Честный раздел тортов

Избранные решения

Если у вас появились какие-то идеи по этому проекту, не стесняйтесь написать нам:
Константин Кноп kostyaknop@gmail.com, Илья Богданов ilya.i.bogdanov@gmail.com

Решения, представленные здесь, устроены так. В разделе «Некоторые последовательности» мы находим значения функции f на некоторых последовательностях пар (m, n). Заметим, что большинство из них следуют также из более общих результатов из следующих разделов. Раздел «Серийные результаты» содержит решения (или их наброски) задач 3.13, а также 3.4–3.8; при этом как лемма используется задача 4.1. В разделе «Неравные торты» мы распространяем наши методы на случай различных тортов, что позволяет подступиться к задачам типа 3.9 (мы рекомендуем прочесть раздел о серийных результатах перед этим). Наконец, в разделе «Общий алгоритм» мы на примерах описываем идеи общего алгоритма решения Мегазадачи (в нём использованы идеи из предыдущих двух разделов).

Начнём же мы с задачи 1.6а).

1.6. а) **Ответ.** $m + n - \text{НОД}(m, n)$.

Построим пример. Рассмотрим отрезок длины m. Разделим его красными точками на m равных частей и синими точками на n равных частей (некоторые точки могут быть покрашены в оба цвета). Отрезки с красными соответствуют тортам. Разрежем торты по всем синим точкам. Докажем, что получено требуемое разрезание. Очевидно, что эти куски можно раздать людям: каждому человеку можно дать куски тортов между соседними синими точками. Имеем $m + 1$ красных точек, $n + 1$ синих точек и $\text{НОД}(m, n) + 1$ разноцветных точек. Таким образом всего $m + n - \text{НОД}(m, n) + 1$.

Осталось доказать, что количество кусков не может быть меньше, чем $m + n - \text{НОД}(m, n)$. Обозначим $d = \text{НОД}(m, n)$, $n = dn'$, $m = dm'$. Рассмотрим двудольный граф с m красными вершинами и n синими вершинами, торты и люди соответственно. Каждое ребро соответствует куску торта и соединяет человека, получившего этот кусок с тортом, от которого этот кусок отрезан. Рассмотрим какую-нибудь связную компоненту этого графа, пусть в ней r красных вершин и b синих вершин. Тогда b человек съели вместе r тортов, следовательно $b \cdot \frac{m}{n} = r$. Отсюда $\frac{r}{b} = \frac{m'}{n'}$ и следовательно $m' \mid r$. Следовательно количество связных компонент не более чем $\frac{m}{m'} = d$. С другой стороны количество рёбер на каждой компоненте не менее чем уменьшенное на 1 количество вершин. Поэтому общее количество рёбер в графе (то есть количество кусков, на которые порезаны торты) не менее $m + n - d$.

б) Решение оставляем читателю.

Некоторые последовательности

В этом разделе собраны некоторые решения задач из раздела 2. Многие из этих задач на самом деле следуют из задач раздела 3; однако мы приводим их, чтобы продемонстрировать более конкретные конструкции.

Общее замечание. Поскольку случай $n \,\vdots\, m$ тривиален, далее мы всегда предполагаем, что n не делится на m.

2.2. Из 3.2б) следует $f(m, 2m-1) \le \frac{m+1}{6m-3}$. Пример дележа тортов веса $6m-3$:

$$2 \times \Big(3 \cdot (2m-1)\Big) + \Big(2 \cdot (m+1) + (2m-4) + (2m-1)\Big) + 2 \times \Big(2 \cdot (m+1) + (2m-2) + (2m-3)\Big) + \Big((m+1+i) + (m+3+i) + (2m-4-i) + (2m-3-i)\Big)_{i=1,\ldots,(m-5)}$$

2.3. б) **Ответ.** $\frac{4}{n}$, если $n \,\vdots\, 4$; $\frac{2}{n}$, если $n = 4k+2$; $\frac{4}{n} - \frac{1}{[n/2]}$, если $n = 2k+1$.

Если $n = 4l+2$ четно, то $f(4, 4l+2) = \frac{1}{2l+1}$ по 3.1. Пусть $n = 2k+1$ нечетно. По 3.3а) мы можем считать, что каждый человек получил по два куска. Тогда всего есть $4k+2$ кусков и по принципу Дирихле есть торт с не более чем k кусками. Тогда найдется кусок не менее чем $\frac{1}{k}$, а дополнительный к нему кусок будет не более чем $\frac{4}{n} - \frac{1}{k} = \frac{4}{n} - \frac{2}{n-1}$. Пример для нечетных n:

$$2 \times \left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2}{n-1}\right) + 2 \times \left(\frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n-1}\right) + \frac{2}{n}\right) = \\ = (n-1) \times \left(\frac{2}{n-1} + \left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n-1}\right)\right) + 2 \cdot \frac{2}{n} = n \cdot \frac{4}{n}.$$

в) **Ответ.** $\frac{5}{n}$, если $n \,\vdots\, 5$; $\frac{1}{\lceil 2n/5 \rceil}$, если $n = 5k+1 \ge 16$ или $n = 5k+3$; $\frac{5}{n} - \frac{1}{[2n/5]}$, если $n = 5k+4$ или $n = 5k+2 \ge 12$; $f(5, 11) = \frac{13}{66}$.

2.4. **Ответ.** $\frac{1}{5}$ для $m \ge 6$ и $m = 2$; остальные ответы следуют из предыдущих задач: $f(1,3) = \frac{1}{3}$, $f(3,7) = \frac{5}{28}$, $f(4,9) = \frac{7}{36}$, $f(5,11) = \frac{13}{66}$.

2.5. **Ответ.** $\frac{1}{4}$ для $k \ge 1$.

Оценка следует из 3.4 а). Пример для тортов веса $12k+8$:

$$1 \times \Big(4 \cdot (3k+2)\Big) + 2 \times \Big((4k+2) + (5k+4-2i) + (3k+2+2i)\Big)_{i=1,\ldots,k} = \\ = k \times \Big(2 \cdot (4k+2)\Big) + 2 \times \Big((3k+2) + (5k+2)\Big) + 2 \times \Big((3k+4) + 5k\Big) + \cdots + 2 \times \Big((5k+2) + (3k+2)\Big).$$

Заметим, что задача следует из 3.4б).

