Равновесия Нэша

Владимир Гурвич

1. Предварительное обсуждение

Что общего у шашек, шахмат, го и крестиков-ноликов на ограниченной доске? Это все конечные позиционные игры с полной информацией. С полной информацией — значит, что вся информация известна всем игрокам (в картах это не так) и нет скрытой информации (нерозданных карт или непредсказуемых бросков костей). Позиционные — значит ходы ведут из позиции в позицию. Конечные — значит, число позиций конечно, игра начинается с некоторой начальной позиции, и заканчивается в какой-то из конечных позиций (например, в шахматах — позицией с патом, матом, голыми королями или повторением позиции). Эта конечная позиция и определяет, кто выиграл и с каким счетом (каждую игру можно сделать игрой на счет, например, начисляя 1 за победу, 0 за ничью и -1 за поражение). Кроме того, все эти игры — антагонистические для двух участников. Антагонистические — значит выигрыш одного является проигрышем другого, и если один сколько-то очков выигрывает, то другой — проигрывает. Анализом с конца легко доказать, что при этих условиях у каждого из игроков есть оптимальная стратегия и оптимальный результат. Игра по оптимальной стратегии гарантирует результат не хуже оптимального. При этом нет стратегии, добивающейся большего с гарантией, то есть при любой игре противника. В антагонистических играх оптимальные результаты противников противоположны, в игре на счет их сумма равна нулю. Игра обоих по оптимальной стратегии создает «равновесие»: отклонение одного из игроков от этой стратегии не может принести ему выгоды. Ситуация заметно усложняется, если игроков больше двух. Может оказаться, что каждому не гарантирован никакой результат, кроме наихудшего ввиду невозможности противостоять сговору остальных.

Упражнение. На столе лежат 10 спичек. Трое игроков берут спички по очереди, от 1 до 5 за ход. Взявший последнюю спичку идет мыть посуду. Докажите, что сговорившись, любые двое могут послать мыть посуду третьего.

Давайте за мытье посуды начислять -2, а остальным по $+1$. Сумма в любой партии равна 0, однако сумма оптимальных результатов равна -6. Хочется, однако, устроить какой-то аналог равновесия и для троих: предложить игрокам три такие стратегии, которым они захотят следовать. Для этого достаточно, чтобы отклонившийся был наказан: если он не следует указанной стратегии, а остальные двое следуют, то он получит меньше (или не больше).

Упражнение. Придумайте три такие стратегии для данной игры. Набор стратегий, где единственный отклонившийся не выигрывает называется равновесием Нэша (это определение годится и для неантагонистических игр). Наша задача состоит в том, чтобы разобраться, для каких игр равновесия Нэша есть (и какие), а для каких — нет.

Равновесия Нэша можно описать как правила, о соблюдении которых можно договориться даже без механизма внешнего принуждения.

Упражнение. «Встреча в супермаркете». Два (или три) человека потерялись в супермаркете, мобильные телефоны сеть не ловят... Они могут встречаться у одного из трёх выходов, каждый выбирает куда идти независимо и не зная выбор остальных. Если все встретились, каждый получает выигрыш $+1$, иначе каждый получает -1. Какие равновесия Нэша в этой игре?
Примечание. Эта игра задана в так называемой нормальной форме (все игроки одновременно делают выбор, не зная выбор друг друга; после этого по выбору всех игроков определяются выигрыши).
Примечание 2. В некоторых супермаркетах вешают большие таблички «потерявшимся встречаться у первой кассы».

Упражнение. Есть ли равновесия Нэша в крестиках-ноликах 3 на 3? Опишите их.

Оказывается, что для ациклических игр (то есть игр, где позиции не повторяются), хотя бы одно равновесие Нэша всегда есть (даже если участников не два, а больше). Вы сами сможете это легко доказать. Давайте свяжем с игрой ориентированный граф: позиции будут вершинами, а ходы — ориентированными ребрами (стрелками). Позиции, из которых нет ходов — конечные, каждой приписан набор очков, который получат игроки при ходе в эту позицию. Остальные позиции поделены между игроками, для каждой известно, кто из нее должен ходить. Пусть из позиции П все ходы ведут в конечные, и игрок выберает наиболее выгодный для него ход в некоторую позицию Т. Очки из Т можно перенести в П. Теперь и П стала определенной, как бы конечной. Так анализом с конца делаем все позиции определенными, в том числе начальную. Оптимальная стратегия состоит в ходе игрока в такую позицию, где его выплата максимальна.

