepsilon(p) := \frac{p-1}{2}$.

Задача 31. Найдите явную формулу для $(a, b)_2$ при всех целых числах a, b.

Задача 32. Докажите, что $(a, b)_p (a, b')_p = (a, bb')_p$ для любых целых чисел a, b, b'.

Задача 33. Докажите, что уравнение $ax^2 + by^2 = c$ (a, b, c – это параметры; x, y – это переменные) имеет решение в p-адических числах, если и только если $(c, -ab)_p = (a, b)_p$.

Задача 34.* Фиксируем однородный многочлен $f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 (n \geqslant 2)$, где $a_1, \ldots, a_n \neq 0$. Положим

$$d = a_1a_2 \ldots . a_n \quad \text{и} \quad \varepsilon = \prod_{i<j} (a_i, a_j)_p. \tag{3}$$

Докажите, что уравнение $f = 0$ имеет ненулевое решение в p-адических числах тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий

1) $n = 2$, а число $-d$ является полным квадратом в $\mathbb{Q}_p$;

2) $n = 3$ и $(-1, d)_p = \varepsilon$;

3) $n = 4$ и $d \neq \alpha^2$, или же $d = \alpha^2$ и $\varepsilon = (-1, -1)_p$;

4) $n \geqslant 5$. (т.е., если f зависит от 5 и более переменных, то уравнение $f = 0$ имеет ненулевое решение в $\mathbb{Q}_p$ для любого p.)

Выведите из задачи 34 следующее утверждение.

Задача 35. Фиксируем однородный многочлен $f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$ $(n \geqslant 2)$, где $a_1, \ldots, a_n \neq 0$, а также целое число $a \neq 0$. Определим d и ε формулой (3). Докажите, что уравнение $f = a$ имеет решение в p-адических числах тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $n = 1$, а число a/d является полным квадратом в $\mathbb{Q}_p$;

2) $n = 2$ и $(a, -d)_p = \varepsilon$;

3) $n = 3$ и: ad не является точным квадратом в $\mathbb{Q}_p$ или ad является точным квадратом и $\varepsilon = (-1, -d)_p$;

4) $n \geqslant 4$. (Т.е., если f зависит от 4 и более переменных, то уравнение $f = a$ имеет ненулевое решение в $\mathbb{Q}_p$ для любого p).

Задача 36. Докажите принцип Минковского-Хассе.

Задача 37. Используя задачу 35 и принцип Минковского-Хассе, докажите, что целое число n представимо в виде суммы трёх квадратов рациональных чисел, если и только если оно не представимо в виде $4^a(8b - 1)$, т.е. если $-n$ не является полным квадратом в $\mathbb{Q}_2$.

Задача 38. Фиксируем целое число n. Докажите, что если существуют рациональные числа x, y, z такие, что $x^2 + y^2 + z^2 = n$, то существуют и целые числа x', y', z' такие, что

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = n.$$

Выведите из этого утверждения теорему Гаусса.

Задача 39. Выведите из теоремы Гаусса теорему Лежандра.

Важные свойства символа Гильберта (ДУ-2)

Цель этого раздела — доказать, что для фиксированной пары ненулевых целых чисел (a, b) символ Гильберта $(a, b)_p$ равен 1 для почти всех (=всех, кроме конечного числа) простых чисел p. Как водится, это утверждение является частным случаем более общего утверждения.

Задача 40. a) Пусть f – это однородный многочлен степени n от k переменных, где $k > n$. Тогда число решений f (включая нулевое) в остатках при делении на p делится на p (Подсказка: примените малую теорему Ферма и рассмотрите случай $p = 2$).

b) Пусть f – это многочлен степени не более n от k переменных, где $k > n$. Тогда число решений уравнения $f = 0$ в остатках при делении на p делится на p.

Задача 41. Выведите из предыдущей задачи, что уравнение $ax^2+by^2+cz^2 = 0$ от переменных x, y, z имеет ненулевое решение в остатках при делении на p.

