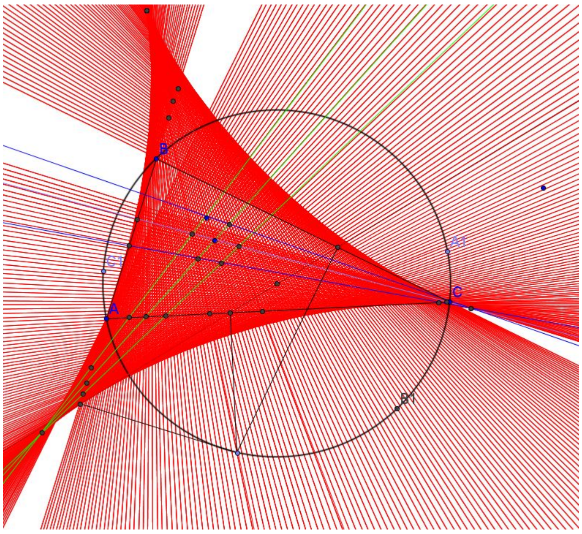
Ткани из прямых и окружностей

Алексей Заславский, Федор Нилов, Александр Полянский, Михаил Скопенков



Решения задач.

Сформулируем лемму, которая поможет решить задачи 0.1, 0.5, 0.6.

Лемма 0. Пусть $A'B'C'$ — чевианный треугольник некоторой точки относительно треугольника ABC (то есть прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке). Через произвольную точку M_1 на стороне AC проведем прямую, параллельную $A'B'$, и найдем точку M_2 ее пересечения с BC; через M_2 проведем прямую, параллельную $A'C'$ до пересечения с AB в точке M_3 и т.д. Тогда $M_1 = M_7$.

`Доказательство.`

Если точка M_1 совпадает с точкой B_1, то точки M_4 и M_7 тоже совпадут с B'. Иначе из теоремы Чевы получаем, что $\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}}\frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}} = 1$. А из теоремы Фалеса $\frac{\overline{B'C}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{B'M_1}}{\overline{M_2A'}}$, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{M_2A'}}{\overline{C'M_3}}$, $\frac{\overline{C'A}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{C'M_3}}{\overline{M_4B'}}$. Подставляя последние три равенства в первое, получаем, что: $\frac{\overline{B'M_1}}{\overline{M_4B'}} = 1$. Следовательно, точки M_1 и M_4 симметричны относительно точки B'. Точно также доказывается, что M_4 и M_7 симметричны относительно точки B'. Следовательно, $M_1 = M_7$.

`Решение задач раздела 0.`

Решение задачи 0.1

Первое решение. Пусть a, b, c — это длины сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть x — *направленная* длина отрезка AA_1 (то есть длина отрезка AA_1, взятая с положительным знаком, если вектора $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены, или с отрицательным знаком, если эти вектора противоположно направлены). Поскольку прямая A_1A_2 перпендикулярна биссектрисе угла BAC, то отсюда получаем $AA_2 = AA_1 = x$ (с учетом знака). Аналогично мы получаем, что $CA_3 = CA_2 = b - x$, $BA_4 = a - b + x$, $AA_5 = c - a + b - x$, $CA_6 = a - c + x$, $AA_7 = x$ (с учетом знака). То есть $AA_7 = x = AA_1$ (с учетом знака), а это значит, что $A_7 = A_1$.

Второе решение. По лемме 0 для треугольника Жергонна.

Решение задачи 0.2

В решениях задач 0.2, 0.3 и 0.4 рассматриваются углы между направлениями (векторами).

[0]Летняя конференция Международного математического Турнира Городов, 2–10 августа 2012 г.

Пусть O — точка пересечения прямых l_1, l_2, l_3. Пусть $(l_1, l_2) = \varphi_{1,2}$,$(l_2, l_3) = \varphi_{2,3}$, $(OA_1, l_1) = \varphi$. Так как длины отрезков OA_i одинаковы (при симметрии сохраняется длина), поэтому достаточно показать, что $(OA_7, l_1) = (OA_1, l_1) = \varphi$.

