

# КАК ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СФЕРЫ, ИЛИ ДВУМЕРНЫЕ МЕАНДРЫ <sup>1</sup>

С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович и А. Скопенков <sup>2</sup>

## 1 Примеры и основные задачи

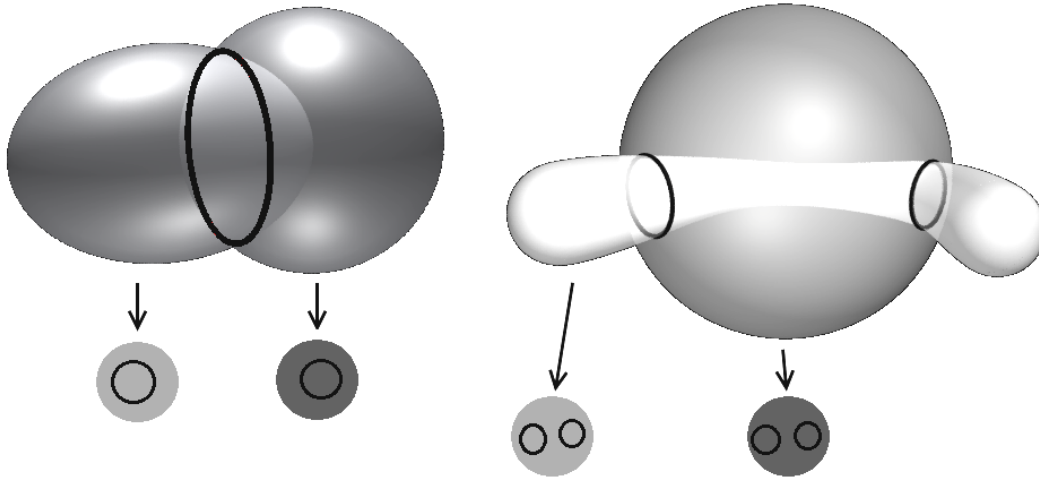


Рис. 1: Криволинейные сферы, пересекающиеся по окружности (слева) и по двум окружностям (справа)

Как могут пересекаться криволинейные сферы в трехмерном пространстве? На рисунках 1 и 2 изображены пары криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающиеся по набору окружностей.

Видимо, термин *криволинейная сфера* интуитивно понятен Вам. Если нет, то прочтите строгое определение ниже. Здесь мы только отметим, что в этом тексте криволинейные сферы подразумеваются *не имеющими самопересечений*.

Скорее всего, для решения задач Вам не понадобятся строгие определения. Пожалуйста, изображайте криволинейные сферы с помощью понятных (для членов жюри) рисунков, а не задавайте их формальными конструкциями. Если задача сформулирована как утверждение, то требуется его доказать. Если задача оказывается слишком сложной, попробуйте решить соседние задачи, они могут содержать подсказки. Нерешенные задачи отмечены звездочками.

**1.1.** Нарисуйте пару криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающихся по объединению трех непересекающихся окружностей так, что в каждой сфере эти окружности

- (a) ограничивают 3 диска (как справа-снизу-слева на рис. 2).
- (b) не ограничивают 3 дисков (как справа-снизу-справа на рис. 2).

**1.2.** Нарисуйте пару криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающихся по объединению четырех непересекающихся окружностей так, что в каждой сфере эти окружности

- (a) ограничивают 4 диска (как на рис. 3.a).
- (b) „параллельны“, или „одна внутри другой“ (как на рис. 3.b).
- (c) расположены как на рис. 3.c.

<sup>1</sup>Мы благодарим за полезные замечания и обсуждения С. Ландо и анонимного рецензента Московской Математической Конференции Школьников.

<sup>2</sup>Поддержан Грантом фонда Саймонса-НМУ

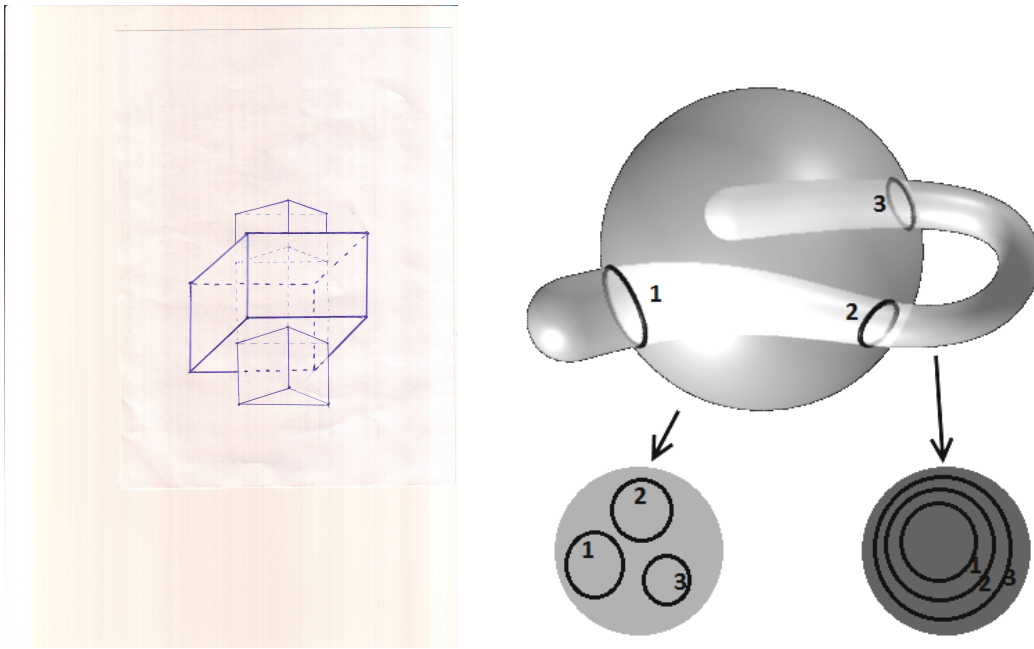


Рис. 2: Криволинейные сферы, пересекающиеся по двум окружностям (слева) и по трем окружностям (справа)