Задача 42. Выведите из предыдущей задачи, что для пары ненулевых целых чисел (a, b) и нечётного простого числа p символ Гильберта $(a, b)_p$ равен единице, если $a, b \not\vdots\, p$. Объясните, почему символ Гильберта $(a, b)_p$ равен 1 для почти всех p.

Задача 43. Выведите из задачи 41, что уравнение $ax^2+by^2+cz^2+dv^2+ew^2 = 0$ от переменных x, y, z, v, w (a, b, c, d, e – это целые параметры) имеет ненулевое решение в $\mathbb{Q}_p$ для всех простых чисел p.

Задача 44. Докажите, что для всякой пары ненулевых целых чисел (a, b) имеет место равенство

$$\prod_p (a, b)_p = (a, b)_{-1},$$

где произведение берётся по всем простым числам p, а

$$(a, b)_{-1} = \begin{cases} 1, & \text{если уравнение } z^2 - ax^2 - by^2 = 0 \text{ имеет решение в } \mathbb{R}, \\ -1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Имеет место следующий «далёкий аналог китайской теоремы об остатках»: оказывается, что по значениям символа Гильберта может быть построен элемент с данными значениями.

Задача 45. Зафиксируем конечный набор ненулевых целых чисел a_i и для каждого простого p зададим значения $\varepsilon_{i,p} = \pm 1$. Тогда система уравнений

$$(a_i, x)_p = \varepsilon_{i,p} \quad \forall i,\ \forall p,$$

имеет решение, если и только если

a) почти все (=все кроме конечного числа) $\varepsilon_{i,p} = 1$,

b) для каждого простого числа p существует ненулевое p-адическое число x_p такое, что

$$(a_i, x_p) = \varepsilon_{i,p}.$$

Уравнения от двух переменных и карты (ДУ-3)

Рассматривается уравнение

$$E_m: \quad ax^2 + bxy + cy^2 = m \tag{4}$$

от целых переменных x, y, где a, b, c, m — какие-то целые числа (параметры).

Задача 46 (Суперзадача)**.** Докажите, что если уравнение E_m имеет решения при каком-то положительном числе m, при каком-то отрицательном числе m и не имеет решений при $m = 0$, то для всякого m или E_m не имеет решений, или же E_m имеет бесконечно много решений.

Задача 47 (Суперзадача)**.** Верно ли, что если уравнение E_m имеет решения в целых числах при

$$m = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,$$

то E_m имеет решения при всяком целом числе m?

Задача 48 (Суперзадача)**.** Докажите, что если уравнения E_1, E_2, E_3, E_5 имеют решения в целых числах, то уравнение E_m имеет решения при каком-то $m < 0$.

Рисуем картинки

Задача 49. Покажите, что если $\{w_1, w_2\}$ — это базис $\mathbb{Z}^2$, то пары

$$\{w_2, w_1\},\ \{w_1 - w_2, w_2\},\ \{w_1 + w_2, w_2\},\ \{-w_1, w_2\} \tag{5}$$

также являются базисами $\mathbb{Z}^2$.

Задача 50. Покажите, что преобразованиями (5) можно из любого базиса получить любой другой.

Задача 51. Покажите, что квадратичная форма может записываться одинаково в нескольких разных базисах.

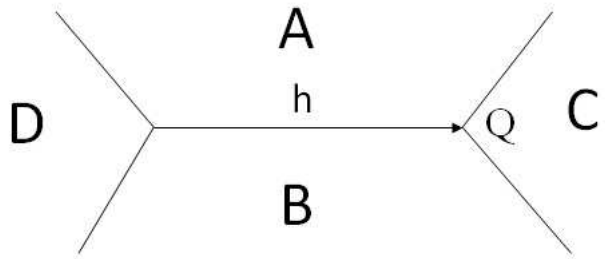
Задача 52. Укажите квадратичную форму, для которой любым двум разным базисам $\mathbb{Z}^2$ соответствуют различные квадратичные формы.

Упражнение 1. Выпишите все расширения данного базиса $\{w_1, w_2\}$. Выпишите все специализации данного супербазиса $\{\pm w_1,\ \pm w_2,\ \pm(w_1 + w_2)\}$.

