Честный раздел тортов

Решения после промежуточного финиша

Несколько общих результатов

Мы начнём с разбора задач 3.1–3.3, поскольку их решение упрощает остальные решения.

3.1. Если n не делится на m, то торты невозможно разрезать на куски веса $\frac{m}{n}$. Значит, найдётся кусок меньшего веса. Тогда кто-нибудь получит хотя бы два куска, и наименьший из них будет весить не более $\frac{m}{2n}$.

Пусть теперь $f(m,n) = \frac{m}{2n}$. Тогда каждый кусок весит либо $\frac{m}{2n}$, либо $\frac{m}{n}$. Каждый кусок веса $\frac{m}{n}$ можно разбить на два куска веса $\frac{m}{n}$. Итак, каждый торт состоит из кусков веса $\frac{m}{2n}$, что может случиться тогда и только тогда, когда $2m$ делится на n (а m не делится).

3.3. а) Рассмотрим любое оптимальное разбиение. Если у кого-то хотя бы три куска, то минимальный из них не превосходит $\frac{m}{3n}$; поэтому и $f(m,n) \leq \frac{m}{3n}$.

3.2. а) Предположим, что $f(m,n) > \frac{m}{n} - \frac{1}{2}$. Поскольку $\frac{m}{n} > \frac{3}{4}$, имеем $\frac{m}{n} - \frac{1}{2} > \frac{m}{3n}$. Значит, по 3.3а) каждый человек получает не более двух кусков. Если есть кусок размера $\frac{m}{n}$, разделим его на два равных; полученное разбиение по-прежнему оптимально ввиду 3.1. Итак, всего есть ровно $2n$ кусков. Поскольку $2n < 3m$, найдётся торт, разделённый на две части (каждый торт должен быть порезан!); одна из этих частей не меньше $\frac{1}{2}$. Тогда у человека, получивший эту часть, оставшийся кусок не превосходит $\frac{m}{n} - \frac{1}{2}$. Противоречие.

б), в) Пусть $k \geq 3$; предположим, что $\frac{2}{k+1} < \frac{m}{n} < 1$, но $f(m,n) > \frac{m}{n} - \frac{1}{k}$. Поскольку $\frac{m}{n} - \frac{1}{k} > \frac{m}{3n}$, по 3.1 и 3.3а) мы опять можем считать, что у каждого человека ровно по два куска, и общее число кусков — $2n$. Так как $2n < (m+1)k$, найдётся торт с не более чем k кусками, а тогда один из них не меньше $\frac{1}{k}$. У человека, получившего этот кусок, вторая часть не будет превосходить $\frac{m}{n} - \frac{1}{k}$. Противоречие.

3.3. б) Рассмотрим отрезок длины m. Разделим его красными точками на m равных частей, а синими точками — на $3n$ равных частей (концы отрезка будут иметь оба цвета). Полученные отрезки с красными концами обозначают торты.

Теперь одновременно удалим все синие точки, одна из соседних с которыми точек — красная (но не разноцветная!). Затем разрежем торты по оставшимся синим точкам. Мы утверждаем, что теперь полученные части можно раздать n людям поровну.

Поскольку $m < n$, каждый торт содержал хотя бы три синих точки, поэтому хотя бы одна из них осталась. Далее, каждый полученный кусок, не находящийся на границе торта, имеет длину $\frac{m}{3n}$. То же верно для куска с разноцветным концом. Все же остальные куски разбиваются на пары, имеющие общий красный конец; общая длина двух кусков пары тогда будет равна $3 \cdot \frac{m}{3n} = 1$. Тогда каждую такую пару мы можем отдать одному человеку. Все остальные куски имеют длину $\frac{m}{3n}$, и их можно раздать по три оставшимся людям.