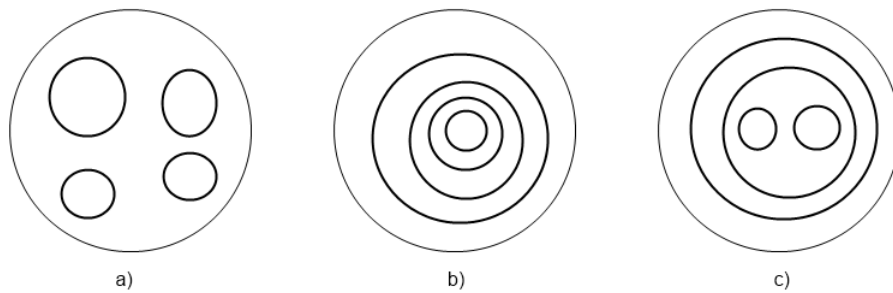


Рис. 3: Четыре окружности на сфере

Предположим, что  $M$  и  $N$  — наборы из одинакового числа окружностей на криволинейных сферах  $S$  и  $T$ . Тогда  $M$  расположено в  $S$  так же, как  $N$  в  $T$ , если есть биекция между связными компонентами дополнений  $S - M$  и  $T - N$ , при которой две связные компоненты дополнения  $S - M$  соседние тогда и только тогда, когда две соответствующие связные компоненты  $T - N$  соседние. (Или, что то же самое, если пары  $(S, M)$  и  $(T, N)$  кусочно-линейно гомеоморфны.)

**1.3.**  $(ij)$ ,  $i, j \in \{a, b, c\}$ . Нарисуйте пару криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающихся по объединению четырех непересекающихся окружностей так, что в одной сфере эти окружности расположены как на рис. 3.i, а в другой — как на 3.j.

В этом тексте мы изучим две следующие проблемы и их обобщения. (Вполне возможно, вы в данный момент не сможете их решить, так что лучше отложите их и порешайте другие задачи.)

Криволинейные сферы пересекаются *транскверсально*, если в окрестности любой точки пересечения оно выглядит как пересечение двух плоскостей по прямой. (Строгое определение дано ниже в тексте.)

**1.4.** (а) **Проблема Ландо.** Пусть  $M$  и  $N$  — два набора одинакового числа окружностей на сфере. Существует ли пара криволинейных сфер в трехмерном пространстве, которые транскверсально пересекаются по конечному наюору непересекающихся окружностей, расположенных

в одной сфере как  $M$ , а в другой — как в  $N$ ?

(b) Существует ли алгоритм, проверяющий существование таких двух криволинейных сфер? (См. „Связь с графами“ ниже.)

(c)\* Существует ли такой полиномиальный алгоритм?

На рис. 1, слева, две сферы пересекаются по окружности; каждая сфера делится окружностью на 2 связных компоненты, каждая из которых имеет одну соседнюю с ней компоненту (в той же сфере). На рис. 1, справа, (и на рис. 2 слева) две криволинейные сферы пересекаются по двум окружностям; каждая из сфер делится окружностями на 3 связные компоненты, из которых две имеют 1 соседнюю компоненту, а одна — 2 соседние компоненты. На рис. 2, справа, две криволинейные сферы пересекаются по трем окружностям; каждая сфера делится окружностями на 4 связные компоненты; в одной сфере количества соседей у компонент равны 3, 1, 1, 1, а в другой — 1, 2, 2, 1.

**1.5. Проблема соседственных последовательностей.** Даны последовательности  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  положительных целых чисел. Существуют ли две криволинейные сферы  $S$  и  $T$  в трехмерном пространстве, пересечение которых состоит из  $n - 1$  окружностей и делит

- $S$  на  $n$  связных компонент, которые могут быть так пронумерованы, что у  $i$ -ой связной компоненты  $x_i$  соседних связных компонент в  $S$ , и
- $T$  на  $n$  связных компонент, которые могут быть так пронумерованы, что у  $i$ -ой связной компоненты  $y_i$  соседних связных компонент в  $T$ ?

#### Некоторые строгие определения.

Напомним, что Вы сможете решить все предложенные задачи фактически не используя приводимые строгие определения. Мы приводим удобные в рамках данного текста определения; они могут отличаться от общепринятых математических терминов.

В этом тексте *криволинейной окружностью*, или, сокращенно, *окружностью*, называется замкнутая несамопересекающаяся ломаная в трехмерном пространстве. Определение многогранника (несамопересекающегося, но не обязательно выпуклого) приведено в [D], см. также [W]. *Криволинейной сферой* называется многогранник в трехмерном пространстве (точнее, его двумерная поверхность), который разбивается на части любой лежащей на нем окружностью. См. рис. 1. (Такие многогранники называются топологически эквивалентными сфере. Это условие эквивалентно условию  $V - E + F = 2$ .)

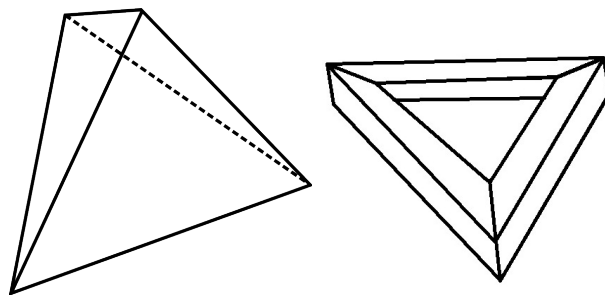


Рис. 4: Криволинейная сфера (слева) и фигура, не являющаяся криволинейной сферой (справа)

Для упрощения рисунков будем изображать вместо многогранника ‘близкую’ к нему *криволинейную* поверхность. Например, криволинейную сферу или ‘сосиску’, как на рисунке 2 справа. Вместо замкнутой ломаной будем изображать — ‘близкую’ к ней замкнутую *кривую*.

Подмножество  $X$  трехмерного пространства назовем *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в  $X$ . *Компонентой связности* или *связной компонентой* подмножества  $Y$  трехмерного пространства назовем максимальное связное подмножество в  $X$ ,

т.е. такое связное подмножество  $Y \subset X$ , что не существует связного подмножества  $Z$ , для которого  $Y \subset Z \subset X$  и  $Y \neq Z \neq X$ .

Пусть  $M$  — объединение непересекающихся окружностей в криволинейной сфере  $S$ . Две связные компоненты дополнения  $S - M$  называются *соседями*, если их замыкания пересекаются.

