Честный раздел тортов

И.И. Богданов, К.А. Кноп, Г.Р. Челноков, И.Н. Шнурников

1 Общая постановка

Для начала приведём несколько задач, которые рассматриваются в этом проекте. В каждой задаче первый пункт — несложный. Однако сложность следующих быстро растёт, и, например, задача 1.3д) — очень сложна!

Внимание! Если у вас не получается некоторый пункт — перейдите к следующим задачам! Решения некоторых из них могут сильно помочь (например, очень полезно доказать Теорему о трети, см. задачу 3.3б).

1.1. а) Три пирожных, каждое из которых весит по 200 г, разрезали на куски. Известно, что их можно раздать четырём детям так, чтобы все получили поровну. Докажите, что какой-то из кусков весит не больше 50 г. Можно ли число 50 заменить на меньшее?

б) Четыре пирожных, каждое из которых весит по 210 г, разрезали на куски. Известно, что их можно раздать 7 детям так, чтобы все получили поровну. Докажите, что какой-то из кусков весит не больше 50 г. Можно ли число 50 заменить на меньшее?

в) Четыре торта, каждый из которых весит по 3 кг, разрезали на куски. Известно, что их можно раздать 25 детям так, чтобы все получили поровну. Докажите, что какой-то из кусков весит не больше 230 г. Можно ли число 230 заменить на меньшее?

1.2. а) Пять тортов массы 1 кг нужно разрезать на несколько частей так, чтобы можно было раздать их поровну семи людям. Найдите максимальный возможный вес минимального куска в таком разрезании.

б) Та же задача для 7 тортов и 9 человек.

1.3. а) Восемь тортов массы 1 кг нужно разрезать на несколько частей так, чтобы можно было раздать их поровну девяти людям. Найдите максимальный возможный вес минимального куска в таком разрезании.

б) Та же задача для 11 тортов и 14 человек.

в) Та же задача для 14 тортов и 17 человек.

г) Та же задача для 13 тортов и 16 человек.

д) Та же задача для 31 торта и 52 человек.

Все эти задачи является частным случаем следующей общей постановки. (Везде далее все параметры — натуральные числа.)

Мегазадача. Есть m одинаковых тортов единичного веса и n людей. Требуется разрезать торты на несколько частей и раздать их людям так, чтобы каждый получил куски одного и того же суммарного веса. При этом надо, чтобы минимальный вес куска был как можно больше. Требуется найти этот наибольший возможный вес минимального куска.

Определение. Обозначим ответ в Мегазадаче через $f(m, n)$.

Несмотря на простоту постановки, решить Мегазадачу в общем виде весьма сложно. Оказывается, что постепенными итерациями возможно найти ответ для «большинства» значений m и n, но всё время некоторые области значений оказываются неразобранными.

Видимо, ответа на Мегазадачу в замкнутой форме не существует. Основная цель данного проекта — как можно ближе подойти к построению алгоритма, решающего Мегазадачу при каждых m и n. Этот алгоритм **не сформулирован** в виде задачи, однако является главным маяком проекта.

Внимание! Если у вас появился общий алгоритм решения (или чёткие предположения о том, как он выглядит) — мы всегда готовы это обсудить. Также это можно сделать, если у вас готов такой алгоритм для достаточно большого интервала значений дроби m/n.

В дальнейшем мы всегда считаем, что переменные обозначают натуральные числа.

Сразу сформулируем три общих вопроса, один весьма лёгок, на другой авторы, как ни странно, не знают ответа; третий формально не связан с проектом, но его решение тоже может помочь.

1.4. Пусть известно значение $f(m,n)$. Найдите $f(n,m)$.

Замечание. В силу этой задачи, достаточно исследовать лишь случай $m < n$; поэтому в дальнейшем мы работаем лишь с этим случаем.

1.5*. Верно ли, что $f(tm,tn) = f(m,n)$?

Замечание. Авторы считают (и это хорошо подтверждено практикой), что ответ на последний вопрос положителен. Поэтому во многих последующих пунктах мы будем задавать не конкретные значения m и n, а их частное.

1.6. а) На какое минимальное число кусков надо разрезать m одинаковых тортов, чтобы эти куски можно было раздать поровну n людям?