2.6. **Ответ.** $\frac{2k+1}{2(4k+1)}$.

Оценка следует из 3.2 а). Пример для тортов веса $8k+2$:

$$(k+1) \times \Big(2 \cdot (4k+1)\Big) + 2 \times \Big((2k+1) + (2k+i) + (4k+1-i)\Big)_{i=1,\ldots,k} = \\ = (2k+2) \times \Big((2k+1) + (4k+1)\Big) + 2 \times \Big((4k+1-i) + (2k+1+i)\Big)_{i=1,\ldots,(k-1)} + \Big(2 \cdot (3k+1)\Big).$$

2.7. **Ответ.** $\frac{1}{4}$.

Оценка следует из 3.4а). Пример для тортов веса $32k+12$.

$$(5k+2) \times (32k+12) = \\ = k \times \Big(4 \cdot (8k+3)\Big) + 2 \times \Big(2 \cdot (10k+4) + (12k+4)\Big) + \Big((12k+5) + (8k+3+i) + (12k+4-i)\Big)_{i=1,\ldots,4k}.$$

Заметим, что существование примера следует из 3.4б).

2.8. **Ответ.** $\frac{6k-1}{3(9k-2)}$.

Оценка следует из 3.2 б). Пример для тортов веса $27k-6$ и порций людей $15k-3$:

$$2k \times \Big(3\cdot(9k-2)\Big) + \Big((6k-1)+(6k-1)+(6k-2+i)+(9k-2-i)\Big)_{i=1,\ldots,(3k-1)} =$$
$$= 6k \times \Big((6k-1)+(9k-2)\Big) + \Big((6k-1+i)+(9k-2-i)\Big)_{i=1,\ldots,3k-2}$$

2.9. **Ответ.** $\frac{18k-4}{63k-15}$.
Оценка вытекает из следующей леммы.
Лемма. Пусть $\frac{4}{5} < \frac{m}{n} < 1$; тогда $f(m,n) \le 2\cdot\frac{m}{n} - \frac{4}{3}$.

Доказательство. Предположим противное. Легко проверить, что $2\cdot\frac{m}{n} - \frac{4}{3} \ge \frac{m}{3n}$ и $2\cdot\frac{m}{n} - \frac{4}{3} \ge \frac{1}{4}$, так что все торты содержат два или три куска и все люди имеют по два куска. Число двухкусочных тортов равно $3m-2n$, число трехкусочных тортов равно $2n-2m$. Возможны два варианта.

1) Допустим, что кому-то достались два куска с двухкусочных тортов. Тогда остающиеся два куска этих тортов весят в сумме $2-\frac{m}{n}$, а один из этих кусков не меньше чем $1-\frac{m}{2n}$. Поэтому дополнительный до порции кусок не больше чем

$$\frac{m}{n} - \left(1-\frac{m}{2n}\right) < 2\cdot\frac{m}{n} - \frac{4}{3}.$$

2) Любой кусок из двухкусочного торта дополняется куском из трехкусочного торта. Пусть x — вес минимального куска. Тогда $\frac{m}{n} - x$ — это максимальный вес. Возьмем некоторый кусок A из двухкусочного торта, тогда $A \ge 1-\frac{m}{n}+x$. Поэтому дополнительный кусок можно оценить как $\frac{m}{n} - A \le 2\frac{m}{n} - 1 - x$. Из $\frac{m}{n} > \frac{4}{5}$ следует, что двухкусочных тортов больше, чем трехкусочных. Поэтому найдется трехкусочный торт, все куски которого дополняют до порций куски из двухкусочных тортов. Поэтому каждый из трех кусков тортов не больше чем $2\frac{m}{n} - 1 - x$ и

$$3\left(2\cdot\frac{m}{n} - 1 - x\right) \le 1 \Leftrightarrow x \le 2\frac{m}{n} - \frac{4}{3}.$$

$\square$

Пример. Торт весит $63k-15$, порция человека $51k-12$, минимальный вес куска $18k-4$.

$$(17k-4)\times(63k-15) = 2k\times\Big(3\cdot(21k-5)\Big) + 6k\times\Big((33k-8)+(30k-7)\Big)+$$
$$+\Big((33k-10-i)+(30k-7+i)\Big)_{i=1,\ldots,3k-2} + 2\times\Big((18k-3+i)+(27k-6-i)+(18k-4)\Big)_{i=1,\ldots,3k-1} =$$
$$= 6k\times\Big((21k-5)+(30k-7)\Big) + 6k\times\Big((33k-8)+(18k-4)\Big)+$$
$$2\times\Big((18k-4+i)+(33k-8-i)\Big)_{i=1,\ldots,3k-2} + \Big((24k-6+i)+(27k-6-i)\Big)_{i=1,\ldots,3k-1} =$$
$$= (21k-5)\times(51k-12).$$

Серийные результаты

Для начала приведём оценку, аналогичную теореме о трети.

3.13. а) Если $n=2m$, то $f(m,2m) = \frac{1}{2}$; поэтому достаточно рассмотреть случай $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$. Пусть вес каждого торта — $8n$, тогда каждый человек получит по $8m$.

Рассмотрим отрезок длины $8mn$ и разделим его красными точками на m одинаковых отрезков (тортов). Мы будем по очереди отрезать куски с левого края оставшегося отрезка. Отрежем сначала несколько отрезков по $4m$, пока остаток торта не окажется (нестрого) между $6m$ и $10m$.

Далее, разделим оставшуюся часть на два равных отрезка (получим два куска размера от $3m$ до $5m$), а от начала следующего торта отрежем два отрезка, дополняющих только что отрезанные до $8m$. В результате, от следующего отрезка мы забрали не более $10m$, и остаток не меньше $8n-10m \geq 6m$. Тогда мы можем повторять эту операцию, пока не придём к последнему торту. Поскольку все отрезанные куски группируются в пары общей длины $8m$, а длина всего отрезка равна $8mn$, последний торт закончится двумя кусками размера $4m$. Теперь распределение кусков между людьми очевидно.