Упражнение 2. Нарисуйте (ориентированные) карты для квадратичных форм

$$f_1 = 3x^2 + 9xy + 7y^2, \quad f_2 = x^2 - 2y^2, \quad f_3 = x^2 - 3y^2.$$

В следующих двух задачах числа A, B, C, D, h относятся к картинке



Задача 53. Покажите, что для чисел A, B, C, D, h выполнены соотношения:

$$C = A + B + h, \quad D = A + B - h.$$

Задача 54. Пусть A, B, C положительны, а ребро h направлено от C к D. Покажите, что тогда число D также положительно, а стрелки на двух остальных рёбрах, инцидентных вершине Q, направлены прочь от Q.

Задача 55. Докажите, что граф, задаваемый точками-супербазисами и рёбрами-базисами, является деревом, т.е. не содержит циклов.

Задача 56. Пусть Q — единственный колодец положительно определённой квадратичной формы f, а p, q, r — это числа, записанные в областях, примыкающих к Q. Покажите, что в любой другой области карты f написано число, большее, чем любое из чисел p, q, r.

Задача 57. Докажите, что всякая положительно определённая квадратичная форма обладает колодцем.

Задача 58. a) Докажите, что положительно определённая квадратичная форма имеет не более двух колодцев.

b) Укажите квадратичную форму, обладающую двумя колодцами.

Задача 59. Объясните, как решить уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = m$ (a, b, c, m — параметры, x, y, z — переменные) в предположении, что форма $ax^2+bxy+cz^2$ положительно определена.

Задача 60 (Классификация положительно определённых квадратичных форм)**.**
a) Покажите, что каждая положительно определённая квадратичная форма эквивалентна квадратичной форме вида

$$(p+q)x^2 + 2qxy + (q+r)y^2 \tag{6}$$

для какого-то набора положительных чисел p, q, r.

b) Покажите, что две квадратичные формы, соответствующие наборам

$$(p_1, q_1, r_1) \text{ и } (p_2, q_2, r_2),$$

эквивалентны тогда и только тогда, когда эти наборы совпадают как множества.

c) Определите, какие наборы (p, q, r) задают целую квадратичную форму.

d) Определите, какие наборы (p, q, r) задают положительно определённую квадратичную форму.

Часть 3: Малая мафусаилова форма

Целью этой части является доказательство следующей теоремы.

Теорема (Конвей)**.** Малая мафусаилова форма $x^2 + 2y^2 + yz + 4z^2$ представляет все числа от 1 до 30. Всякая другая положительно определённая форма f, представляющая все числа от 1 до 30, эквивалентна с точностью до линейной замены малой мафусаиловой форме.

Для того, чтобы доказать теорему Конвея, мы предлагаем участникам развить теорию положительно определённых квадратичных форм от трёх переменных, отталкиваясь от теории положительно определённых форм от двух переменных.

Начнём мы с проработки новой точки зрения на положительно определённые квадратичные формы от двух переменных. Пусть $f(x, y) = ax^2+bxy+cy^2$ – это некоторая положительно определённая квадратичная форма. Мы будем задавать такую форму с помощью таблиц 2x2 и 3x3

$$F := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \quad \hat{F} := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & -(a+\frac{b}{2}) \\ \frac{b}{2} & c & -(c+\frac{b}{2}) \\ -(a+\frac{b}{2}) & -(c+\frac{b}{2}) & (a+b+c) \end{pmatrix}.$$

Задача 61. Докажите, что

$$f(x, y) = -\frac{b}{2}(x - y)^2 + (a + \frac{b}{2})x^2 + (c + \frac{b}{2})y^2. \tag{7}$$

Задача 62. Докажите, что таблицы

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \tag{8}$$

задают эквивалентные квадратичные формы.

Задача 63. Докажите, что квадратичные формы, соответствующие таблицам

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -(a+\frac{b}{2}) \\ -(a+\frac{b}{2}) & a+b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & -(c+\frac{b}{2}) \\ -(c+\frac{b}{2}) & a+b+c \end{pmatrix}, \tag{9}$$

эквивалентны (заметим, что все таблицы (9) получаются из $\hat{F}$ выбором 2 строк и 2 соответствующих им столбцов).