Так как $(OA_2, l_1) = -(OA_1, l_1) = -\varphi$, то $(OA_2, l_2) = -\varphi + \varphi_{1,2}$. Поэтому $(OA_3, l_2) = \varphi - \varphi_{1,2}$. Отсюда получаем, что $(OA_3, l_3) = \varphi - \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3}$. Поэтому $(OA_4, l_3) = -\varphi + \varphi_{1,2} - \varphi_{2,3}$. Отсюда получаем, что $(OA_4, l_1) = -\varphi + \varphi_{1,2} - \varphi_{2,3} - \varphi_{1,2} - \varphi_{2,3} = -\varphi - 2\varphi_{2,3}$. Действуя аналогично получаем, что $(OA_7, l_1) = -(OA_4, l_1) - 2\varphi_{2,3} = \varphi$.

Решение задачи 0.3

Пусть $(l_1, l_2) = \varphi_{1,2}$,$(l_2, l_3) = \varphi_{2,3}$ и $(l_{(1,2)}, l_1) = \varphi$, где $l_{(i,i+1)}$ — вектор, соединяющий точку O с основанием проекции из O на прямую A_iA_{i+1}. Так как расстояния от O до всех A_iA_{i+1} окажутся одинаковыми (при симметрии сохраняется длина), то достаточно показать, что $(l_{(7,8)}, l_1) = (l_{(1,2)}, l_1) = \varphi$.

Так как $(l_{(2,3)}, l_1) = -\varphi$. Поэтому $(l_{(2,3)}, l_2) = (l_{(2,3)}, l_1) + (l_1, l_2) = -\varphi + \varphi_{1,2}$. Аналогично $(l_{(3,4)}, l_2) = \varphi - \varphi_{1,2}$. Поэтому $(l_{(3,4)}, l_3) = (l_{(3,4)}, l_2) + (l_2, l_3) = \varphi - \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3}$. Аналогично $(l_{(4,5)}, l_3) = -\varphi + \varphi_{1,2} - \varphi_{2,3}$. Поэтому $(l_{(4,5)}, l_1) = (l_{(4,5)}, l_3) + (l_1, l_3) = -\varphi + \varphi_{1,2} - \varphi_{2,3} + (-\varphi_{1,2} - \varphi_{2,3}) = -\varphi - 2\varphi_{2,3}$. Действуя аналогично получаем, что $(l_{(7,8)}, l_1) = -(l_{(4,5)}, l_1) - 2\varphi_{2,3} = \varphi$.

Решение задачи 0.4.

Пусть $(l_1, l_2) = \varphi_{1,2}$,$(l_2, l_3) = \varphi_{2,3}$, $(A_1A_2, l_1) = \varphi$. Так как радиусы описанных окружностей около треугольников OA_iA_{i+1} равны между собой (это следует из теоремы синусов), то достаточно показать, что $(A_7A_6, l_3) = -(A_1A_2, l_2) = -\varphi - \varphi_{1,2}$ (из обратной теоремы синусов).

Так как $(A_3A_2, l_3) = -(A_1A_2, l_1) = -\varphi$. Поэтому $(A_3A_2, l_2) = -\varphi - \varphi_{2,3}$. Так как $(A_3A_4, l_1) = -(A_3A_2, l_2) = \varphi + \varphi_{2,3}$. Поэтому $(A_3A_4, l_3) = \varphi + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3} + \varphi_{2,3}$. Так как $(A_5A_4, l_2) = -(A_3A_4, l_3) = -\varphi - \varphi_{1,2} - 2\varphi_{2,3}$. Поэтому $(A_5A_4, l_1) = -\varphi - \varphi_{1,2} - 2\varphi_{2,3} - \varphi_{1,2}$. Так как $(A_5A_6, l_3) = -(A_5A_4, l_1) = \varphi + 2\varphi_{1,2} + 2\varphi_{2,3}$. Поэтому $(A_5A_6, l_2) = \varphi + 2\varphi_{1,2} + 2\varphi_{2,3} - \varphi_{2,3}$. Так как $(A_7A_6, l_1) = -(A_5A_6, l_2) = -\varphi - 2\varphi_{1,2} - \varphi_{2,3}$. Поэтому $(A_7A_6, l_3) = -\varphi - 2\varphi_{1,2} - \varphi_{2,3} + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3} = -\varphi - \varphi_{1,2}$.