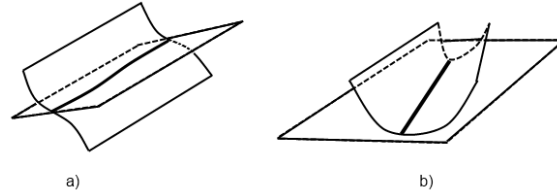


Рис. 5: Трансверсальное (слева) и не трансверсальное (справа) пересечения

Обозначим через  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^3$  шар радиуса  $r$  с центром в  $x$ . Пересечение двух криволинейных сфер  $S, T \subset \mathbb{R}^3$  *трансверсально*, если для любой точки  $x \in S \cap T$  существует  $r > 0$  такое, что и  $B(x, r) - S$ , и  $B(x, r) \cap (T - S)$  состоят из двух связных компонент, а каждая компонента  $B(x, r) - S$  содержит компоненту  $B(x, r) \cap (T - S)$ .

Вы можете использовать следующую теорему и ее следствие без доказательства.

**Теорема Жордана.** *Криволинейная сфера делит трехмерное пространство ровно на две части. Две точки пространства, не принадлежащие сфере, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей криволинейной сферы.*

**Следствие.** *Пусть  $S$  и  $T$  — криволинейные сферы, трансверсально пересекающиеся по конечному набору  $S \cap T$  непересекающихся окружностей. Обозначим через  $V$  внутренность сферы  $S$  (точнее, ограниченную часть дополнения  $\mathbb{R}^3 - S$ ). Пусть  $Q$  — связная компонента дополнения  $T - S$ , расположенная внутри  $S$ . Тогда  $Q$  делит  $V$  на две части. Две точки шара  $V$ , не лежащие на  $Q$ , лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей  $Q$ .*

### Связь с графами.

Пусть  $M$  — объединение непересекающихся окружностей в криволинейной сфере  $S$ . Определим (двойственный к  $M$ ) граф  $G = G(S, M)$  следующим образом. Вершины — связные компоненты  $S - M$ . Вершины соединяются ребром, если соответствующие компоненты — соседи.

На рис. 6 показаны графы для сфер  $S, T$  с рис. 2 справа и набора окружностей  $S \cap T$ . Аналогичным образом две криволинейные сферы, пересекающиеся по набору окружностей, определяют пару графов. Проблема Ландо требует описать получающиеся таким образом пары графов, а проблема соседственных последовательностей — получающиеся наборы степеней их вершин.<sup>3</sup>

### Поблажки.

Команда получает „поблажку“ за каждое правильно ( $\geq +$ .) записанное решение. Компьютерная программа, проходящая тесты, предложенные жюри, и имеющая понятную структуру расценивается как записанное решение. Большая понятная членам жюри картинка расценивается как записанное построение примера. Жюри также может награждать „поблажками“ за красивые решения, решения сложных задач и за (некоторые) решения, записанные в

<sup>3</sup>Вот другая интерпретация, предложенная И.Н. Шнурниковым. Даны единичный квадрат на плоскости и (кусочно-линейная) функция на нем, строго положительная на границе квадрата. Диск соответствует одной криволинейной сфере (с проколом), график функции (над диском) — другой криволинейной сфере, множество нулей функции — пересечению криволинейных сфер.

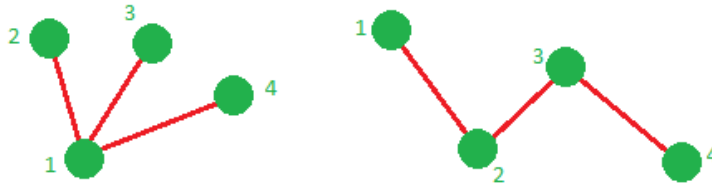


Рис. 6: Два графа для сфер с рис. 2 справа

TeX-e. „Поблажек“ у жюри бесконечно много. Можно также сдавать задачи устно, платя по „поблажке“ за каждую попытку.

Мы приглашаем школьников, успешно продвинувшихся в решении задач и работающих над задачами для исследования, консультироваться по поводу возникающих вопросов и идей решения.

## 2 Проблема соседственных последовательностей

Пара  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  последовательностей положительных целых чисел называется *реализуемой*, если существуют две криволинейные сферы  $S$  и  $T$  в трехмерном пространстве, пересечение которых состоит из  $n - 1$  окружностей и делит

- $S$  на  $n$  связных компонент, которые могут быть так занумерованы, что у  $i$ -ой связной компоненты  $x_i$  соседних связных компонент в  $S$ , и
- $T$  на  $n$  связных компонент, которые могут быть так занумерованы, что у  $i$ -ой связной компоненты  $y_i$  соседних связных компонент в  $T$ ?

Пара  $(S, T)$  сфер называется *реализацией* пары  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

**2.1.** ( $n$ ),  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Какие пары последовательностей из  $n$  положительных целых чисел реализуемы?

**2.2.** (a) Если пара  $(\vec{x}, \vec{y})$  последовательностей реализуема, то  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2n - 2$ .

(b) Двойственный граф  $G(S, M)$  к набору  $M$  непересекающихся окружностей в криволинейной сфере  $S$  является деревом.

Последовательность  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  положительных целых чисел называется *деревянной*, если  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n - 2$ .

**2.3.** Если последовательность  $\vec{x}$  деревянная, то в ней не менее  $x_1$  единиц.

**2.4.** Пара  $(\vec{x}, \vec{x})$  реализуема для любой деревянной последовательности  $\vec{x}$ .

**2.5.** Пусть  $\vec{x}, \vec{y}$  — деревянные последовательности, в которых все единицы находятся в конце, и  $x_1 \geq y_1$ . Тогда последовательности  $\vec{x}' := (x_1 - y_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_{n - y_1 + 1})$  и  $\vec{y}' = (y_2, y_3, \dots, y_{n - y_1 + 2})$  — деревянные.

**2.6.** Какие пары деревянных последовательностей можно получить из  $((1, 1), (1, 1))$  с помощью перестановок и замен пары векторов  $(\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n))$  на пару:

(a)  $(\vec{x}' = (a, x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 1, \dots, 1), \vec{y}' = (y_1 + a - 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1, 1, \dots, 1))$  (число новых единиц равно  $a - 2$  для  $\vec{x}'$ , и  $a - 1$  для  $\vec{y}'$ ; здесь  $a$  может быть различно для различных замен:  $((1, 1), (1, 1)) \xrightarrow{a=3} ((3, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1)) \xrightarrow{a=4} ((4, 3, 1, 1, 1, 1, 1), (6, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$ ).