Далее мы отождествляем квадратичную форму f с её таблицами F и $\hat{F}$.

Задача 64. Используя (8) и (9), докажите что всякая положительно определённая квадратичная форма эквивалентна форме

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix},$$

для которой $0 \leqslant -b' \leqslant a' \leqslant c'$. Для формы такого вида правая часть (7) представляет собой сумму трёх неотрицательных чисел.

Задача 64 является аналогом задачи 60 второй части проекта. Мы хотим доказать аналог задачи 64 для квадратичных форм от трёх переменных. Мы будем действовать по той же схеме, но нам потребуется больше обозначений. Фиксируем квадратичную форму

$$f(x,y,z) = a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{xy}xy + a_{yz}yz + a_{xz}xz.$$

Мы будем задавать такую форму с помощью следующих таблиц 3x3 и 4x4

$$F := \begin{pmatrix} a_{xx} & \frac{a_{xy}}{2} & \frac{a_{xz}}{2} \\ \frac{a_{xy}}{2} & a_{yy} & \frac{a_{yz}}{2} \\ \frac{a_{xz}}{2} & \frac{a_{yz}}{2} & a_{zz} \end{pmatrix},$$

$$\hat{F} := \begin{pmatrix} a_{xx} & \frac{a_{xy}}{2} & \frac{a_{xz}}{2} & -(a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2}) \\ \frac{a_{xy}}{2} & a_{yy} & \frac{a_{yz}}{2} & -(a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) \\ \frac{a_{xz}}{2} & \frac{a_{yz}}{2} & a_{zz} & -(a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) \\ -(a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2}) & -(a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) & -(a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) & \begin{matrix} a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + \\ + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2} + \frac{a_{xz}}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Задача 65. Докажите, что

$$f(x,y,z) = -\frac{a_{xy}}{2}(x-y)^2 - \frac{a_{xz}}{2}(x-z)^2 - \frac{a_{yz}}{2}(y-z)^2 + \\ + (a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2})x^2 + (a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2})y^2 + (a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2})z^2. \quad (10)$$

Задача 66. Докажите, что квадратичные формы, соответствующие таблицам

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & \frac{a_{xy}}{2} & \frac{a_{xz}}{2} \\ \frac{a_{xy}}{2} & a_{yy} & \frac{a_{yz}}{2} \\ \frac{a_{xz}}{2} & \frac{a_{yz}}{2} & a_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{xx} & \frac{a_{xy}}{2} & -(a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2}) \\ \frac{a_{xy}}{2} & a_{yy} & -(a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) \\ -(a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2}) & -(a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) & \begin{matrix} a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + \\ + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2} + \frac{a_{xz}}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & \frac{a_{xz}}{2} & -(a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2}) \\ \frac{a_{xz}}{2} & a_{zz} & -(a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) \\ -(a_{xx} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{xz}}{2}) & -(a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) & \begin{matrix} a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + \\ + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2} + \frac{a_{xz}}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} a_{yy} & \frac{a_{yz}}{2} & -(a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) \\ \frac{a_{yz}}{2} & a_{zz} & -(a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) \\ -(a_{yy} + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) & -(a_{zz} + \frac{a_{xz}}{2} + \frac{a_{yz}}{2}) & \begin{matrix} a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + \\ + \frac{a_{xy}}{2} + \frac{a_{yz}}{2} + \frac{a_{xz}}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

эквивалентны (заметим, что все таблицы (13) получаются из $\hat{F}$ выбором 3 строк и 3 соответствующих им столбцов).

Далее мы отождествляем квадратичную форму f с её таблицами F и $\hat{F}$.