Решение задачи 0.5.

По лемме 0 для ортотреугольника.

Замечание. Условие задачи можно сформулировать следующим образом.

Пусть точка A_1 лежит на прямой AB. Окружность, описанная около треугольника A_1AC, пересекает прямую BC в точке A_2. Окружность, описанная около треугольника A_2BA, пересекает прямую CA в точке A_3 и т.д. Докажите, что $A_1 = A_7$.

Решение задачи 0.6

По лемме 0 для серединного треугольника.

Решение задачи 0.7

а) В несколько другой, эквивалентной, формулировке теорема Паппа доказывается в книге [1, Глава 1].

б) Рассмотрим шестиугольник $A_1A_2A_3A_6A_5A_4$: прямые A_1A_2, A_3A_6, A_5A_4 пересекаются в точке R, а прямые A_4A_1, A_2A_3, A_6A_5 в точке G. Следовательно "диагонали" A_2A_5, A_3A_4 (последние две прямые уже пересекаются в точке B) и A_6A_1 в одной точке (то есть в точке B). Следовательно $A_7 = A_1$.

Решение задачи 0.8

а) Теорема Брианшона доказывается в книге [1, Глава 1].

б) Несложно убедиться, что прямые A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7 симметричны A_4A_3, A_3A_2, A_2A_1 относительно прямой OI. Следовательно $A_1 = A_7$.

Решение задачи 0.9

Первое решение (Д. Якутов). Давайте посчитаем угол $\angle GA_4R$:

$$\begin{aligned}
\angle GA_4R &= \pi - \angle GA_4B - \angle BA_4R \\
&= \pi - \angle GOB - \angle BA_5R \\
&= \pi - \angle GOB - (\pi - \angle GA_5R - \angle GA_5B) \\
&= \angle GA_5R + \angle GA_5B - \angle GOB \\
&= \angle GOR - \angle GOB + \angle GA_6B \\
&= \angle GOR - \angle GOB + (\pi - \angle GA_6R - \angle BA_6R) \\
&= \angle GOR - \angle GOB + (\pi - \angle GA_7R - \angle BOR) \\
&= (\pi - \angle BOR - \angle GOB + \angle GOR) - \angle GA_7R.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\angle GA_4R + \angle GA_7R = \pi - \angle BOR - \angle GOB + \angle GOR$.

По аналогичным соображениям $\angle GA_1R + \angle GA_4R = \pi - \angle BOR - \angle GOB + \angle GOR$. А значит, $\angle GA_1R = \angle GA_7R$. Также $\angle GA_1B = \angle GOB = \angle GA_7B$. Тогда точки G, B, A_1, A_7 — на одной окружности, и точки G, R, A_1, A_7 — тоже на одной окружности. Но эти две окружности имеют не более двух точек пересечения, одна из которых G, при этом $A_1 \neq G$ и $A_7 \neq G$, откуда следует, что $A_1 = A_7$.

Второе решение. Совершим инверсию с центром в точке O и произвольным радиусом. В результате красная, синяя и зеленая окружности перейдут в прямые. Пусть красная точка перейдет в точку C, синяя в точку A, а зеленая в точку B. Теперь будем следить за точками A_i. Через точку A_1 ($\in AB$) мы проводим зеленую (то есть проходящую через A и C) окружность, которая пересекается в точке A_2 с синей "окружностью" — прямой BC. Через точку A_2 проводим красную окружность, которая пересекается в точке A_3 с зеленой "окружностью" — прямой AC. Через точку A_3 проводим синюю окружность до пересечения в A_4 с красной "окружностью" — прямой AB и т.д.