(b)  $(\vec{x}' = (x_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1), \vec{y}' = (y_1 + 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1))$ .

### 3 Проблема Ландо

Пара  $(M, N)$  наборов из одинакового числа непересекающихся окружностей на сфере, называется *реализуемой*, если существует пара криволинейных сфер в трехмерном пространстве, которые трансверсально пересекаются по конечному объединению непересекающихся окружностей, которые расположены в одной сфере так же, как  $M$ , а в другой — как в  $N$ .

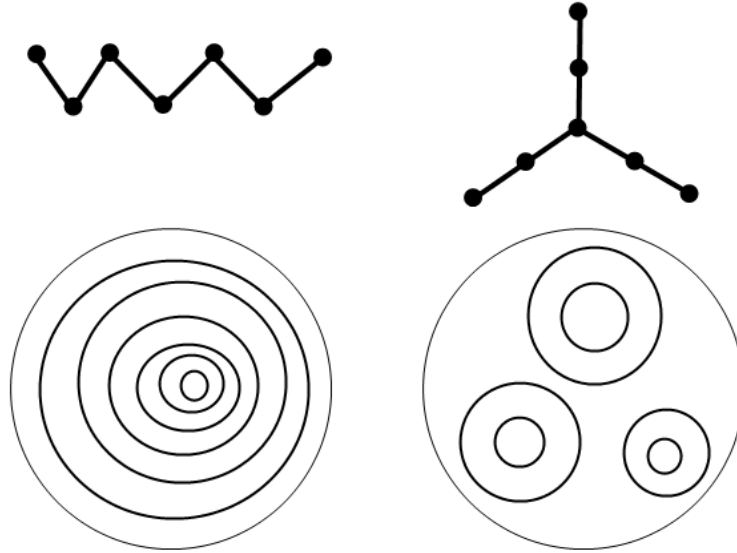


Рис. 7: Реализуема ли эта пара?

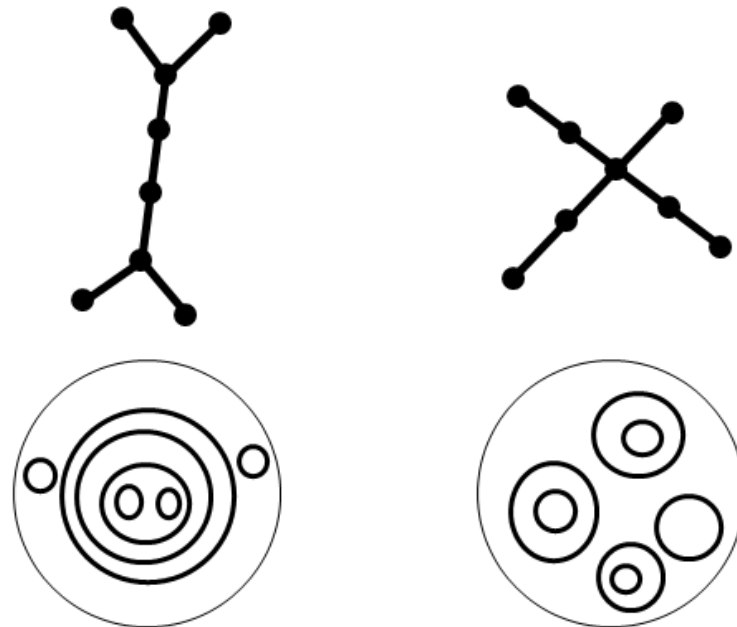


Рис. 8: Реализуема ли эта пара?

**3.1.** (а) Любая пара наборов, каждый из которых состоит из  $n \leq 4$  непересекающихся окружностей, реализуема.

(б) Является ли пара на рис. 7 реализуемой? Один граф — цепочка из 6 ребер, другой — триод с ‘лучами’ из двух ребер.

(с) Является ли пара на рис. 8 реализуемой? Один граф — звезда с 4 ‘лучами’, три ‘луча’ состоят из двух ребер, а один ‘луч’ — из одного ребра. Другой граф представляет собой букву ‘H’ с ‘горизонтальной перекладиной’ из трех ребер.

(d) Существует нереализуемая пара из двух наборов из одинакового числа непересекающихся окружностей.

**3.2.** Даны целые числа  $n$  и  $k$ .

(а) Какие наборы непересекающихся окружностей реализуемы в паре с набором  $n$  окружностей, ограничивающих  $n$  непересекающихся дисков? (Или, что то же самое, какие графы реализуемы в паре со звездой с  $n$  лучами?)

(б) Какие графы реализуемы в паре с графом, представляющим собой объединение по одному общему ребру звезды с  $n$  лучами и звезды с  $k$  лучами?

(с) \* Какие наборы непересекающихся окружностей реализуемы в паре с набором  $n$  ‘параллельных’ окружностей? (Или, что то же самое, какие графы реализуемы в паре с цепочкой длины  $n + 1$ ?)

**3.3.** Пусть  $S$  и  $T$  — криволинейные сферы, трансверсально пересекающиеся по конечному набору  $S \cap T$  непересекающихся окружностей. Тогда связные компоненты  $S - T$  можно покрасить в черный и белый цвета так, чтобы любые две компоненты одного цвета не были соседями.

До конца этого параграфа  $M, N$  будут объединениями одинакового числа непересекающихся окружностей на криволинейных сферах  $S, T$  (Ни  $M$ , ни  $N$  не обязано совпадать с  $S \cap T$ .)

Для связной компоненты  $P$  множества  $S - M$  обозначим за  $\partial P$  объединение граничных (краевых) окружностей компоненты  $P$ . Легко видеть, что связные компоненты  $P$  и  $Q$  дополнения  $S - M$  являются соседями в том и только том случае, когда  $\partial P \cap \partial Q \neq \emptyset$ .

**3.4. Незацепленные семейства окружностей.**

Пусть  $S$  и  $T$  — криволинейные сферы, трансверсально пересекающиеся по конечному набору  $S \cap T$  непересекающихся окружностей. Пусть  $P$  и  $Q$  — две связные компоненты дополнения  $S - T$ , расположенные внутри  $T$ .