в) От противного, пусть $\frac{m}{n} \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$, но $f(m,n) > \frac{1}{3}$. По 3.3а) и 3.1, можно предположить, что каждый человек получает ровно два куска. Тогда общее число кусков равно $2n < 3m$, поэтому существует торт, разбитый на два куска. Один из этих кусков не меньше $\frac{1}{2}$. У человека, получившего его, второй кусок не больше $\frac{m}{n} - \frac{1}{2}$, что не превосходит $\frac{m}{3n}$? поскольку $\frac{m}{n} \leq \frac{3}{4}$. Противоречие.

Наконец, мы приведём также решение 1.4.

1.4. Рассмотрим такой набор кусков, что его можно распределить как по n равным тортам веса m, так и по m равным тортам веса n. Пусть x — максимальный возможный наименьший кусок в таком наборе. Тогда

$$nf(m,n) = x = mf(n,m),$$

откуда $f(m,n) = \frac{m}{n} f(n,m)$.

Некоторые значения функции f

Обозначение. При построении примеров мы будем обозначать через $(i_1 \cdot a_1 + i_2 \cdot a_2 + \cdots + i_l \cdot a_l)$ разрез торта на $i_1 + i_2 + \cdots + i_l$ кусков, среди которых i_1 кусков веса a_1, i_2 кусков a_2 и т.д. Так же будет обозначаться состав доли одного человека.

1.1. а) Частный случай 3.3в).
б) Оценка следует из 3.2б). Пример:

$$4 \times 210g = 2 \times (3 \cdot 70g) + 2 \times (3 \cdot 50g + 60g)$$

в) Оценка следует из 3.2в) при $k = 12$. Пример:

$$4 \times 3kg = 2 \times (12 \cdot 250g) + 2 \times (240g + 12 \cdot 230g) = 24 \times (230g + 250g) + (2 \cdot 240g) = 25 \times 480g.$$

1.2. а) **Ответ.** $\frac{5}{21}$.
Частный случай 3.3в).
б) **Ответ.** $\frac{5}{18}$.
Оценка следует из 3.2а). Пример:

$$7 \times 1 = 3 \times \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{5}{18} + \frac{6}{18} + \frac{7}{18}\right) + 2 \times \left(2 \times \frac{5}{18} + \frac{8}{18}\right) =$$
$$= 6 \times \left(\frac{5}{18} + \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{7}{18}\right) + 2 \times \left(\frac{6}{18} + \frac{8}{18}\right) = 9 \times \frac{7}{9}.$$

1.3. а) **Ответ.** $\frac{1}{3}$.
Как обычно, можно предположить, что у каждого человека по два куска. Тогда найдётся торт с тремя или более частями, одна из которых не превосходит $\frac{1}{3}$, поэтому $f(8,9) \leq \frac{1}{3}$. Пример:

$$8 \times 1 = 2 \times \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) + 6 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9}\right) + 3 \times \left(2 \cdot \frac{4}{9}\right) = 9 \times \frac{8}{9}.$$

б) **Ответ.** $\frac{2}{7}$.
Оценка $f(11,14) \geq \frac{2}{7}$ следует из 3.2а). Пример:

$$11 \times 1 = 5 \times \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 4 \times \left(2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right) + 2 \times \left(\frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{5}{14}\right) =$$
$$= 10 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7}\right) + 4 \times \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{14}\right) = 14 \times \frac{11}{14}$$

в) **Ответ.** $\frac{5}{17}$.

Как обычно, можно предположить, что у каждого человека по два куска. Тогда всего есть 34 куска. Заметим, что каждый торт разрезан на два или три куска: целого торта быть не может, а если какой-то торт разрезан хотя бы на 4 куска, то один из них не превосходит $\frac{1}{4} < \frac{5}{17}$. Тогда есть 6 *богатых* тортов с тремя кусками и 8 *обычных* тортов с двумя кусками; в богатых тортах всего 18 кусков, а в обычных — 16 кусков. Поэтому найдётся человек, у которого оба куска — из богатых тортов (если они из одного торта, то выберем ещё один богатый произвольно). Суммарный вес остальных 4 кусков в этих тортах не превосходит $2 - \frac{14}{17} = \frac{20}{17}$. Поэтому один из них не тяжелее $\frac{5}{17}$.