Упражнение. Докажите, что для любой ациклической игры указанные оптимальные стратегии образуют равновесие Нэша.

Давайте построим теперь граф игры в шахматах. Мы уже понимаем, что позиция — это не просто расстановка фигур, она должна включать в себя еще и очередь хода. Кроме того, полезно знать, есть ли право рокировки, взятия на проходе, повторялась ли позиция раньше. Один из выходов снабдить позицию нужной информацией — запоминать ее вместе с предысторией. Тогда повторяющихся позиций точно не будет, граф ациклический, и нем для обоих игроков есть оптимальная стратегия. Но такое понимание позиции для нас неинтересно. Правило троекратного повторения позиции подразумевает под позицией нечто другое. А именно, расстановка фигур, очередь хода, есть ли право рокировки, взятия на проходе. Тогда в графе есть ориентированные циклы, и анализ с конца уже не действует. Уточним понятие стратегии. Назовем стационарной стратегией данного игрока правило, выбирающее один определенный ход в каждой позиции с его ходом. Например, в игре в спички жадная стратегия предписывает каждый раз брать максимально возможное количество спичек. Заметим, что стационарная стратегия не зависит от предыстории, поэтому если каждый играет по стационарной стратегии, то при повторении позиции игра зацикливается. Понятно, что в шахматах зацикливание означает ничью. Можно, однако договорится, что циклы тоже имеют свою цену (например, при зацикливании все проигрывают). В играх с циклами про равновесие Нэша мало что известно.

Упражнение. Есть ли равновесие Нэша в шахматах? А если убрать правила про ничью при троекратном повторе позиции или после 50 ходов без взятий и передвижений пешек?

До сих пор мы рассматривали только терминальные игры, когда результат игры (платежи) определяется только конечной позицией или циклом. В некоторых играх, помимо этого, игрок получает или платит еще и за каждый ход, а окончательный результат игры определяется для него суммой всех платежей.

Упражнение. На столе лежат 5 спичек. Трое игроков берут спички по очереди 1 или 2 спички. Взявший последнюю спичку получает премию из 3 спичек. Число заработанных очков равно числу спичек. Постройте граф игры и найдите для всех оптимальные стратегии. Если игра заканчивается циклом, то мы предполагаем, что цикл проходится бесконечно много раз. Тогда результат игрока будет конечен, только если сумма его платежей по циклу равна 0. Иначе результат равен плюс или минус бесконечности.

В этой игре очевидно, сумма оптимальных результатов равна -3.

Упражнение. 100 кровожадных отморозков ограбили банк на миллион долларов и уселись в ряд за стол делить деньги. Сначала первый предлагает, кому сколько: мне столько-то, второму столько-то и т.д. (каждому —- целое число долларов), и все 100 голосуют. Если «за» не менее половины, то предложение принимается, каждый получает предложенную долю, и все расходятся. Если более половины голосуют «против», первого убивают, и тогда уже второй отморозок предлагает на тех же условиях кому сколько, и т.д. Каждый отморозок руководствуется в первую очередь желанием выжить, во вторую (если жизнь вне опасности) — получить побольше денег, в третью (если на жизнь и сумму это не влияет) —- убить как можно больше (а то ведь подстерегут в темном переулке!). Как распределятся деньги, если все отморозки будут действовать и рассуждать абсолютно логически? (то есть, найдите равновесие Нэша)

2. Введение «без строгих определений»

Мы рассмотрим следующий вопрос: Какие конечные позиционные игры с полной информацией имеют равновеся Нэша в чистых стационарных стратегиях? В некоторых случаях ответ хорошо известен. Дадим сначала небольшой обзор, откладывая точные определения до следующего параграфа. Равновесие Нэша существует для таких классов:

А. Ациклические игры. В них позиции не могут повторяться. В этом случае равновесие всегда имеется. Однако, уже в Шахматах, или даже в Го, повторения позиции возможны.