(а) Если  $Q$  является криволинейным диском (то есть, если граница компоненты  $Q$  состоит из одной окружности), то  $\partial P$  находится целиком внутри одной компоненты дополнения  $T - \partial Q$ .

(б) Если  $Q$  является криволинейным цилиндром (то есть, если граница компоненты  $Q$  состоит из двух окружностей), то  $\partial P$  целиком содержится либо в кольцевой компоненте дополнения  $T - \partial Q$  (то есть, в компоненте с двумя граничными окружностями), либо в объединении двух дисковых (то есть имеющих одну граничную окружность) компонент дополнения  $T - \partial Q$ .

(с) Покрасим связные компоненты дополнения  $T - \partial Q$  в черный и белый цвета так, чтобы любые две соседние компоненты оказались разного цвета. Тогда  $\partial P$  целиком содержится в объединении одинаково окрашенных компонент дополнения  $T - \partial Q$ .

Знак  $\sqcup$  обозначает объединение непересекающихся множеств.

**3.5.** Пусть  $S$  и  $T$  такие криволинейные сферы, что  $S \cap T$  расположено на  $S$  как на рис. 9. Обозначим за  $A_i$  ‘внешние’ окружности, за  $B$  ‘большую разделяющую’ окружность, а за  $C$  — объединение ‘внутренних’ окружностей, см. рис. 9.

(а) Для каждого  $i$  объединение  $B \cup C$  лежит по одну сторону от  $A_i$  в  $T$ .

(б) Объединение  $B \cup C$  лежит в одной связной компоненте  $T - \sqcup_i A_i$ .

**3.6. Проблема продолжения вложения.** (а) Любые две непересекающиеся окружности в единичной сфере являются границами двух непересекающихся криволинейных дисков внутри сферы.

(б) Для каких трех непересекающихся окружностей  $p, q_1, q_2$  на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейный диск  $P$  и криволинейный цилиндр  $Q$  внутри этой сферы, для которых  $\partial P = p$  и  $\partial Q = q_1 \sqcup q_2$ ? (Рис. 10 слева.)

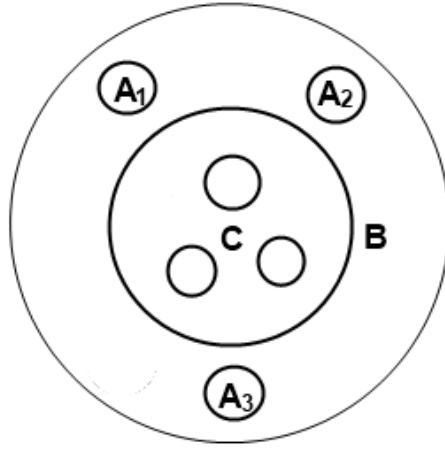


Рис. 9: Пересечение  $S \cap T$  на сфере  $S$

Рис. 10: Непересекающийся криволинейный диск и криволинейный цилиндр вне шара (слева), непересекающиеся криволинейные цилиндры, один из которых заузлен, вне шара (справа)

(с) Для каких четырех непересекающихся окружностей  $p_1, p_2, q_1, q_2$  на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейные цилиндры  $P$  и  $Q$  внутри этой сферы, для которых  $\partial P = p_1 \sqcup p_2$  и  $\partial Q = q_1 \sqcup q_2$ ? (Рис. 10 справа.)

(d) Для каких двух непересекающихся семейств  $p, q$  непересекающихся окружностей на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейные сферы с дырками  $P$  и  $Q$  внутри этой сферы, для которых  $\partial P = p$  и  $\partial Q = q$ ?

(е) Существуют ли три непересекающихся семейства  $p, q, r$  непересекающихся окружностей на единичной сфере, такие что

- каждая из трех пар  $(p, q)$ ,  $(q, r)$  и  $(p, r)$  может быть продолжена внутрь сферы (до непересекающихся криволинейных сфер с дырками) в смысле пункта (d);
- не существует непересекающихся криволинейных сфер с дырками  $P, Q$  и  $R$  внутри этой сферы, для которых  $\partial P = p$ ,  $\partial Q = q$  и  $\partial R = r$ ?<sup>4</sup>

(f) Для каких  $m$  непересекающихся семейств  $p_1, \dots, p_m$  непересекающихся окружностей на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейные сферы с дырками  $P_1, \dots, P_m$  внутри этой сферы, такие что  $\partial P_i = p_i$  для всех  $i = 1, \dots, m$ ?

Пусть  $S$  и  $T$  — криволинейные сферы, для которых все кроме одной компоненты  $S - T$  имеют по одному соседу. (Оставшаяся компонента может иметь одного или более соседей.) Эта оставшаяся компонента называется *криволинейной сферой с дырками*. *Криволинейный диск* — это криволинейная сфера с 1 дыркой (= с одним соседом). *Криволинейный цилиндр* — это криволинейная сфера с 2 дырками (= с двумя соседями).

Пусть  $M$  и  $N$  — два набора непересекающихся окружностей в единичной сфере  $S$ . Покрасим связные компоненты  $S - N$  в черный и белый цвета так, чтобы соседние компоненты были разных цветов. Набор  $M$  *лежит по одну сторону* (в сфере) от  $N$ , если  $M$  содержится в наборе компонент  $S - N$ , одинаково покрашенных. Наборы  $M$  и  $N$  *не зацеплены* (в сфере), если  $M$  лежит по одну сторону от  $N$  и  $N$  лежит по одну сторону от  $M$ . См. рис. 11.

**3.7.** (a) Существует два набора  $M$  и  $N$  непересекающихся окружностей в сфере, такие что  $M$  лежит по одну сторону от  $N$ , но  $N$  не лежит по одну сторону от  $M$ .

(b) Верно ли, что если пары  $M, N$  и  $N, P$  наборов окружностей на криволинейной сфере не зацеплены, то не зацеплена и пара  $M, P$ , то есть, транзитивно ли отношение незацепленности?

<sup>4</sup>Сравните с известным примером колец Борромео.