Далее мы находим точные значения функции на некоторых интервалах. Для этого в качестве лемы нам понадобится задача 4.1.

4.1. а), б) **Ответ.** $\frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{k-1}, 1\right) \cup \left\{\frac{v}{(k-1)v+1}\right\}_{v=1,2,\ldots}$.

Начнём с примера подтверждающего ответ. Будем действовать также как и в теореме о трети. Рассмотрим отрезок длины m. Разделим его красными точками на m равных частей и синими точками на n равных частей (некоторые точки могут быть покрашены в оба цвета). Отрезки с красными соответствуют тортам. Разрежем торты по всем синим точкам. Докажем, что получено требуемое разрезание. Очевидно, что эти куски можно раздать людям: каждому человеку можно дать куски тортов между соседними синими точками. Более того, каждый человек получил не более чем по два куска, так как каждый получившийся отрезок содержит не более одной красной точки. Докажем, что каждый торт разрезан не более чем на k частей.

Если $\frac{m}{n} > \frac{1}{k-1}$, то каждый торт разрезан не более чем на $k-2$ полных частей и не более чем на две части, меньшие $\frac{m}{n}$ — всего не более чем на k частей. Для $\frac{m}{n} = \frac{1}{k-1}$ утверждение очевидно. Теперь предположим, что $\frac{m}{n} = \frac{v}{(k-1)v+1}$. Рассмотрим k последовательных синих точек. Расстояние между первой и последней равно $\frac{(k-1)v}{(k-1)v+1}$ и их координаты — это дроби со знаменателем $(k-1)v+1$. Следовательно торт содержит все эти k точек только в том случае, если одна из них является его концом. Это означает в точности, что торт разрезан не более чем на k частей.

Докажем, что в других случаях требуемое разрезание невозможно. Будем называть человека *голодным*, если он получил 2 куска. Рассмотрим граф, в котором вершинам соответствуют торты, а рёбрам — голодные люди, причём каждое ребро соединяет два куска, которые получил соответствующий голодный человек. Рассмотрим произвольную связную компоненту этого графа; пусть v и e — количества вершин и рёбер соответственно. Тогда $e \geq v-1$.

Эти v тортов содержат не более kv кусков, $2e$ из которых принадлежат голодным людям. Эти куски могут быть перераспределены в целые части (а именно, e частей из двух кусков каждая и, скажем, t частей из одного куска). Тогда $t \leq kv-2e$. Сравнивая общий вес v тортов и $e+t$ людей получаем, что $\frac{n}{m} = \frac{e+t}{v} \leq \frac{kv-e}{v} = k - \frac{e}{v}$. Если $e \geq v$, то $\frac{n}{m} \leq k-1$. Иначе $e = v-1$ и следовательно $\frac{n}{m} = \frac{v(k-1)+1}{v}$.

Важное замечание. Если убрать условие $m < n$, ответ изменится не сильно. Во-первых необходимо включить в него 1; теперь предположим, что $m > n$. В этом случае все люди голодные, потому что часть торта, которая достаётся человеку больше самого торта. Каждая связная компонента графа соответствует делению v тортов между e людьми, следовательно $1 < \frac{m}{n} = \frac{v}{e}$. Последнее неравенство выполняется только в случае $e = v-1$. Для таких значений v и e пример строится аналогичным образом, в результате получаем такой ответ

$$\frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{k-1}, 1\right] \cup \left\{\frac{v}{(k-1)v+1}\right\}_{v=1,2,\ldots} \cup \left\{\frac{e+1}{e}\right\}_{e=1,2,\ldots}.$$

в) **Ответ.** $\frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{k-1}, \frac{2}{k-1}\right] \cup \left\{\frac{v}{(k-1)v+1}\right\}_{v=1,2,\ldots}$.

Решение оставляем читателю.

3.4. а) Как обычно, мы можем считать, что каждый человек получает не менее двух кусков. Тогда общее количество кусков не менее $2n > 3m$. Следовательно какой-то торт разрезается по крайней мере на четыре куска, один из которых не может быть больше $\frac{1}{4}$.

б) **Ответ.** $\frac{m}{n} \in \left[\frac{5}{8}, \frac{2}{3}\right) \cup \left\{\frac{5k+2}{8k+4}\right\}_{k=1,2,\ldots}$.

Предположим, что $f(m,n) = \frac{1}{4}$; тогда $f(m,n) > \frac{m}{3n}$, поэтому мы можем считать, что каждый человек получает ровно 2 куска. Далее, каждый кусок не менее $\frac{1}{4}$ и не более

$$d = \frac{m}{n} - \frac{1}{4}$$

(иначе другой кусок, принадлежащий человеку с куском веса d будет меньше, чем $\frac{1}{4}$). Следовательно каждый торт содержит не менее трёх кусков (иначе найдётся кусок с весом $\frac{1}{2} > d$) и не более 4 кусков (иначе найдётся кусок, меньший $\frac{1}{5}$). Итак у нас есть *богатые* торты, которые разрезаются на 4 части и *обычные* торты, которые разрезаются на 3 части. Количество богатых и обычных тортов равно

$$f = 2n - 3m \qquad \text{and} \qquad u = 4m - 2n$$

соответственно. Так как $u \geq 0$, получаем, что $\frac{m}{n} > \frac{1}{2}$.

Каждый богатый торт должен быть разрезан на равные части, которые отдаются $4f$ людям и второй кусок у каждого такого человека весит d. Все оставшиеся люди получают оба своих куска от обычных тортов; будем называть таких людей *обычными*. Получается

$$s = n - 4f = 12m - 7n$$

обычных людей.