б) Каким может быть размер наименьшего куска в таком разрезании на наименьшее число кусков?

В следующих разделах мы предлагаем найти ответы на Мегазадачу для некоторых последовательностей значений и, соответственно, для некоторых интервалов значений. В каждом из разделов задачи идут примерно по возрастанию сложности; мы рекомендуем решать оба раздела параллельно. С другой стороны, если вы прорешаете один из разделов (почти) до конца — мы всегда можем добавить более сложных задач!

2 Некоторые специальные последовательности значений

2.1. а) Найдите $f(3k-1,3k)$.
б) Найдите $f(3k+1,3k+2)$.
в) Найдите $f(3k,3k+1)$.

2.2. Докажите, что $f(m,2m-1) = \frac{m+1}{6m-3}$ при $m \geq 4$.

2.3. а) Найдите $f(3,n)$.
б) Найдите $f(4,n)$.
в) Найдите $f(5,n)$.

2.4. Найдите $f(m,2m+1)$.

2.5. Найдите $f(2k+1,3k+2)$.

2.6. Найдите $f(3k+1,4k+1)$.

2.7. Найдите $f(5k+2,8k+3)$.

2.8. Найдите $f(5k-1,9k-2)$.

2.9. Найдите $f(17k-4,21k-5)$.

3 Серийные результаты

Дальнейшие задачи являются лишь некоторыми вехами на пути к общему алгоритму. Если у вас появляются какие-то другие **серийные** результаты, сдавайте их тоже!

Напомним, что мы всегда полагаем $m < n$.

3.1. Пусть n не делится на m. Докажите, что $f(m,n) \leq \frac{m}{2n}$. При каких значениях m и n в этой оценке достигается равенство?

3.2. а) Пусть $\frac{3}{4} < \frac{m}{n} < 1$. Докажите, что $f(m,n) \le \frac{m}{n} - \frac{1}{2}$.

б) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 1$. Докажите, что $f(m,n) \le \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$.

в) Пусть $\frac{2}{k+1} < \frac{m}{n} < 1$ при $k \ge 4$. Докажите, что $f(m,n) \le \frac{m}{n} - \frac{1}{k}$.

Внимание! Следующая оценка (пункт б)) очень важна!

3.3. а) Пусть $f(m,n) > \frac{m}{3n}$. Докажите, что в любом оптимальном примере для пары (m,n) каждому человеку досталось не более, чем по два куска.

б) (Теорема о трети) Докажите, что $f(m,n) \ge \frac{m}{3n}$.

в) Докажите, что при $\frac{2}{3} < \frac{m}{n} \le \frac{3}{4}$ в предыдущей оценке достигается равенство. (См. также задачу 3.11.)

3.4. а) Пусть $\frac{m}{n} < \frac{2}{3}$. Докажите, что $f(m,n) \le \frac{1}{4}$.

б) Найдите все значения (m,n) (такие, что $\frac{m}{n} < \frac{2}{3}$), для которых оценка предыдущего пункта достигается.

3.5. Пусть $\frac{2}{k+1} < \frac{m}{n} < \frac{2}{k}$. Найдите все такие пары (m,n), для которых $f(m,n) = \frac{1}{k+1}$.

3.6. а) Докажите, что $f(m,n) = \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$ при $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} \le \frac{5}{9}$.

б) Найдите все значения (m,n), для которых $f(m,n) = \frac{m}{n} - \frac{1}{3}$.

3.7. Пусть $\frac{2}{k+1} < \frac{m}{n} < \frac{2}{k}$. Найдите все такие пары (m,n), для которых $f(m,n) = \frac{m}{n} - \frac{1}{k}$ (при $k \ge 4$).

3.8. а) Найдите $f(m,n)$ при $\frac{7}{15} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$.

б) При каких ещё значениях m/n получается такой же ответ?

3.9. а) Найдите $f(m,n)$ при $\frac{7}{12} < \frac{m}{n} < \frac{22}{37}$.

б) При каких ещё значениях m/n получается такой же ответ?

3.10. а) Найдите $f(m,n)$ при $\frac{14}{17} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}$.

б) При каких ещё значениях m/n получается такой же ответ?

3.11*. Найдите все пары (m,n), для которых $f(m,n) = \frac{m}{3n}$.