Таким образом, мы получили переформулировку задачи 0.5, описанную в замечании к решению той задачи. Значит $A_1 = A_7$.

`Решение задач раздела 1.`

Большинство решений задач разделов 1,2,3 опираются на результат задачи 4.4.

Решение задачи 1.1.

Будем использовать результат задачи 4.4.

- Для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим гомотетию $H_O^{2^t}$ с центром в начале координат O и коэффициентом 2^t. Несложно проверить, что для любой точки A выполняется $H_O^{2^{t+s}}(A) = H_O^{2^t}(H_O^{2^s}(A))$. Множество γ_A тогда представляет собой лучи, выходящие из начала координат.

- Проведем через точку $A(1,1)$ прямые $y = 1$ (это γ_1) и $x = 1$ (это γ_2). Через каждую точку $B \in \gamma_1$ проведем луч γ_B. Покрасим такие лучи в красный цвет. Теперь покрасим в зеленый и синие цвета прямые $H_O^{2^t}(\gamma_1)$ и $H_O^{2^t}(\gamma_2)$ соответственно, то есть будут прямые, параллельные осям Ox и Oy. Очевидно, что любые цветные лучи или прямые не пересекаются.

- Рассмотрим круг радиуса 1 с центром в точке (1;1). Несложно убедиться, что через каждую точку этого круга можно провести ровно одну прямую (или луч) каждого цвета.

Следовательно, из задачи 4.4 получаем, что данные лучи и прямые образуют ткань. Нетрудно убедиться, что и предложенные в условии задачи цветные прямые тоже образуют ткань.

Решение задачи 1.2.

Первое решение. Из решением задачи 0.7б) следует, что это ткань.

Второе решение. Сведём данную задачу к задаче 1.1. Для этого совершим проективное преобразование, переводящее прямую, проходящую через две фиксированные точки, в бесконечно удалённую прямую.

Решение задачи 1.3.

Из решения задачи 0.8б) следует, что это ткань.

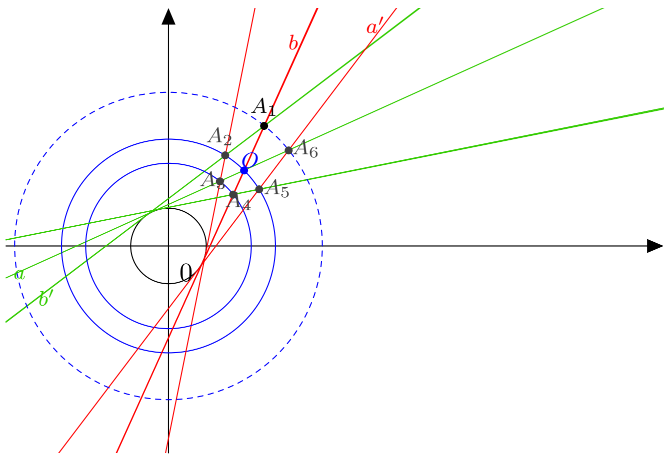
Решение задачи 1.4.
Из решения задачи 0.8а) следует, что это ткань.
Решение задачи 1.5.
Указанные прямые не образуют ткань.
Решение задачи 1.6.
Указанные прямые не образуют ткань.

`Решение задач раздела 2.`
Решение задачи 2.1.

В качестве примера возьмём образ при инверсии ткани из прямых, параллельных сторонам треугольника.

Решение задачи 2.2.