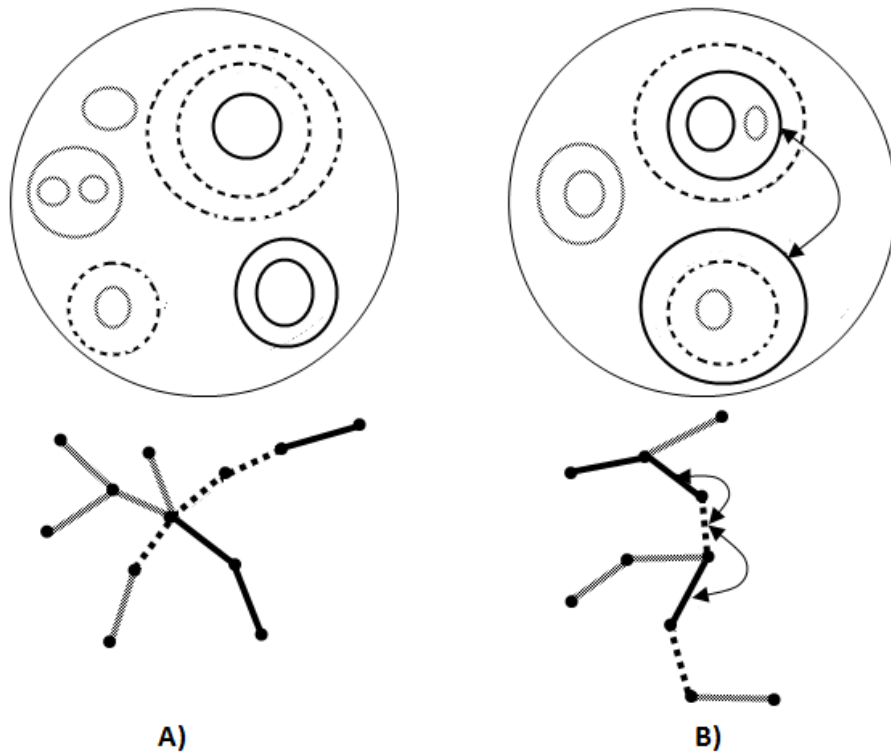


Рис. 11: (А): набор ‘пунктирных’ окружностей и набор ‘жирных’ окружностей не зацеплены (В): набор ‘пунктирных’ окружностей и набор ‘жирных’ окружностей зацеплены, поскольку выделенный стрелочками путь между двумя ‘жирными’ окружностями пересекает ‘пунктирные’ окружности по нечетному числу точек.

(с) Для набора  $M$  непересекающихся окружностей в единичной сфере  $S$  обозначим за  $\overset{\circ}{M}$  объединение черных компонент связности  $S - M$ . два набора  $M$  и  $N$  не зацеплены если и только если для любых черно-белых раскрасок  $S$  относительно  $M$  и относительно  $N$ , таких что  $\overset{\circ}{M} \cup \overset{\circ}{N} \neq S$ , будет либо  $\overset{\circ}{M} \subset \overset{\circ}{N}$ , (Есть два способа выбрать  $\overset{\circ}{p}$  для данного  $p$ ; один из них — дополнение другого.) либо  $\overset{\circ}{N} \subset \overset{\circ}{M}$ , либо  $\overset{\circ}{M} \cap \overset{\circ}{N} = \emptyset$ .

# КАК ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СФЕРЫ, ИЛИ ДВУМЕРНЫЕ МЕАНДРЫ

С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович и А. Скопенков

## 4 Промежуточный финиш. Некоторые решения и новые задачи

1.1 и 1.2. Аналогично решению задачи 2.4.

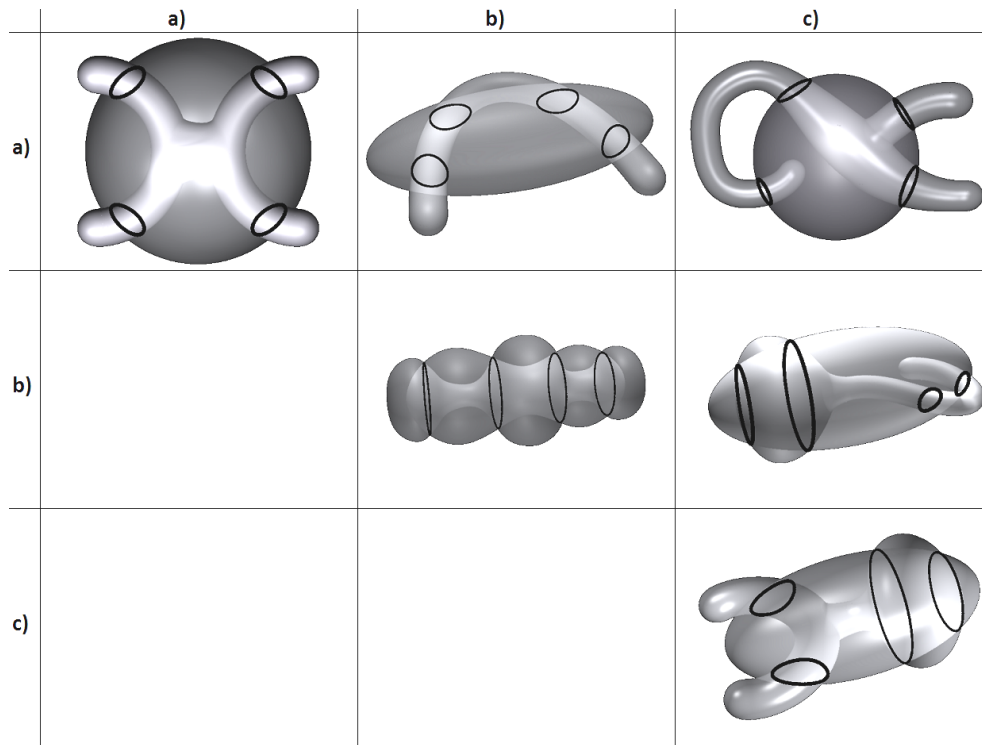


Рис. 12: К решению задачи 1.3.

**1.3.** Случай  $i = j$  выводится аналогично задаче 2.4. Случаи ab, ac, bc см. на рис. 12.

**1.4.** (a) Ответ содержится в решении задачи 4.5.

(b) Такой алгоритм дается в ответе к 4.5. (Очевидно, он не полиномиален.)