Б. Антагонистические игры двух лиц. Этот класс включает и Го, и Шахматы. Но что если интересы двух игроков непротивоположны? или число игроков больше двух?

В. Если ходы игроков могут зависеть от предыстории. Мы, однако, ограничиваем себя (и игроков) чистыми стационарными стратегиями. Иными словами, ход может зависеть только от текущей позиции, но не от предшествующих, и выбирается он детерминировано, без всякой рандомизации. Например, Нарды, исключаются.

Заметим, впрочем, что в рассмотренных случаях А, Б, и В равновесие существует даже и при наличии случайных ходов.

Известно, однако, что равновесий может не быть в играх с неполной информацией (карточные игры или Домино). Но мы таких игр не рассматриваем и даже определять их не будем.

Резюмируем:

Мы ограничимся играми с полной информацией, без случайных ходов и чистыми стационарными стратегиями. При этом игроков может быть более двух, и даже если два, их интересы не обязательно противоположны.

Удивительно, но в этом случае мало что известно. Есть несколько концепций решения, простейшей из которых является несомненно равновесие Нэша. (Мы определим его ниже.) Хотя за работы о равновесиях Нэша было выдано пять нобелевских премий по экономике, но мне кажется, что наиболее «простые» и естественные математические вопросы до сих пор открыты. Здесь я предлагаю два таких вопроса-гипотезы. Они проверены, с помощью компьютера, для достаточно (но не чрезмерно) больших примеров. Я надеюсь на положительные ответы, но не удивлюсь и контрпримерам.

У этих гипотез есть относительно простые частные случаи, на которых можно будет упражняться. Впрочем, другие частные случаи довольно сложны, а для некоторых ответ неизвестен, как и в общем случае.

3. Основные определения

Мне кажется, что большинство из них интуитивно очевидно. Однако, формализм может и «напугать» кого-то. Если так, то пропустите этот параграф при первом чтении и используйте его потом как словарь или справочник.

Граф игры, позиции и ходы.

Дан конечный ориентированный граф (орграф) $G = (V, E)$. Каждая его вершины $v \in V$ — позизия игры, а ориентированное ребро $e = (v, v')$ — возможный ход в позиции v. Позизии, $V_T \subset V$, в которых вообще нет ходов, называются терминальными. Выберем также начальную позицию $v_0 \in V \setminus V_T$.

Каждой нетерминальной позиции $v \in V \setminus V_T$ поставим в соответствие игрока $i \in I = \{1, \dots, n\}$, который выбирает ход в позиции v. Будем говорить, что i контролирует v и писать $i = \phi(v)$; иными словами, отображение $\phi : V \setminus V_T \to I$ распределяет нетерминальные позиции по игрокам.

Тройка $\{G, \phi, v_0\}$ называется позиционной структурой.

Стратегии и ситуации.

Стратегия x_i игрока $i \in I$ — это план, выбирающий ход $e = (v, v')$ в любой позиции $v \in \phi^{-1}(i)$, контролируемой i, иными словами, — отображение x_i, ставит в соответствие каждой позиции $v \in \phi^{-1}(i)$ некоторый ход $e = (v, v')$ из v. Это — так называемые *чистые стационарные стратегии.* Как уже говорилось, других мы ни рассматривать, ни даже определять, не будем.

Партии. Пусть каждый игрок i выберет стратегию x_i. Полученный набор $x = (x_1, \dots, x_n)$ называется *профилем стратегий* или *ситуацией.* Каждая такая ситуация однозначно определяет партию $p(x)$, поскольку каждый игрок $i \in I$ в каждой своей позиции $v \in \phi^{-1}(i)$ знает, какой ход ему делать (тот, который предписывает его стратегия x_i). Партия $p(x)$ начинается в v_0 и либо заканчивается в одном из терминалов $v \in V_T$ либо "зацикливается", т. е. возникает ориентированный цикл C, который затем повторяется бесконечно. (Партия $p(x)$ уйти с C не может, так как все стратегии стационарны.)