Первое решение (Е. Стрельцова). Докажем, что данные прямые и окружности образуют ткань; см. рисунок снизу. Выберем круг в правой верхней четверти плоскости так, чтобы он не имел общих точек с единичным кругом и находился выше прямой $y = 1$. Радиус круга возьмем < 1. Теперь через каждую точку круга проходит ровно одна красная и ровно одна зеленая прямые,так как из любой точки можно провести ровно одну касательную каждого цвета. Через каждую точку T проходит ровно одна окружность с центром в начале координат (Z), потому что с фиксированным радиусом (ZT) и с фиксированным центром (Z) можно провести ровно одну окружность. Окружности с центром Z не могут совпасть с касательными к единичной окружности. А зеленые и красные прямые не могут совпасть, так как круг выше прямой $y = 1$. Концентрические окружности не могут касаться друг друга. А зеленые и красные прямые не могут касаться окружностей с центром Z, потому что у этих окружностей радиус > 1 и так как выбранный круг не имеет с единичным общих точек. Касательные пересекают эти окружности, так как проходят через точки внутри кругов (заключенных этими окружностями), которые полностью содержат единичный круг. Значит, условие слоения выполняется.



Зеленая (a) и красная (b) прямые через точку O симметричны относительно прямой ZO. Значит, $A_3 = S_{ZO}(A_4)$. Тогда красная прямая через A_3 симметрична зеленой прямой через A_4 относительно прямой ZO. Поэтому $A_2 = S_{ZO}(A_5)$. Получаем, что зеленая прямая через A_2 (b') симметрична красной прямой через A_5 (a').

Далее, $a = S_{ZO}(a'), b = S_{ZO}(b')$. Поэтому $A_6 = a \cap a' = S_{ZO}(b \cap b') = S_{ZO}(A_1)$. Значит, $A_6 = S_{ZO}(A_1)$. Тогда $ZA_6 = S_{ZO}(ZA_1)$. Следовательно, $ZA_6 = ZA_1$, то есть синяя окружность через точку A_6 проходит через точку A_1. Мы проверили, что выполняется условие замыкания.

Второе решение. Будем использовать результат задачи 4.4.

- Для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим поворот $R_O^{\pi t}$ вокруг начала координат O на угол πt. Несложно проверить, что для любой точки A выполняется $R_O^{\pi(t+s)}(A) = R_O^{\pi t}(R_O^{\pi s}(A))$, где $t, s \in \mathbb{R}$. Множество γ_A тогда представляет собой дуги окружностей с центром в начале координат.

- Проведем через точку $A(0, 2)$ лучи $y = \sqrt{3}x + 2, x > -\sqrt{3}/2$ (это γ_1) и $y = -\sqrt{3}x + 2, x < \sqrt{3}/2$ (это γ_2). Эти касательные к единичной полуокружности. Через каждую точку $B \in \gamma_1$ проведем дугу γ_B окружности с началом в начале координат. Покрасим такие дуги в красный цвет. Теперь покрасим в зеленый и синие цвета лучи $R_O^{\pi t}(\gamma_1)$ и $R_O^{\pi t}(\gamma_2)$ соответственно, то есть это лучи, являющиеся касательными к единичными полуокружностям.

- Рассмотрим круг радиуса $1/2$ с центром в точке $(0;2)$. Несложно убедиться, что через каждую точку этого круга можно провести ровно одну дугу или луч каждого цвета.

Следовательно, из задачи 4.4 получаем, что данные дуги и лучи образуют ткань. Нетрудно убедиться, что и предложенные в условии задачи цветные прямые и окружности тоже образуют ткань.

Решение задачи 2.3.
Будем использовать результат задачи 4.4.

- Для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим поворот $R_O^{\pi t}$ вокруг начала координат O на угол πt. Несложно проверить, что для любой точки A выполняется $R_O^{\pi(t+s)}(A) = R_O^{\pi t}(R_O^{\pi s}(A))$, где $t, s \in \mathbb{R}$. Множество γ_A тогда представляет собой дугу окружности с центром в начале координат.