Теперь рассмотрим вспомогательное деление **отрицательных** «тортов»; оно соответствует обычным тортам и людям. Давайте вычтем $\frac{1}{4}$ из каждого куска богатого торта и d из каждого куска обычного торта. Забудем на некоторое время про нулевые куски. Тогда в новом разделении все необычные люди и все не богатые торты исчезнут. Каждый обычный «торт» теперь разделен не более чем на три **отрицательных** «куска» одинакового общего веса, а каждый обычный человек имеет не более чем два неположительных «куска» одинакового общего веса. Заметим, что если взять все полученные веса с обратным знаком, то мы попадём в ситуацию задачи 4.1а) (без условия $m < n$).

Обратно, от деления этих *дефицитов* легко получить разделение исходных тортов. Будем резать настоящие торты на три части со следующими дефицитами (если новый «торт» был разделен на одну или две части, то оставшиеся куски не должны иметь дефицит, то есть они должны весить по d). Про людей: если кто-то имеет два дефицита, то мы даём ему два соответствующих куска; иначе он получает один кусок, соответствующий дефициту и еще один кусок с нулевым дефицитом. В результате все оставшиеся куски с нулевым дефицитом разбиваются на пары с кусками богатых тортов.

Итак, деление существует тогда и только тогда, когда $\frac{u}{s} = \frac{4m-2n}{12m-7n} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left\{\frac{k}{2k+1}\right\} \cup \left\{\frac{k+1}{k}\right\} \cup \{\infty\}$ (мы используем замечание после 4.1б)); также мы должны добавить вырожденный случай $s = 0$). С учётом того, что $\frac{m}{n} < \frac{2}{3}$, получаем, что $\frac{m}{n} \in \left[\frac{5}{8}, \frac{2}{3}\right) \cup \left\{\frac{5k+2}{8k+4}\right\}_{k=1,2,\ldots}$.

3.5. **Ответ.** $\frac{m}{n} \in \left[\frac{2k-1}{k^2-1}, \frac{2}{k}\right) \cup \left\{\frac{d(2k-1)+2}{d(k^2-1)+k+1}\right\}_{d=1,2,\ldots}$.

Решение аналогично 3.4б).

3.6. а) По 3.2б), $f(m,n) \leq \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$. Обратное неравенство доказано в пункте б).

б) **Ответ.** $\frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right] \cup \left\{\frac{5k+2}{9k+3}\right\}_{k=0,1,2,\ldots}$.

Вначале заметим, что $f(m,n) \geq \frac{m}{3n} > \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$ при $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$. С другой стороны, $f(m,n) \leq \frac{m}{2n} < \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$ при $\frac{m}{n} > \frac{2}{3}$. Осталось разобраться с интервалом $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ (левый конец интервала не удовлетворяет условию, а правый удовлетворяет).

Приведём тут набросок доказательства, оно похоже на доказательство задачи 3.4б). Докажем, что каждый человек получит 2 куска и веса кусков принадлежат отрезку $\left[\frac{1}{3}, d\right]$ где $d = \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$. Имеем $f = 2n - 3m$ *богатых* тортов, каждый из которых разрезается на 4 части и $u = 4m - 2n$ *обычных* тортов, каждый из которых разрезается на 3 части. Каждый обычный торт должен разрезаться на одинаковые куски, которые достаются $3u$ людям, причём второй кусок у каждого такого человека весит d, а все остальные $s = n - 3u = 7n - 12m$ *обычные* люди получают оба куска из богатых тортов. Заметим, что $\frac{m}{n} > \frac{1}{2}$ влечёт $\frac{f}{s} \geq \frac{1}{2}$.

Теперь вычтем $\frac{1}{3}$ из каждого куска обычного торта и d из каждого из остальных кусков мы получим разбиение оставшихся f **неотрицательных** «тортов» между s обычными людьми. Единственное оставшееся условие, что каждый человек должен получить не более двух кусков, а каждый «торт» должен быть разрезан не более чем на 4 части. Это условие соблюдается и мы можем восстановить разбиение обычных тортов. Следовательно, по 4.1б) (вместе с замечанием после него), для $\frac{f}{s} > \frac{1}{2}$ требуемое разбиение существует тогда и только тогда, когда $\frac{f}{s} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left\{\frac{v+1}{v}\right\} \cup \{\infty\}$ из чего следует ответ.

3.7. **Ответ.** $\frac{m}{n} \in \left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k-1}{k^2}\right] \cup \left\{\frac{d(2k-1)+2}{dk^2+k}\right\}_{d=1,2,\dots}$.
Решение аналогично 3.6б).

3.8. Частный случай задачи 3.5.

Идеи решения задачи 3.9 представлены в следующем разделе.

Неравные торты

Напомним, что через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ обозначаются наибольшее целое число, не превосходящее x, и наименьшее целое число, не меньшее x, соответственно.

4.2. а) **Ответ.** $\frac{3}{N}$, если $3 \mid N$; $\max\left\{\frac{3}{N} - \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}, \frac{1}{\lceil 2N/3 \rceil}\right\}$ в противном случае.

Если $3 \mid N$, тогда очевидно, что оптимальным будет разрезание тортов на куски по $\frac{3}{N}$ каждый.

Теперь предположим, что $3 \nmid N$. Тогда кто-то должен получить не менее двух кусков, поэтому ответ не превышает $\frac{3}{2N}$, и мы можем считать, что каждый человек получает по крайней мере два куска.

Далее, меньший торт разделен или на $\leq \lfloor 2N/3 \rfloor$ частей, или на $\geq \lceil 2N/3 \rceil$ частей (для $N = 2$ обязательно выполняется второй случай). В первом случае, один из этих кусков должен быть $\geq \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}$, поэтому его дополнение (для человека) $\leq \frac{3}{N} - \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}$. Во втором случае, меньший торт содержит кусок, который $\leq \frac{1}{\lceil 2N/3 \rceil}$. Итак, в любом случае минимальный вес не превышает хотя бы одного из чисел $\frac{3}{N} - \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}$ и $\frac{1}{\lceil 2N/3 \rceil}$, т.е. не превышает $D = \max\left\{\frac{3}{N} - \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}, \frac{1}{\lceil 2N/3 \rceil}\right\}$.