**1.5. Теорема 1.** Пусть  $n$  — положительное целое число, а  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — последовательности положительных целых чисел. Тогда условие  $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 2n - 2$  равносильно существованию криволинейных сфер  $S$  и  $T$ , пересечение которых состоит из  $n - 1$  окружностей и делит

- $S$  на  $n$  связных компонент, которые могут быть занумерованы, так что у  $i$ -ой связной компоненты  $x_i$  соседей в  $S$ , и

- $T$  на  $n$  связных компонент, которые могут быть занумерованы, так что у  $i$ -ой связной компоненты  $y_i$  соседей в  $T$ .

Это следует из Теоремы 1' (задача 4.3) ниже.

**2.1. Ответ.** Пары  $(\vec{x}, \vec{x})$  реализуемы для  $\vec{x}$ , равного с точностью до перестановок одной из пар

$$(1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (4, 1, 1, 1, 1), (3, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1, 1).$$

Другие реализуемые пары равны с точностью до перестановок парам двух последовательностей равной длины из приведенного списка.

**2.2.** (а) Предположим, что криволинейные сферы  $S, T$  реализуют пару  $(\vec{x}, \vec{y})$ . Вспомним определение графа  $G = G(S, S \cap T)$  из параграфа 1. Количество его вершин равно  $n$ . Из  $k$ -ой исходит  $x_k$  ребер. Поэтому количество ребер равно  $(x_1 + \dots + x_n)/2$ . Очевидно, что  $G$  связан. По теореме Жордана о кривой<sup>5</sup>  $G$  делится любым своим ребром на несколько частей. Значит  $G$  — дерево. Поэтому число ребер равно  $n - 1 = (x_1 + \dots + x_n)/2$ . Аналогично  $n - 1 = (y_1 + \dots + y_n)/2$ .

*Набросок альтернативного решения (а) Т. Новика.* Индукция по числу окружностей. Утверждение верно для одной окружности (на каждой сфере только 2 диска, значит  $n = 2$ ). Каждая следующая окружность делит одну из связных компонент на две части, и добавляет к ним по одной граничной окружности.

(б) Очевидно,  $G$  связан. По теореме Жордана о кривой  $G$  разделяется любым ребром. Значит,  $G$  — дерево.

**2.3.** Если количество единиц равно  $s$ , то  $2n - 2 = x_1 + \dots + x_n \geq x_1 + 2(n - 1 - s) + s = 2n - 2 + x_1 - s$ . Значит,  $s \geq x_1$ .

**2.4.** Пусть  $S$  — единичный куб. Рассмотрим семейство  $M$  окружностей на  $S$ , ‘реализующее’  $\vec{x}$ . (Существование такого семейства доказывается индукцией. При переходе используется удаление висячей вершины.) Покрасим в черный и белый цвета дополнение в  $S$  к этим окружностям так, что соседние компоненты будут разного цвета. Рассмотрим близкую к  $S$  криволинейную сферу  $T$  такую, что  $S \cap T = M$ , каждая черная компонента  $T$  лежит внутри  $S$ , и каждая белая компонента  $T$  лежит снаружи  $S$ . Тогда  $S$  и  $T$  реализуют  $(\vec{x}, \vec{x})$ .

**2.5.** Согласно задаче 2.3  $x_1 \leq s$ . Тогда

$$x_{n-y_1+1} = x_{n-y_1+2} = \dots = x_{n-y_1+1} = \dots = x_n = y_{n-y_1+1} = y_{n-y_1+2} = \dots = y_n = 1.$$

$$\text{Следовательно } \left( \sum_{i=1}^{n-y_1+1} x_i \right) - y_1 + 1 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) - y_1 + 1 - (y_1 - 1) = 2(n - y_1 + 1) - 2$$

$$\text{и } \left( \sum_{i=2}^{n-y_1+2} y_i \right) = \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - y_1 - (y_1 - 2) = 2(n - y_1 + 1) - 2.$$

Значит новые последовательности деревянные.

**2.6.** *Ответ:* любая пара.

(а) Индукция по  $n$ . База индукции при  $n = 2$  очевидна. Предположим, утверждение верно для всех  $n < k$ , докажем его для  $n = k$ .

Если последовательности  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$  и  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$  получаются друг из друга перестановками, то пара  $(\vec{u}, \vec{v})$  реализуема по задаче 2.4. Если последовательности  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$  и  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$  не получаются друг из друга перестановками, можно так переупорядочить последовательности, что  $u_1 \neq v_1$  и все единицы находятся в концах последовательностей. Без ограничения общности  $u_1 < v_1$ . Обозначим

$$a := u_1, \quad n := k - u_1 + 1, \quad x_i = u_{i+1} \text{ для } i = 1, \dots, n, \quad y_1 := v_1 - u_1 + 1, \quad y_i = v_i \text{ для } i = 2, \dots, n.$$

Согласно задаче 2.3  $u_i = 1$  для всех  $i \geq n + 2$  и  $v_i = 1$  для всех  $i \geq n + 1$ . Поэтому пара  $(\vec{u}, \vec{v})$  получается из пары  $(\vec{x}, \vec{y})$  применением данного в задаче преобразования. Имеем

$$x_1 + \dots + x_n = u_2 + \dots + u_{n+1} = 2k - 2 - u_1 - (u_1 - 2) = 2n - 2 \quad \text{и}$$

<sup>5</sup>**Теорема Жордана о кривой.** Окружность на сфере делит сферу ровно на две части. Две точки сферы, не лежащие на этой окружности, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить некоторой сферической ломаной, не пересекающей окружности.

$$y_1 + \dots + y_n = v_1 + \dots + v_n - (u_1 - 1) = 2k - 2 - (u_1 - 1) - (u_1 - 1) = 2n - 2.$$

Значит последовательности  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  деревянные. Из  $u_1 > 1$  имеем  $n < k$ . Шаг индукции доказан.

(b) Индукция по  $n$ .