- Проведем через точку $A(0,2)$ лучи $y = \sqrt{3}x + 2, x > -\sqrt{3}/2$ (это γ_1) и $x = 0, y > 0$ (это γ_2). Это касательная к единичной полуокружности и луч, выходящий из начало координат. Через каждую точку $B \in \gamma_1$ проведем дугу γ_B окружности с началом в начале координат. Покрасим такие дуги в красный цвет. Теперь покрасим в зеленый и синие цвета лучи $R_O^{\pi t}(\gamma_1)$ и $R_O^{\pi t}(\gamma_2)$ соответственно.

- Рассмотрим круг радиуса $1/2$ с центром в точке $A(0;2)$. Несложно убедиться, что через каждую точку этого круга можно провести ровно одну прямую каждого цвета.

Следовательно, из задачи 4.4 получаем, что данные лучи и дуги образуют ткань. Нетрудно убедиться, что и предложенные в условии задачи цветные прямые и окружности тоже образуют ткань.

Решение задачи 2.4.
Будем использовать результат задачи 4.4.

- Для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим параллельный перенос $T_{(0,t)}$ на вектор $(0,t)$. Несложно проверить, что для любой точки A выполняется $T_{(0,t+s)}(A) = T_{(0,t)}(T_{(0,s)}(A))$, где $t, s \in \mathbb{R}$. Множество γ_A тогда представляет собой прямые, параллельные оси Oy.

- Проведем через точку $A(1/2 + 1/\sqrt{8}, 1/2 + 1/\sqrt{8})$ дугу окружности $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4, x > 1/2, y > 1/2$ (это γ_1) и прямую $y = 1/2 + 1/\sqrt{8}$ (это γ_2). Через каждую точку $B \in \gamma_1$ проведем прямые γ_B, параллельные оси Oy. Покрасим такие прямые в красный цвет. Теперь покрасим в зеленый и синие цвета дуги $T_{(0,t)}(\gamma_1)$ и прямые $T_{(0,t)}(\gamma_2)$ соответственно.

- Рассмотрим круг радиуса $1/2 - 1/\sqrt{8}$ с центром в точке $A(1/2 + 1/\sqrt{8}; 1/2 + 1/\sqrt{8})$. Несложно убедиться, что через каждую точку этого круга проходит ровно одна дуга обобщенной окружности каждого цвета.

Следовательно, из задачи 4.4 получаем, что данные дуги образуют ткань. Из этого следует, что и предложенные в условии задачи цветные прямые и окружности тоже образуют ткань.

Решение задачи 2.5.

Действуем в соответствии с задачей 4.4. В качестве преобразований рассмотрим гомотетии с центром в начале координат. Тогда красные прямые — прямые, проходящие через начало координат. Зеленые окружности — окружности, касающиеся первой пары отрезков. Синие окружности — окружности, касающиеся другой пары указанных отрезков.

Из задачи 4.4 получаем, что рассматриваемые прямые и подходящие дуги рассматриваемых окружностей образуют ткань.

Решение задачи 2.6.

Действуем в соответствии с задачей 4.4. В качестве преобразований рассмотрим гомотетии с центром в начале координат. Тогда красные прямые — прямые, проходящие через начало координат. Зеленые окружности — окружности, с центром в начале координат. Синие окружности — окружности, касающиеся пары указанных отрезков.

Из задачи 4.4 получаем, что рассматриваемые множества прямых и окружностей образуют ткань. Из этого следует, что и предложенные в условии задачи цветные прямые и окружности тоже образуют ткань.

`Решение задач раздела 3.`

Можно решить задачу, аналогичную задаче 4.4, и для тора и для гиперболоида вращения.

Решение задачи 3.1.

Действуем в соответствии с задачей 4.4. В качестве преобразований рассмотрим повороты вокруг оси вращения. Тогда красные окружности — параллели. Зеленые и синие окружности — окружности Вилларсо.

Из задачи 4.4 получаем, что рассматриваемые множества прямых и окружностей образуют ткань.