Осталось привести пример с минимальным весом D. Предположим сначала, что $D = \frac{3}{N} - \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}$. Разделим меньший торт на куски веса $\frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor} \geq D$, вырежем то же самое число кусков веса D каждый из большего торта и разделим все остальное на целые порции. Очевидно, такое разделение подходит. Во-втором случае, пример строится аналогично.

Замечание. Можно проверить, что $D = \frac{3}{N} - \frac{1}{\lfloor 2N/3 \rfloor}$ если $N = 3k + 2$, и $D = \frac{1}{\lceil 2N/3 \rceil}$ в противном случае.

б) **Ответ.** $\frac{7}{N}$, если $7 \mid N$; $\max\left\{\frac{7}{N} - \frac{2}{\lfloor 4N/7 \rfloor}, \frac{2}{\lceil 4N/7 \rceil}\right\}$ в противном случае.
Решение аналогично и предоставляется читателю.

Следующая задача подсказывает, как работает общий алгоритм. Нам нужно ввести некоторые

Определения и обозначения. Напомним, что *гиперграф* — это пара (V, E), где V — множество *вершин*, а E — множество *(гипер)ребер*, т.е. некоторых непустых подмножеств в

V. Гиперграф *однороден*, если все его ребра имеют одинаковое число элементов. Для любого гиперграфа $G = (V, E)$ мы можем построить его *подлежащий граф* $G' = (V, E')$ с тем же самым множеством вершин, в котором соединены ребром каждые две вершины, принадлежащие одному гиперребру G. Гиперграф *связен*, если его подлежащий граф связен.

В дальнейшем мы будем обозначать через $[b : c]$ следующую ситуацию: у нас есть торт веса b, который нужно разделить на c частей. Так, запись $2 \times [4 : 3] + 3 \times [7 : 4]$ будет обозначать набор из двух тортов веса 4, каждый из которых следует разделить на три части, и трех тортов веса 7, каждый из которых следует разделить на четыре части.

4.4. а) **Ответ.** $\frac{49}{6}$.

В наших обозначениях, имеем $[59 : 4] + [89 : 6] + 2 \times [41 : 5]$. Один из кусков в торте $[89 : 6]$ не меньше $\frac{89}{6}$; его дополнение не больше $\frac{49}{6}$. Осталось предъявить пример:

$$\left(4 \cdot \frac{59}{4}\right) + \left(6 \cdot \frac{89}{6}\right) + 2 \times \left(3 \cdot \frac{49}{6} + 2 \cdot \frac{33}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{59}{4} + \frac{33}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{89}{6} + \frac{49}{6}\right).$$

б) **Ответ.** $\frac{49}{6}$. В наших обозначениях, имеем $2 \times [41 : 5] + 3 \times [35 : 4] + 11 \times [29 : 2]$. Мы будем говорить, что торты веса 29 *маленькие*, а остальные *большие*. Заметим, что каждый человек должен получить два куска с общим весом 23. Предположим, что каждый кусок весит не менее чем $\frac{49}{6}$; тогда каждый кусок должен быть не более чем $23 - \frac{49}{6} = \frac{89}{6}$.

Если человек получает два куска из маленьких тортов (конечно, эти два торта различны), то средний вес оставшихся двух кусков в этих тортах $\frac{2\cdot 29 - 23}{2} > \frac{89}{6}$, что невозможно. Поэтому все 22 куска маленьких тортов попадают к разным людям, и, следовательно, все куски из больших тортов также попадают к разным людям.

Теперь давайте назовем торты веса 41 *богатыми*, а торты веса 35 *обычными*. Построим гиперграф с маленькими тортами в качестве вершин; каждое ребро будет соответствовать обычному торту и состоять из всех маленьких тортов, содержащих дополнения (для людей) к кускам из этого обычного торта. Этот гиперграф содержит по крайней мере две связные компоненты.

Теперь давайте удалим все куски обычных тортов и их дополнения в маленьких тортах. Далее, мы склеим оставшиеся куски каждой связной компоненты в один новый «торт». Посчитаем число кусков и вес этого «торта».

Предположим, что компонента содержит v вершин и e ребер. Из-за каждого ребра мы удалили 4 куска общего веса $4 \cdot 23 - 35 = 57$; поэтому число кусков в нашей компоненте уменьшилось на $4e$, а их общий вес — $57e$. Таким образом, средний вес оставшихся кусков равен $\frac{29v - 57e}{2v - 4e}$, что должно быть $\leq \frac{89}{6}$, что переписывается как $2v \geq 7e$. С другой стороны, так как компонента связная, мы имеем $v \leq 3e + 1$. Два полученных неравенства выполняются только если пара (v, e) — или $(4, 1)$, или $(7, 2)$. Следовательно, наш гиперграф должен содержать одну компоненту типа $(4, 1)$ и одну типа $(7, 2)$. В последней компоненте, один из кусков будет не меньше, чем $\frac{7\cdot 29 - 2\cdot 57}{14 - 8} = \frac{89}{6}$, что дает желаемую оценку.

Но из этой конструкции можно получить и пример! Именно, из компоненты типа $(4, 1)$ мы получили «торт» из 4 кусков с общим весом $4 \cdot 29 - 57 = 59$, а из оставшейся компоненты мы получаем «торт» из 6 кусков с общим весом $7 \cdot 29 - 2 \cdot 57 = 89$. Также у нас осталось $2 \times [41 : 5]$. Таким образом мы пришли к ситуации 4.4а) и поэтому можем взять разбиение из того примера и найти веса удаленных кусков. Получается пример

$$\begin{aligned}11 \times 29 + 2 \times 41 + 3 \times 35 = 4 \times \left(\frac{59}{4} + \frac{57}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{89}{6} + \frac{85}{6}\right) + \left(2 \cdot \frac{29}{2}\right) + \\ + 2 \times \left(3 \cdot \frac{49}{6} + 2 \cdot \frac{33}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{35}{4}\right) + 2 \times \left(3 \cdot \frac{53}{6} + \frac{17}{2}\right) = \\ = 4 \times \left(\frac{59}{4} + \frac{33}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{89}{6} + \frac{49}{6}\right) + 4 \times \left(\frac{57}{4} + \frac{35}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{85}{6} + \frac{53}{6}\right) + 2 \times \left(\frac{29}{2} + \frac{17}{2}\right).\end{aligned}$$

в) **Ответ.** $\frac{49}{138} = \frac{1}{23} \cdot \frac{49}{6}$ (могли бы догадаться?).