Таким образом, мы получаем отображение $g : X \to P$, которое каждой ситуации $x \in X$ ставит в соответствие партию $p \in P$. Такие отображения называются игровыми формами

Функции стоимости.

Каждый игрок $i \in I$ за каждый ход $e \in E$ платит $c(i, e) \in \mathcal{R}$. Это вещественное число называется *локальной стоимостью.* (Если $c(i, e) < 0$, то i не платит, а наоборот, получает $|c(i, e)|$.)

Позиционная структура и локальный платеж определяют игру в позиционной форме.

Эффективная стоимость партии $p = p(x)$ определяется для каждого игрока $i \in I$ так. Если p заканчивается в терминале $v \in V_T$, то ее стоимость $c(i, p) = \sum_{e \in p} c(i, e)$ аддитивна, т.е. равна сумме стоимостей всех ходов p. Если же p зацикливается, то надо вычислить стоимость $c(i, C) = \sum_{e \in C} c(i, e)$ соответствующего цикла C для i. Если $c(i, C) \geq 0$, то $c(i, p) = \infty$ и $c(i, p) = -\infty$, если $c(i, C) < 0$.

Такое определение естественно, поскольку цикл проходится неограниченное число раз, а локальные стоимости суммируются. Однако, для если партия p зацикливается на «нулевом цикле», $c(i, C) = 0$, мы всё равно полагаем $c(i, p) = \infty$. Это всего лишь удобное соглашение.

Игровая форма g и эффективная стоимость c определяют игру (g, c) в нормальной форме.

Естественно, каждый игрок i пытается *минимизировать* свою эффективную стоимость $c(i, p)$.

Терминальные игры. Ход $e = (v, v')$ называется *терминальным,* если $v' \in V_T$ — терминальна. Заметим, что терминальный ход не может принадлежать никакому циклу. Функция стоимости c (и сама игра) называется *терминальной,* если $c(i, e) \equiv 0$ для любого игрока i и *нетерминального* хода e. В этом случае, стоимость партии p зависит только от её терминальной позиции. Если же партия p зацикливается, то её стоимость по определению равна $+$ или $-\infty$.

Игры с нулевой суммой. Говорят, что функция стоимости c (и сама игра) имеют *нулевую сумму,* если $\sum_{i \in I} c(i, e) = 0$ для любого хода $e \in E$. Игры двух лиц, $n = 2$, с нулевой суммой играют очень важную роль, как исторически, так и по существу.

Любую игру n лиц легко превратить в игру $n + 1$ лиц с нулевой суммой. Достаточно ввести $(n + 1)$-го игрока-болвана (который не контролирует ни одной позиции) и определить локальную стоимость его ходов формулой $c(n+1,e) = -\sum_{i=1}^{n} c(i,e)$.

Игры в нормальной форме; общее определение.

Итак, пусть $I = \{1,\ldots,n\}$ множество игроков, X_i — конечное множество стратегий игрока $i \in I$, а $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — их прямое произведение, т.е. множество ситуаций.

Далее, пусть P обозначает произвольное множество исходов игры (в нашем случае — партий). Произвольное отображение $g : X \to P$ называется *игровой формой.*

Наконец, пусть дана произвольная функция стоимости $c : I \times P \to \mathcal{R}$. Её вещественные значения $c(i,p)$ показывают, сколько должен платить игрок $i \in I$ за партию $p \in P$.

Пара (g,c) определяет *игру в нормальной форме.*

Равновесие Нэша и седловая точка.

Ситуация $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n = X$ называется *равновесием Нэша*, если изменение стратегии любым игроком $i \in I$ (но только одним) не приносит ему выгоды, т.е. не уменьшает стоимости для него. Формально, это можно записать так: $c(i,g(x)) \leq c(i,g(x'))$ для любого игрока $i \in I$ и для любой ситуации $x' \in X$ такой, что все её координаты (стратегии) те же, что и в x, за исключением, быть может, координаты i, иными словами, только x'_i может отличаться от x_i.