Решение задачи 3.2. Рассмотрим точку O. Проведем через неё меридиану γ_1 и окружности Вилларсо γ_2, γ_3. Все меридианы покрасим в красный цвет, окружности Вилларсо, получаемые из γ_2 поворотом, покрасим в зеленый цвет, окружности Вилларсо, получаемые из γ_3 поворотом, покрасим в синий цвет. Рассмотрим шар с центром в точке O и радиуса $R < \frac{r}{100}$ (r — расстояние между γ_1 и осью вращения). Внутри него две окружности Вилларсо пересекаются не более, чем в одной точке. Пересечение шара и тора обозначим через Ω.

Рассмотрим произвольную точку O', лежащую в $\mathbf{\Omega}$. Проведем через неё красный меридиан w_1, синюю окружность w_2 и зеленую окружность w_3. Пусть все точки A_i, которые будут получаться в результате постороения будут лежать в $\mathbf{\Omega}$. Пусть выбрана точка $A_1 \in w_1$. Проведём через неё зеленую окружность w_2'. Получим точку A_2 пересечения w_2' и w_3. Построим через точку A_2 красную окружность w_1'. Получаем точку A_3 пересечения w_1' и w_2. Построим через точку A_3 синюю окружность w_3'. Получим точку A_4 пересечения w_3' и w_1. Проведём через A_4 зеленую окружность w_2''. Получим точку A_5 пересечения w_2'' и w_3. Построим через точку A_5 красную окружность w_1''. Получаем точку A_5 пересечения w_1'' и w_2. Построим через точку A_6 синюю окружность w_3''. Получим точку A_7 пересечения w_3'' и w_1.

Пусть α плоскость, содержащая окружность w_1. Несложно убедиться, что окружности w_3',w_1', w_2' симметричны w_2'', w_1'', w_3'' относительно плоскости α. Следовательно, $A_1 = A_7$.

Решение задачи 3.3.

Действуем в соответствии с задачей 4.4. В качестве преобразований рассмотрим повороты вокруг оси вращения. Тогда красные окружности — параллели. Зеленые и синие окружности — прямые, лежащие в гиперболоиде вращения.

Из задачи 4.4 получаем, что рассматриваемые множества прямых и окружностей образуют ткань.

`Указания и решения задач раздела 4.`

Указание к задаче 4.1.

Перечислим несколько возможных примеров множеств синих обобщённых окружностей:

- (В) произвольный пучок прямых (Задачи 1.1 и 1.2);
- (В) концентрические окружности;
- (В) дуги окружностей, полученные из некоторой одной дуги с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox или Oy (Задача 4.3);

Из теоремы Графа–Зауэра (Задача 4.12) следует, что не существует других примеров синих прямых. Из классификации Шелехова всех тканей, образованных пучками окружностей, [3, Теорема 0.1] следует, что не существует других примеров, для которых множество синих окружностей является пучком. Описание всех возможных примеров синих окружностей, не обязательно состоящих из пучков, является открытой проблемой.

Указание к задаче 4.2.

Перечислим несколько возможных примеров множеств синих обобщённых окружностей:

- (В) произвольный пучок прямых (Задачи 1.1 и 1.2);
- (В) пучок окружностей с предельной точкой в начале координат O и общей радикальной осью параллельной оси Ox.
- (В) дуги окружностей, полученные из некоторой одной дуги с помощью гомотетий с центром в начале координат (Задача 4.3).

Из теоремы Графа–Зауэра (Задача 4.12) следует, что не существует других примеров синих прямых. Из классификации Шелехова всех тканей, образованных пучками окружностей, [3, Теорема 0.1] следует, что не существует других примеров, для которых множество синих окружностей является пучком. Описание всех возможных примеров синих окружностей, не обязательно состоящих из пучков, является открытой проблемой.

Указание к задаче 4.3.

Рассмотрим инверсию с центром в одной из предельных точек. Полученные пучки обобщенных окружностей образуют ткань по задаче 4.4.