Умножим все веса на 29. Как обычно, мы будем считать, что каждый человек получает ровно два куска, и что каждый торт разделен или на две, или на три части. Тогда количества тортов обоих типов можно найти, и мы приходим к ситуации $12 \times [29:3] + 11 \times [29:2]$. Будем называть торты с тремя кусками *богатыми*, а остальные *обычными*. Предположим, что каждый кусок весит не менее чем $\frac{49}{6}$; тогда каждый кусок должен быть также не более чем $23 - \frac{49}{6} = \frac{89}{6}$.

По тем же причинам, что и выше, никто из людей не получит двух кусков из обычного торта. Поэтому все 22 куска обычных тортов достанутся различным людям, а их дополнения лежат в богатых тортах. Оставшиеся 14 кусков богатых тортов достанутся 7 оставшимся людям; будем называть этих людей *богатыми*. Теперь мы построим граф с богатыми тортами в качестве вершин; каждое ребро соответствует богатому человеку и соединяет два богатых торта, содержащих куски, принадлежащие этому человеку. Этот граф содержит по крайней мере 5 компонент связности.

Теперь удалим все куски богатых людей. Далее, мы склеим оставшиеся куски каждой связной компоненты в один новый «торт». Давайте найдем число кусков и вес этого «торта».

Предположим, что компонента содержит v вершин и e ребер (тогда $v \le e+1$). Из-за каждого ребра мы удалили 2 куска с общим весом 23; поэтому число кусков, удаленных из нашей компоненты, равно $2e$, а их общий вес — $23e$. Таким образом, средний вес оставшихся кусков равен $\frac{29v-23e}{3v-2e}$, что должно быть $\ge \frac{49}{6}$; это неравенство переписывается как $27v \ge 40e$. Это невозможно, если $v \le e$, поэтому мы имеем $v = e+1$ и, значит, $27 \le 13e$ или $e \le 2$. Таким образом, каждая связная компонента — дерево (следовательно, их ровно пять) и имеет максимум два ребра.

В самом «регулярном» случае есть две компоненты с двумя ребрами и три компоненты с одним ребром; тогда полученные новые «торты» будут иметь вид $2 \times [41:5] + 3 \times [35:4]$. По 4.4б), ответ будет не более чем $\frac{49}{6}$.

В любом другом случае появляется изолированная вершина, то есть все три куска этого торта спарены (в порции) с кусками из обычных тортов. Рассмотрим эти три дополнения и возьмем три обычных торта, содержащих их. Среднее трех оставшихся кусков этих тортов есть $\frac{4\cdot 29 - 3\cdot 23}{3} > \frac{89}{6}$, что невозможно. Оценка доказана.

Пример может быть снова получен из примера для 4.4б) добавлением удаленных кусков:

$$\begin{aligned}
11 \times 29 + 12 \times 29 &= 4 \times \left(\frac{59}{4} + \frac{57}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{89}{6} + \frac{85}{6}\right) + \left(2 \cdot \frac{29}{2}\right) + \\
&\quad + 4 \times \left(\frac{49}{6} + \frac{33}{4} + \frac{151}{12}\right) + 2 \times \left(\frac{49}{6} + 2 \cdot \frac{125}{12}\right) + \\
&\quad + 2 \times \left(2 \cdot \frac{35}{4} + \frac{23}{2}\right) + 2 \times \left(2 \cdot \frac{53}{6} + \frac{34}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{53}{6} + \frac{17}{2} + \frac{35}{3}\right) = \\
&= 4 \times \left(\frac{59}{4} + \frac{33}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{89}{6} + \frac{49}{6}\right) + 4 \times \left(\frac{57}{4} + \frac{35}{4}\right) + 6 \times \left(\frac{85}{6} + \frac{53}{6}\right) + \\
&\quad + 2 \times \left(\frac{29}{2} + \frac{17}{2}\right) + 4 \times \left(\frac{151}{12} + \frac{125}{12}\right) + \left(2 \cdot \frac{23}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{34}{3} + \frac{35}{3}\right).
\end{aligned}$$

3.9. а) **Ответ.** $\frac{5}{4} \cdot \frac{m}{n} - \frac{1}{2}$.

Докажем сначала верхнюю оценку. Как обычно, мы считаем, что у каждого человека по два куска, каждый торт разбит на 3 или 4 части, и есть $u = 4m - 2n$ *обычных* тортов по 3 части в каждом и $f = 2n - 3m$ *богатых* тортов из 4 частей. Поскольку $4f < n$ (это следует из $\frac{m}{n} > \frac{7}{12}$), кто-то должен получить оба куска из обычных тортов. Рассмотрим два торта, содержащие его куски; средний вес остальных кусков этих тортов равен $d = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{m}{n}\right)$, поэтому один из этих кусков весит не меньше d. А тогда его дополнение не тяжелее $\frac{m}{n} - d = \frac{5}{4} \cdot \frac{m}{n} - \frac{1}{2}$, что и требовалось.

Пример будет следовать из части б).

б) Мы будем исследовать лишь случай $\frac{m}{n} \in \left(\frac{7}{12}, \frac{2}{3}\right)$, когда проходит оценка из пункта а). В этом случае мы утверждаем, что $f(m,n) = \frac{5}{4} \cdot \frac{m}{n} - \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $\frac{m}{n} \in \left(\frac{7}{12}, \frac{22}{37}\right] \cup \left\{\frac{22d-3}{37d-2}\right\}_{d=1,2,\dots}$; ниже приведён набросок решения.