Это понятие было введено Джоном Нэшем в 1950 году. В случае игр двух лиц с нулевой суммой равновесие Нэша носит название *седловая точка.* Это понятие лет на 200 старше.

В отличие от седловой точки, концепция Нэша весьма уязвима для критики. Зачастую, два игрока могут изменить одновременно свои стратегии и оба выгадать. Более того, то же могут сделать иногда и все n игроков.

Ситуаций равновесия (в чистых стратегиях) может вообще не быть. А если есть, то их может быть много. Более того, не только равновесий, но и равновесных платежей может быть много.

Седловая точка лишена большинства этих недостатков. Однако, критика Нэша не является нашей целью. (Вспомним также о пяти нобелевских премиях :-)

Однородное равновесие Нэша Ситуация $x \in X$ называется *однородным* равновесием Нэша, если она является равновесием не только при данной начальной позиции $v_0 \in V$, но и при любой другой начальной позиции $v'_0 \in V$.

4. Задачи и гипотезы

Мы будем интересоваться теоремами существования равновесия Нэша (т.е. разрешимостью по Нэшу) позиционных игр, определенных выше.

Сложность проблемы я оцениваю числом очков, данным в скобках.

Гипотеза 1 (500). Верно ли, что любая позиционная игра двух лиц разрешима по Нэшу.

Задача 1 (10). Покажите, что без нарушения общности можно предположить отсутствие «нулевых циклов», точнее, ориентированных циклов с нулевой суммой локальных стоимостей. Иными словами, можно без нарушения общности предположить, что $\sum_{e \in C} c(i,e) \neq 0$ для любого ориентированного цикла C и игрока $i \in I = \{1,2\}$.

Напомним, что, эффективная стоимость любой зацикливающейся партии равна + или $-\infty$.

Это совсем новая гипотеза. Владимир Удалов написал программу, которая подтвердила её для многих орграфов с $10-18$ вершинами.

Задача 2 (25). На случай трёх игроков Гипотеза 1 не обобщается. Постройте пример.

Для игр двух лиц с нулевой суммой гипотеза верна, но доказательство сложное. Более того, в этом случае можно так ввести конечную эффективную стоимость каждой партии p, заканчивающейся «нулевым циклом» C, что седловая точка всегда будет существовать. (Напомним, что мы определили $c(i,p) = +\infty$ в этом случае.) Однако, такое переопределение непросто.

Задача 3 (70). Попробуйте его найти и доказать разрешимость. Покажите, что «очевидные попытки» не проходят. Например, если положить $c(i,p) = 0$ или $c(i,p) = \sum_{e \in p} c(i,e)$, то седловой точки может и не быть. Постройте примеры.

Гипотеза 2 (500). Верно ли, что любая позиционная игра n лиц, в которой все локальные стоимости неотрицательны, разрешима по Нэшу?

Задача 3а (5). Докажите, что достаточно рассмотреть строго положительные локальные стоимости.

Гипотеза не доказана даже в следующих «очень частных» случаях.

Гипотеза 2а (300). Терминальный платеж.

При этом эффективная стоимость любой зацикливающейся партии для любого игрока равна $+\infty$.

Гипотеза 2б (400). Терминальный платеж. При этом по-прежнему все циклы образуют один и тот же исход, НО не обязательно наихудший для всех игроков. Вместо этого, мы теперь предполагаем, что каждый из игроков ранжирует все терминалы и циклический исход произвольно.

Гипотеза 2в (300). Случай двух игроков, $n = 2$. В этом случае мы обьединяем предположения Гипотез 1 и 2.

Задача 4 (100). Докажите, что в случае двух игроков и терминальной функции стоимости Гипотеза 2 всё же верна.

Этот результат можно вывести из одной моей старой теоремы, 1975 года.

По определению, общая игровая форма n лиц $g : X_1 \times \ldots \times X_n \to P$ разрешима по Нэшу, если соответствующая игра (g, c) имеет хотя бы одно равновесие Нэша при любой функции стоимости $c : I \times P \to \mathcal{R}$. Здесь $c(i, p)$ — стоимость исхода $p \in P$ для игрока $i \in I$.