Пример:

$$14 \times 1 = 8 \times \left(\frac{9}{17} + \frac{8}{17}\right) + 4 \times \left(2 \cdot \frac{6}{17} + \frac{5}{17}\right) + 2 \times \left(\frac{7}{17} + 2 \cdot \frac{5}{17}\right) =$$
$$= 8 \times \left(\frac{5}{17} + \frac{9}{17}\right) + 8 \times \left(\frac{6}{17} + \frac{8}{17}\right) + \left(2 \cdot \frac{7}{17}\right) = 17 \times \frac{14}{17}.$$

2.1. а) **Ответ.** $\frac{1}{3}$.

Пусть $s = f(3k-1, 3k)$. Докажем сначала, что $s \le \frac{1}{3}$. Пусть это не так. Тогда $s > \frac{1}{3}$, и согласно 3.3а) можно считать, что у любого человека ровно два куска. Тогда найдётся торт, разрезанный хотя бы на 3 куска, и наименьший из них не превосходит $\frac{1}{3}$. Противоречие.

Для построения примера умножим все веса на $3k$. Имеем:

$$(3k-1) \times 3k = 2 \times \big(3 \cdot k\big) +$$
$$+ 3 \times \big((2k-1) + (k+1)\big) + 3 \times \big((2k-2) + (k+2)\big) + \dots + 3 \times \big((k+1) + (2k-1)\big) =$$
$$= 3 \times \big(k + (2k-1)\big) + 3 \times \big((k+1) + (2k-2)\big) + \dots + 3 \times \big((2k-1) + k = (3k+2) \times (6k+2).$$

б) **Ответ.** $\frac{2k+1}{2(3k+2)}$.

Обозначим $s = f(3k+1, 3k+2)$, $t = \frac{2k+1}{2(3k+2)}$. Сначала покажем, что $s \le t$. Пусть это не так. Опять же, из $s > t \ge \frac{3k+1}{3(3k+2)}$ можно предположить, что у каждого человека по два куска. Если какой-то торт разрезан хотя бы на 4 части, то наименьшая из них не превосходит $\frac{1}{4} \le \frac{2k+1}{2(3k+2)}$, что невозможно. Поэтому каждый торт разрезан на 2 или 3 куска, и легко понять, что есть ровно два торта, разделённых на 3 куска.

Рассмотрим теперь следующий граф. Вершинами являются торты, а каждому человеку сопоставлено ребро, соединяющее торты, из которых он получил свои куски. В этом графе есть две *выделенных* вершины степени 3, а все остальные имеют степень 2. Поэтому он состоит из трёх путей, соединяющих выделенные вершины (возможно, некоторые из них — циклы). Длина одного из этих путей не меньше $k+1$; рассмотрим этот путь $v_0, v_1, \dots, v_{k+1}$.

Обозначим долю человека, соответствующего ребру (v_i, v_{i+1}), через (p_i, q_i), где кусок p_i взят из торта v_i, а q_i — из v_{i+1}. Тогда $p_i + q_i = \frac{3k+1}{3k+2}$ при $i = 0, 1, \dots, k$, и $q_i + p_{i+1} = 1$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Поэтому $p_{i+1} - p_i = \frac{1}{3k+2}$, а значит, $p_k \ge \frac{k}{3k+2} + p_0 \ge \frac{k}{3k+2} + t = \frac{4k+1}{2(3k+2)}$. Наконец, получаем $q_k = \frac{3k+1}{3k+2} - p_k \le t$. Противоречие.

