Честный раздел тортов

После промежуточного финиша

Добавочные задачи к предыдущим разделам

На всякий случай напомним задачу, добавленную на изначальной презентации.

1.6. а) На какое минимальное число кусков надо разрезать m одинаковых тортов, чтобы эти куски можно было раздать поровну n людям?

б) Каким может быть размер наименьшего куска в таком разрезании на наименьшее число кусков?

Следующие задачи — по сути добавка в третий раздел. Точнее, это ещё несколько оценок, аналогичных теореме о трети, но более точных.

3.12. Докажите, что $f(m,n) \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{m}{n}$, если $\frac{5}{12} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$.

3.13. а) Докажите, что $f(m,n) \geq \frac{3}{8} \cdot \frac{m}{n}$ при $\frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$.

б) Для каких ещё интервалов вы можете доказать это неравенство?

3.14. а) Докажите, что $f(m,n) \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{m}{n}$, если $\frac{3}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{8}{13}$.

б) Попытайтесь доказать это неравенство для какого-нибудь интервала, смежного с $\left(\frac{3}{5}, \frac{8}{13}\right)$. Например, можно ли доказать его для $\frac{m}{n} \in \left(\frac{10}{17}, \frac{3}{5}\right)$? А для $\frac{m}{n} \in \left(\frac{8}{13}, \frac{5}{8}\right)$?

в) Для каких ещё интервалов (в других местах отрезка $[0,1]$) вы можете получить такую же оценку?

3.15. Для какого интервала внутри $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ вы можете доказать оценку $f(m,n) \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{n} - \frac{1}{6}$?

Испытательный полигон.

Для тех, кому понадобятся дополнительные нетривиальные конкретные пары (m,n), здесь мы приводим несколько таких пар. **Внимание!** Мы можем проверить ответы и примеры для этих пар, но мы не станем проверять доказательство, если оно не содержит каких-то общих идей; поэтому эти пары не помещены в задачу.

Итак, вот эти пары (если будет надо, этот список может быть пополнен):

$$(17,29); \quad (31,70); \quad (17,47); \quad (117,133); \quad (27,61); \quad (566,643); \quad (3130,6813).$$

Удачи!

4 Вариации постановки

В этом разделе мы обобщаем исходную постановку разными способами. Решение этих задач может серьёзно помочь в решении исходной Мегазадачи.

4.1. а) Есть m тортов веса 1 и $n > m$ людей. Требуется разрезать торты и раздать их людям так, чтобы каждый получил поровну. При этом требуется, чтобы каждый человек получил не более двух кусков, а каждый торт был разрезан не более, чем на три части. При каких m, n это возможно?

б) Тот же вопрос, но каждый торт должен быть разрезан не более, чем на k частей.

в) Тот же вопрос, но каждый торт должен быть разрезан либо на $k-1$, либо на k частей.

Следующие несколько задач связаны с тем, что торты иногда бывают разными.

4.2. а) Два торта с весами 1 кг и 2 кг делятся между N людьми так, чтобы каждому досталось поровну. Чему равен наибольший возможный размер минимального куска?

б) Тот же вопрос для двух тортов весов 2 кг и 5 кг.

4.3. а) Пусть $k > 1$. Есть $3k$ тортов веса 3 каждый, $k-1$ торт веса 4 каждый, и $3k-1$ торт веса 7 каждый. Требуется разрезать каждый торт размера 3 на два куска, а каждый из остальных — на три куска, чтобы все куски можно было раздать нескольким людям по два каждому, чтобы все получили поровну. Каков максимальный возможный размер наименьшего куска?

б) Тот же вопрос для $3k$ тортов веса 3, $k+2$ тортов веса 4 и $3k+2$ тортов веса 7.

в) Тот же вопрос для $3k$ тортов веса 3, $2k-1$ тортов веса 4 и $4k-1$ тортов веса 7, где $k \geq 10$. А что будет, скажем, при $k = 7$?

4.4. а) Есть торт веса 59, торт веса 89 и два торта веса 41. Требуется разрезать первый торт на 4 куска, второй — на 6 кусков, а каждый из третьих — на 5 кусков так, чтобы их можно было раздать 10 людям поровну (по весу и по количеству кусков!). Каков максимальный возможный размер наименьшего куска?

б) Есть два торта веса 41, три торта веса 35, и 11 тортов веса 29. Требуется разрезать каждый из первых тортов на 5 кусков, каждый из вторых — на 4 куска, а каждый из третьих — на 2 куска так, чтобы их можно было раздать 22 людям поровну (по весу и по количеству кусков). Каков максимальный возможный размер наименьшего куска?

в) Найдите $f(23, 29)$.