Для случая двух игроков, $I = \{1, 2\}$, наряду с общим определением разрешимости рассмотрим следующие два более слабых свойства:

Игровая форма двух лиц g называется *антагонистически разрешимой*, если она разрешима в классе игр с нулевой суммой. Наконец, g называется ± 1 *разрешимой*, если она разрешима в классе игр двух лиц с нулевой суммой, причем функция стоимости принимает только два значения: $+1$ и -1.

Задача 5 (100). Докажите, что все эти три свойства (разрешимость, антагонистическая разрешимость и ± 1 разрешимость) эквивалентны.

Эквивалентность последних двух свойств я доказал немного раньше, в 1973 году, но ещё раньше, в 1970, то же сделали Джек Эдмондс и Дэлберт Рэй Фалкерсон. Edmonds, J.; Fulkerson, D. R. (1970), "Bottleneck extrema", Journal of Combinatorial Theory 8:3 (1970) 299-306.

К сожалению, утверждение задачи 5 на игры трех лиц уже не обобщается. Сформулируем это точнее. Каждой игровой форме n лиц, $I = \{1, \ldots, n\}$, можно поставить в соответствие n игровых форм двух лиц, в которых i играет против $I \setminus \{i\}$, где $i \in I$.

Задача 5а (50). Приведите пример неразрешимой по Нэшу игровой формы трёх лиц, такой что все три соответствующих ей игровые формы двух лиц разрешимы.

Задача 5б (20) Приведите обратный пример, разрешимой по Нэшу игровой формы трёх лиц, такой что все три соответствующих ей формы двух лиц неразрешимы.

Задача 6 (20). Покажите, что Задача 4 сводится к Задаче 5.

Задача 7 (15). Докажите, что равновесие Нэша существует, если граф G ациклический (не имеет ориентированных циклов).

Подсказка: Примените динамичаское программирование. В теории позиционных игр это называется "обратная индукция".

Этот результат был получен Гарольдом Куном (1952) и Давидом Гейлом (1953) вскоре после того, как Нэш ввел своё понятие равновесия.

Задача 7а (20). Докажите, что для ациклических игр равновесие Нэша существует, даже если разрешить позиции случая (в которых задано распределение вероятностей).

Разумеется, за решение обеих этих задач можно получить максимум 20 очков, но не 35.

Задача 8 (40). Докажите, что равновесие Нэша (седловая точка) существует для позиционных игр двух лиц с нулевой суммой.

В частности, для шахмат или го. Этот результат Эрнст Цермело доложил на 5-м международном конгрессе математиков в 1912 году. Его доклад назывался: «О применении теории множеств к шахматной игре».

Замечу, что и в этом случае результат можно обобщить, разрешив позиции случая. Однако, это увело бы нас далеко в сторону (стохастических игр). Поэтому отложим это направление на будущее.

Задача 9 (10). Договоримся заканчивать игру при первом же повторении позиции. При этом исходом игры будет считаться полученный цикл. Покажите, что при этом конечный граф может быть заменен конечным деревом (в котором нет не только ориентированных, но и вообще никаких циклов). Почему же Гипотезы 1 и 2 не вытекают из Задачи 7?

Задача 10 (15) Приведите пример терминальной игры двух лиц в которой имеется всего один цикл и нет однородного равновесия. (При этом цикл не обязательно худший исход для обоих игроков. Каждый из них ранжирует терминалы и цикл произвольно.)

Задача 11 (100) Приведите пример терминальной игры двух лиц в которой нет однородного равновесия и при этом имеется всего один цикл, который является худшим исходом для обоих игроков.

Задача 12 (25) Приведите аналогичный пример терминальной игры трех лиц: в ней нет однородного равновесия и при этом имеется всего один цикл, который является худшим исходом для всех трёх игроков.

Такие примеры были построены не так давно: к Задаче 11 в 2003, а к Задаче 12 в 2008 годах.

Разумеется, во всех трех случаях (Задачи 10,11 и 12) относительно любой фиксированной начальной позиции, равновесие существует. Иначе, Гипотеза 2 была бы опровергнута.