В решении содержится также идея примера: должны получиться два пути длины $k+1$ и один — длины k. length k. Для удобства умножим все веса на $2(3k+2)$. Тогда пример выглядит так:

$$(3k+1) \times (6k+4) = 2 \times \big(2 \cdot (2k+1) + (2k+2)\big) +$$
$$+ 2 \times \big((4k+1) + (2k+3)\big) + 2 \times \big((4k-1) + (2k+5)\big) + \dots + 2 \times \big((2k+3) + (4k+1)\big) +$$
$$+ \big(4k + (2k+4)\big) + \big((4k-2) + (2k+6)\big) + \dots + \big((2k+4) + 4k\big) =$$
$$= 2 \times \big((2k+1) + (4k+1)\big) + 2 \times \big((2k+3) + (4k-1)\big) + \dots + 2 \times \big((4k+1) + (2k+1)\big) +$$
$$+ \big((2k+2) + 4k\big) + \big((2k+4) + (4k-2)\big) + \dots + \big(4k + (2k+2)\big) = (3k+2) \times (6k+2).$$

в) **Ответ.** $\frac{k}{3k+1}$.

Обозначим $s = f(3k, 3k+1)$, $t = \frac{k}{3k+1}$. Опять же, предполагая, что $s > t$, мы можем считать, что у каждого человека по два куска, есть ровно два торта с тремя кусками, а остальные содержат по два куска. Далее, строя аналогичный граф, мы получаем, что один из путей длины хотя бы $k+1$. Действуя как и выше, мы находим, что $p_k - p_0 = \frac{k}{3k+1}$, поэтому $p_k \geq \frac{2k}{3k+1}$ и $q_k = \frac{3k}{3k+1} - p_k \leq t$. Противоречие.

Для построения примера умножим все веса на $3k+1$. Пример выглядит так:

$$\begin{aligned}
3k\times(3k+1) &= 2\times\big(2\cdot k + (k+1)\big) + \\
&\quad + 2\times\big(2k + (k+1)\big) + 2\times\big((2k-1) + (k+2)\big) + \dots + 2\times\big((k+1) + 2k\big) + \\
&\quad + \big((2k-1) + (k+2)\big) + \big((2k-2) + (k+3)\big) + \dots + \big((k+2) + (2k-1)\big) = \\
&= 2\times\big(k + 2k\big) + 2\times\big((k+1) + (2k-1)\big) + \dots + 2\times\big(2k + k\big) + \\
&\quad + \big((k+1) + (2k-1)\big) + \big((k+2) + (2k-2)\big) + \dots + \big((2k-1) + (k+1)\big) = (3k+1)\times 3k.
\end{aligned}$$

2.3. а) Возможны три случая, в зависимости от остатка от деления n на 3.

1) $n = 3k$. Очевидно, $f(3, 3k) = \frac{1}{k}$.

2) $n = 3k+1$. Если $n = 1$, то $f(3,1)$=1. Если же $n = 3k+1 \geq 4$, то $f(3, 3k+1) = \frac{3k-1}{2k(3k+1)}$. Оценка следует из 3.2в) (при $k' = 2k$). Пример:

$$\begin{aligned}
3\times 1 &= \left(2k\cdot\frac{1}{2k}\right) + 2\times\left(k\cdot\frac{3k-1}{2k(3k+1)} + (k+1)\cdot\frac{3}{6k+2}\right) = \\
&= 2k\times\left(\frac{3k-1}{2k(3k+1)} + \frac{1}{2k}\right) + (k+1)\times\left(2\cdot\frac{3}{6k+2}\right).
\end{aligned}$$

3) $n = 3k+2$. В этом случае $f(3, 3k+2) = \frac{1}{2k+2}$.

Можно предположить, что у каждого человека по два куска, и общее число кусков равно $6k+4$. Тогда найдётся торт с хотя бы $2k+2$ кусками, один из которых не превосходит $\frac{1}{2k+2}$. Пример:

$$\begin{aligned}
3\times 1 &= \left((2k+2)\cdot\frac{1}{2k+2}\right) + 2\times\left((k+1)\cdot\frac{3k+4}{(3k+2)(2k+2)} + k\cdot\frac{3}{6k+4}\right) = \\
&= (2k+2)\times\left(\frac{1}{2k+2} + \frac{3k+4}{(3k+2)(2k+2)}\right) + k\times\left(2\cdot\frac{3}{6k+4}\right).
\end{aligned}$$