Умножим все веса на $4n$; тогда вес минимального куска будет $d = 5m - 2n$, а вес максимального — $t = 2n - m$.

В нашем случае, каждый человек получает по два куска, есть $f = 2n - 3m$ *богатых* тортов по 4 куска и $u = 4m - 2n$ *обычных* тортов по три куска. Далее, легко видеть, что два куска из богатых тортов не могут попасть одному человеку, поэтому у $4f$ человек по одному куску из богатых тортов, а у остальных $s = n - 4f$ *обычных* людей по два куска из обычных тортов.

Построим граф G с обычными тортами в качестве вершин, где каждое ребро будет соединять два торта, из которых взяты куски одного обычного человека. Теперь удалим всех обычных людей со всеми их кусками, и объединим каждую компоненту связности в новый торт. Если в какой-то компоненте было более одного ребра, то, удаляя обычных людей, мы получаем куски со средним весом $> d$, что невозможно. Значит, мы должны получить s новых тортов веса $8n - 4m = 4t$, состоящие из 4 кусков каждый, и $u - 2s$ старых тортов веса $4n$, состоящих из трёх кусков каждый. Заметим, что теперь новые торты должны быть разделены на равные части.

Теперь можно действовать, как в 3.4б). Вычтем d из каждого оставшегося куска обычного торта, and и t — из каждого куска богатого торта. Тогда новые торты исчезают, все сохранившиеся обычные торты становятся положительными «тортами» из трёх или менее частей, а все богатые торты становятся отрицательными «тортами» из 4 или менее частей. Беря все куски последних по модулю, мы приходим к такой постановке:

Пусть есть $u-2s$ равных тортов, и нам надо разрезать каждый на не более чем 3 части и перераспределить полученные куски в f групп одинакового суммарного веса, причём в каждой из групп должно быть не больше 4 кусков

Более того, можно понять, что из разрезания новых «тортов» восстанавливается разрезание (и распределение) старых. Значит, остаётся выяснить, при каких параметрах новая постановка имеет решение. Это можно сделать аналогично 4.1.

Общий алгоритм

Наконец, мы продемонстрируем работу общего алгоритма на одном нетривиальном примере — а именно, мы найдём значение $f(31, 52)$.

1.3. д) Мы не будем, как в некоторых предыдущих задачах, сразу предъявлять ответ, а покажем, как можно его *найти*, с самого начала.

Часть I. Сперва мы проделаем некий странный процесс; сам по себе он не даёт ни примера, ни оценки. Однако он выдаёт точный ответ, про который затем просто доказывается, что он достижим и оптимален.

В процессе мы будем делать некоторые предположения о том, как должен выглядеть оптимальный пример. Так что после того, как пример будет построен, нам останется убедиться в том, что без выполнения одного из предположений получается худший ответ. Мы отмечаем эти предположения богатым шрифтом и нумеруем их.

Подготовка. Умножим все веса на 52. **Предположим(1)**, что каждый человек получил по два куска. Поскольку $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{2}{3}$, мы также **предположим (2)**, что каждый торт разделён на 3 или 4 части. Тогда мы получаем

$$11 \times [52 : 4] + 20 \times [52 : 3].$$

Назовём торты с 4 кусками *богатыми*, а остальные — *обычными.*

Начальный шаг. В богатых кусках всего 44 вершины, что меньше количества людей. Значит, мы **предположим (3)**, что все эти 44 куска распределены по 44 разным людям; значит, найдутся ровно 8 человек, у которых все куски лежат в обычных кусках. Рассмотрим графс обычными тортами в качестве вершин, рёбра которого соответствуют обычным людям. Он содержит 20 вершин м 8 рёбер, так что в нём хотя бы 12 компонент связности.

Теперь мы **предположим(4)** что (i) все компоненты — это деревья (и поэтому их ровно 12), и (ii) все рёбра распределены между компонентами почти равномерно (то есть разность числа пёбер в двух компонентах не превосходит 1). В нашем случае это означает, что появилось 5 компонент связности из 2 вершин, а также 4 изолированных вершины. Тогда, удаляя все куски, принадлежащие обычным людям, и склеивая каждую компоненту в один торт, мы приходим к ситуации

$$11 \times [52:4] + 8 \times [73:4] + 4 \times [52:3].$$

Регулярный шаг 1. Теперь у нас есть 44 *маленьких* куска в 11 богатых тортах и 44 *больших* куска в остальных тортах; любой человек должен получить по маленькому и большому куску. Заметим, что средний вес куска в торте [52 : 3] меньше, чем в [73 : 4]. Неформально говоря, это значит, что нам надо разрезать торт [73 : 4] настолько поровну, насколько это возможно. Поэтому мы отложим пока эти торты и займёмся остальными.

Рассмотрим гиперграф с богатыми тортами в качестве вершин и рёбрами, построены по тортам [52 : 3] (каждое ребро состоит из богатых тортов, содержащих дополнения кусков одного торта [52 : 3]). Таким образом, в нашем гиперграфе 11 вершин и 4 ребра мощности ≤ 3. Тогда в нём не менее $11 - 4 \cdot (3-1) = 3$ компонент связности.

Как и раньше, мы **предполагаем(5)**, что в этом гиперграфе (i) в любой компоненте — наибольшее количество вершин, возможное при данном количестве рёбер (и поэтому компонент ровно три), и (ii) рёбра распределены по компонентам почти равномерно (т.е. в любых компонентах их количество различается максимум на 1). В нашем случае это означает, что получились две компоненты с одним ребром и тремя вершинами, а также одна с двумя рёбрами и пятью вершинами. Теперь, удаляя все куски тортов [52 : 4] вместе с их дополнениями и склеивая каждую компоненту в один торт, мы приходим к

$$2 \times [105:9] + [178:14] + 8 \times [73:4].$$

Регулярный шаг 2. Остались 32 *больших* куска в тортах $8 \times [73:4]$ и 32 *маленьких* куска в остальных тортах; каждый должен получить по одному куску каждого типа. Заметим, что средний вес куска в [105 : 9] больше, чем в [178 : 14]. Опять же, это означает, что надо резать [178 : 14] как можно точнее, посему мы работаем с остальными.