Задача 67. Используя (13), докажите что всякая положительно определённая квадратичная форма эквивалентна форме

$$\begin{pmatrix} a'_{xx} & \frac{a'_{xy}}{2} & \frac{a'_{xz}}{2} \\ \frac{a'_{xy}}{2} & a'_{yy} & \frac{a'_{yz}}{2} \\ \frac{a'_{xz}}{2} & \frac{a'_{yz}}{2} & a'_{zz} \end{pmatrix},$$

для которой

$$0 < a'_{xx} \leqslant a'_{yy} \leqslant a'_{zz},$$

$$|a'_{xy}|, |a'_{xz}| \leqslant |a'_{xx}|, |a'_{yz}| \leqslant |a'_{zz}|.$$

Задача 68. Используя задачу (67), докажите, что всякая положительно определённая квадратичная форма $f(x, y, z)$ эквивалентна квадратичной форме f' с таблицей 4x4

$$\hat{F} := \begin{pmatrix} a'_{xx} & \frac{a'_{xy}}{2} & \frac{a'_{xz}}{2} & -(a'_{xx} + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{xz}}{2}) \\ \frac{a'_{xy}}{2} & a'_{yy} & \frac{a'_{yz}}{2} & -(a'_{yy} + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2}) \\ \frac{a'_{xz}}{2} & \frac{a'_{yz}}{2} & a'_{zz} & -(a'_{zz} + \frac{a'_{xz}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2}) \\ -(a'_{xx} + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{xz}}{2}) & -(a'_{yy} + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2}) & -(a'_{zz} + \frac{a'_{xz}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2}) & \begin{matrix} a'_{xx} + a'_{yy} + a'_{zz} + \\ + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2} + \frac{a'_{xz}}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

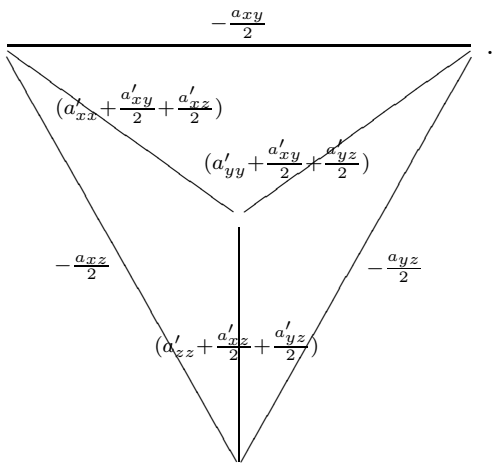
для которой

$$a'_{xy},\ a'_{yz},\ a'_{xz} \leqslant 0, \tag{15}$$

$$(a'_{xx} + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{xz}}{2}) \geqslant 0,\ (a'_{yy} + \frac{a'_{xy}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2}) \geqslant 0,\ (a'_{zz} + \frac{a'_{xz}}{2} + \frac{a'_{yz}}{2}) \geqslant 0. \tag{16}$$

Для формы такого вида правая часть (10) представляет собой сумму положительных квадратов.

Квадратичные формы, соответствующие таблице (14), удовлетворяющей условиям (16), мы будем изображать с помощью графа на четырёх вершинах, как показано на рисунке

$\mathcal{F} =$ 

.

Если на каком-то ребре написано число 0, то это ребро стирается.

Задача 69. Докажите, что если на рисунке $\mathcal{F}$, построенном по квадратичной форме f, присутствуют все рёбра, то форма f не представляет 1.

Задача 70. Докажите, что если на рисунке $\mathcal{F}$ формы f есть вершина, не соединённая ребрами с 2 другими вершинами, то f эквивалентна форме вида

$$ax^2 + g(y, z) \tag{17}$$

для какого-то положительного целого числа a и положительно определённой квадратичной формы g.

Задача 71. Докажите, что если форма f вида (17) представляет все числа от 1 до 30, то она эквивалентна малой мафусаиловой форме.

Назовём форму $f(x, y)$, в каком-то рисунке которой каждая вершина соединена с 2 или более рёбрами, *неразложимой*.

Задача 72. Опишите рисунки всех неразложимых квадратичных форм $f(x, y, z)$, представляющих числа

a) 1;
b) 1, 2;
c) 1, 2, 3, 5.

Задача 73. Завершите доказательство теоремы Конвея.