Решение задачи 4.4.

Условие слоения выполняется в соответствии с третьим условием задачи. Покажем, что выполняется условие замыкания.

Возьмём произвольную точку O внутри круга. Проведем через нее красную (w_1), зеленую (w_2) и синюю (w_3) дуги обобщённых окружностей. Пусть все точки A_i, которые будут получаться в результате построения будут лежать в $\mathbf{\Omega}$. Пусть точка $A_1 \in w_1$ и $t \in \mathbb{R}$ таково, что $R_t(O) = A_1$ (в соответствии с первым условием леммы такое t найдётся: пусть $w_1 = \gamma_X$ для некоторой точки $X \in \gamma_1$, тогда существуют такие $y, z \in \mathbb{R}$, что $R_y(X) = O$ и $R_z(X) = A_1$, тогда $R_{z-y}(O) = R_{z-y}(R_y(X)) = R_z(X) = A_1$, то есть $t = z - y$). Проведём через точку A_1 зеленую дугу w_2' обобщённой окружности. Получим точку A_2 пересечения w_2' и w_3. Построим через точку A_2 красную дугу w_1' обобщённой окружности. Получим точку A_3 пересечения w_1' и w_2. Построим через точку A_3 синюю дугу w_3' обобщённой окружности. Получим точку A_4 пересечения w_3' и w_1. И т.д.

Теперь покажем, что $R_t(O) = A_7$, отсюда будет следовать, что $A_1 = A_7$.

Нам известно, что $R_t(O) = A_1$, поэтому $R_t(w_2) = w_2'$ (это верно в связи с тем, что $R_t(w_2)$ — зеленая дуга, проходящая через A_1, а зеленых дуг, кроме w_2', проходящих через точку A_1, нет), следовательно, $R_t(A_3) \in w_2' \cap w_1' = A_2$. Так как $R_t(A_3) = A_2$, то $R_t(A_4) = O$ (из аналогичных соображений). Так как $R_t(A_4) = O$, то $R_t(A_5) = A_6$. Так как $R_t(A_5) = A_6$, то $R_t(O) = A_7$. Задача решена.

Указание к задачам 4.5–4.6.

Данные задачи рассматриваются в [4].

Указание к задаче 4.7.

Решение данной задачи дано в книге Прасолова и Соловьёва [2].

Указание. Пусть уравнения красных прямых — $a_1x+b_1y-1 = 0$, $a_2x+b_2y-1 = 0$, $a_3x+b_3y-1 = 0$, а уравнения синих — $c_1x + d_1y - 1 = 0$, $c_2x + d_2y - 1 = 0$, $c_3x + d_3y - 1 = 0$. Докажите, что тогда уравнение кривой можно записать в виде

$$p(a_1x + b_1y - 1)(a_2x + b_2y - 1)(a_3x + b_3y - 1) + q(c_1x + d_1y - 1)(c_2x + d_2y - 1)(c_3x + d_3y - 1) = 0$$

для некоторых действительных чисел p и q.

Указание к задаче 4.8.

Эта задача получается из предыдущей с помощью проективной двойственности.

Указание к задаче 4.9.

Использовать задачу 4.8.

Указание к задачам 4.10–4.11.

Использовать задачу 4.9. Рисунок к задаче 4.10, принадлежащий А. Ганеийану Себдани и Е. Ашуриуну, приводится на первой странице решений.

Список литературы

[1] Zaslavsky A.A. Akopyan A.V. *Geometry of conics.* AMS, 2007.

[2] V. Prasolov and Yu. Soloviev. *Elliptic functions and algebraic equations.* Moscow: Factorial, 1997.

[3] A. M. Shelekhov. Classification of regular three-webs formed by pencils of circles. *J. Math. Sciences*, 143(6):3607–3629, 2007.

[4] S. L. Tabachnikov. Geometry of equations. *Kvant*, 10, 1988. in Russian.