Рассмотрим гиперграф на тортах [73 : 4] как на вершинах, с рёбрами, соответствующими тортам [105 : 9]. В отличие от предыдущих случаев, этот гиперграф может оказаться связным. Тогда мы **предполагаем(6)**, что он связен и мы готовы завершать наш процесс. Действительно, делая граф связным, после стандартного выкидывания и склеивания получаем ситуацию

$$[178:14] + [256:14],$$

которая тривиальна. Действительно, минимальный кусок не превосходит $\frac{178}{14} = \frac{89}{7}$, и добиться такого значения легко: разрезать каждый торт на равные куски и раздать их всем людям поровну. Заметьте, что наша последняя объявленная цель (разрезать [178 : 14] как можно точнее) с блеском выполнена.

Итак, если все наши предположения выполнены, то минимальный кусок не превосходит $d = \frac{89}{7}$.

Часть II. Теперь мы построим пример, показывающий, что минимальный кусок может быть равен d. Для этого мы пойдём по нашему процессу в обратном порядке. Напоминаем, что в конце мы построили пример

$$[178:14] + [256:14] = \left(14 \cdot \frac{89}{7}\right) + \left(14 \cdot \frac{128}{7}\right).$$

Регулярный шаг 2. Торт [256 : 14] получился из $8 \times [73:4]$ удалением дополнений к кускам из $2 \times [105:9]$. Восстановим эти куски — например, с помощью «метода отрезков»; сейчас этот метод легко применить:

$$8 \times [73:4] + 2 \times [105:9] = 8 \times \left(3 \cdot \frac{128}{7} + \frac{127}{7}\right) + 2 \cdot \left(5 \cdot \frac{89}{7} + 4 \cdot \frac{90}{7}\right).$$

Регулярный шаг 1. Торты $2 \times [105 : 9]$ получились из $3 \times [52 : 4] + 3 \times [52 : 4]$ выкидыванием дополнений к кускам из $[52 : 3] + [52 : 3]$; аналогично, торт $[178 : 14]$ получен из других $4 \times [52 : 3]$ выкидыванием дополнений к кускам из $2 \times [52 : 3]$. Теперь мы восстановим эти торты; это делается автоматически, после того, как мы скажем, как куски из $[105 : 9]$ и $[178 : 14]$ разбиваются на куски в тортах $[52 : 4]$. Сделав это произвольным образом, получаем

$$11 \times [52:4] + 4 \times [52:3] = 4 \times \left(2 \cdot \frac{89}{7} + \frac{90}{7} + \frac{96}{7}\right) + 2 \times \left(\frac{89}{7} + 2 \cdot \frac{90}{7} + \frac{95}{7}\right) + \\ + 4 \times \left(3 \cdot \frac{89}{7} + \frac{97}{7}\right) + 2 \times \left(2 \cdot \frac{89}{7} + 2 \cdot \frac{93}{7}\right) + \\ + 2 \times \left(2 \cdot \frac{121}{7} + \frac{122}{7}\right) + 2 \times \left(2 \cdot \frac{120}{7} + \frac{124}{7}\right).$$

Начальный шаг. Нам осталось восстановить последние торты $16 \times [52 : 3]$ из $8 \times [73 : 4]$ добавление долей обычных людей; это также происходит автоматически:

$$16 \times [52:3] = 8 \times \left(2 \cdot \frac{128}{7} + \frac{108}{7}\right) + 8 \times \left(\frac{128}{7} + \frac{127}{7} + \frac{109}{7}\right).$$

Таким образом, пример построен:

$$11 \times [52:4] + 20 \times [52:3] = 4 \times \left(2 \cdot \frac{89}{7} + \frac{90}{7} + \frac{96}{7}\right) + 2 \times \left(\frac{89}{7} + 2 \cdot \frac{90}{7} + \frac{95}{7}\right) + \\ + 4 \times \left(3 \cdot \frac{89}{7} + \frac{97}{7}\right) + 2 \times \left(2 \cdot \frac{89}{7} + 2 \cdot \frac{93}{7}\right) + \\ + 2 \times \left(2 \cdot \frac{121}{7} + \frac{122}{7}\right) + 2 \times \left(2 \cdot \frac{120}{7} + \frac{124}{7}\right) + \\ + 8 \times \left(2 \cdot \frac{128}{7} + \frac{108}{7}\right) + 8 \times \left(\frac{128}{7} + \frac{127}{7} + \frac{109}{7}\right).$$

Часть III. Нам осталось проверить, что все наши предположения должны были выполняться. Это несложно делается теми же методами, что и в предыдущих разделах. Обозначим $d = \frac{89}{6}$, $t = 31 - d = \frac{128}{7}$. Если $f(31, 52) > d$, то размеры всех кусков находятся в интервале (d, t).

Предположение (1) выполнено, иначе наименьший кусок не превосходит $\frac{31}{3} < d$.

Предположение (2) необходимо, иначе мы получаем кусок либо размера $\leq \frac{52}{5} < d$, либо размера $\geq 31 - \frac{52}{2} > t$.

Предположение (3) верно: иначе, рассматривая человека с двумя кусками в двух богатых тортах, получаем, что средний вес оставшихся 6 кусков в этих тортах равен $\frac{52 \cdot 2 - 31}{6} < d$.

Предположение (4): пусть оно не выполняется. Тогда два ребра имеют общую вершину. Рассмотрим три торта, участвующие в этих рёбрах; средний вес 5 их кусков, не соответствующих нашим рёбрам, равен $\frac{3 \cdot 52 - 2 \cdot 31}{5} > t$.

Предположение (5) проверяется так же, как и в 4.4б).

Наконец, **Предположение (6)** можно не проверять: к этому момкету у нас уже получился торт $[178 : 14]$, а значит, минимальный кусок не может превосходить $\frac{178}{14} = d$.

Готово!

Предлагаем вам попытаться применить алгоритм к парам с Испытательного полигона, чтобы увидеть, как он работает!