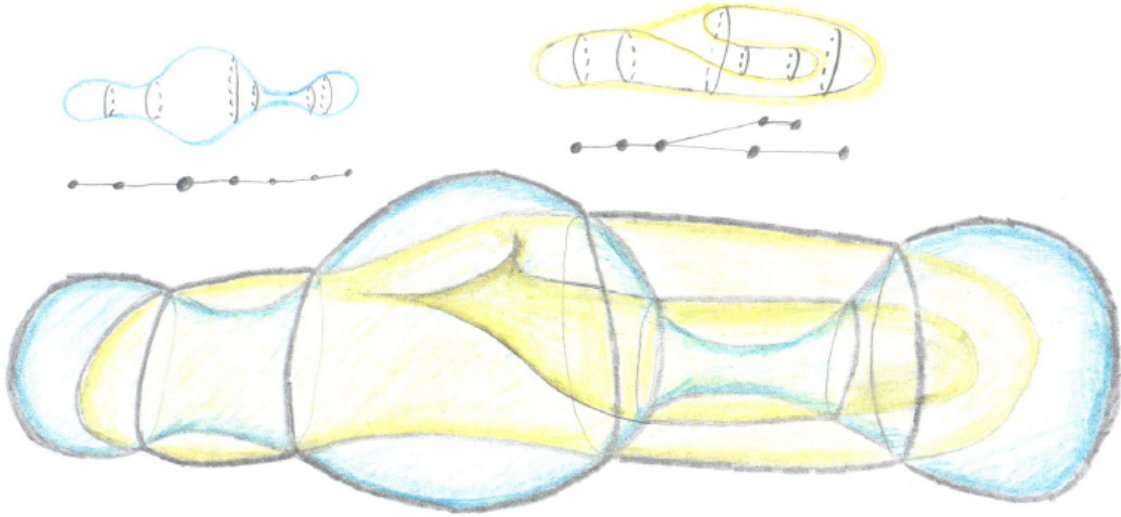


Рис. 13: Криволинейные сферы, реализующие пару с рисунка 7.

**3.1.** (a) Следует из задач 1.1 и 1.3.

(b) Да, см. рис. 13. Альтернативная конструкция. Пусть  $S$  и  $T'$  — криволинейные сферы с рисунка 2. Пусть  $T''$  — сфера внутри  $T'$  'близкая и параллельная'  $T'$ . Возьмем компоненту связности  $X$  дополнения  $\mathbb{R}^3 - S - T'$  лежащую внутри  $T'$ , такую что ее граница содержит связную компоненту  $T' - S$ , являющуюся диском. Пусть  $T$  — криволинейная сфера, полученная путем соединения  $T'$  и  $T''$  тонкой трубкой в  $X$ . Тогда  $S$  и  $T$  будут требуемыми.

(c) Нет. Этот факт получен с помощью компьютерной программы, основанной на решении задачи 4.5.

(d) Контрпример изображен на рис. 14. Подсказка: используйте задачу 3.5 (или задачу 3.4 в форме 4.7 ниже).

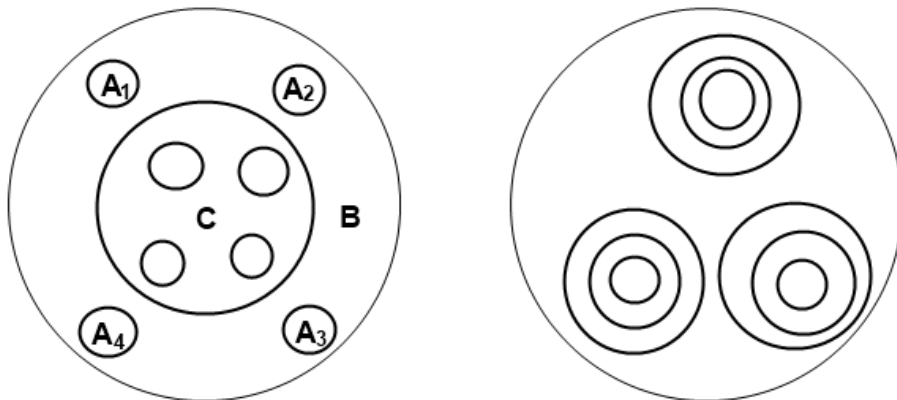


Рис. 14: девять окружностей (жирные), расположенные на сфере (тонкая) двумя разными способами (слева, справа).

**3.2.** (a) *Ответ:* Все наборы. *Подсказка.* Возьмем  $n$  непересекающихся сфер, пересекающих данную сферу  $S$  по  $n$  окружностям данного набора  $M$ . Соединим их  $n - 1$  непересекающимися-

ся трубками внутри  $S$  и получим криволинейную сферу  $T$ . Проверьте, что  $T$  удовлетворяет условию задачи.

(b) *Гипотеза.* Пара из такого графа и дерева реализуема тогда и только тогда, когда это дерево является объединением двух деревьев из  $n$  и  $k$  ребер, пересекающихся ровно по одному ребру.

(c) *Гипотеза.* Любой набор  $n$  окружностей реализуем в паре с набором  $n$  ‘параллельных’ окружностей.

**3.3.** Покрасим связные компоненты, лежащие внутри и вне  $T$ , в черный и белый цвета, соответственно.

**3.4.** (a) и (b) интуитивно очевидны и следуют из (c).

(c) Будем считать, что  $T$  — круглая сфера и окружности из  $\partial Q$  — круглые окружности, что никакая из них не является большим кругом. Для каждой окружности из  $\partial Q$  возьмем сферу, проходящую через эту окружность и центр сферы  $T$ . Объединение  $Q$  и частей таких сфер, лежащих снаружи  $T$  — криволинейная сфера, назовем ее  $Q'$ . Эта сфера делит  $\mathbb{R}^3$  на две компоненты связности. Поскольку  $Q$  связно, пересечение обеих компонент связности с внутренностью  $T$  связно. Эти компоненты пересекают  $T$  по черным и белым частям соответственно. Поскольку  $P$  лежит в одной компоненте, то  $\partial P$  лежит либо в черной, либо в белой компоненте  $T - \partial Q$ .

**3.5.** (a) делается аналогично (b).

(b) Рассмотрим диски  $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3} \subset S$ , ограниченные окружностями  $A_1, A_2, A_3 \subset S$  и не содержащие других окружностей. Без ограничения общности считаем, что внутренности этих дисков лежат внутри  $T$ . Тогда внутренности компоненты дополнения  $S - M$ , ограниченной  $B \cup C$ , тоже лежат внутри  $T$  (поскольку пересечение  $S \cap T$  трансверсально). Эта внутренность лежит в одной из компонент связности дополнения  $\mathbb{R}^3 - (T \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3})$ . Значит, все 4 окружности объединения  $B \cup C$  лежат в одной компоненте связности дополнения  $T - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ .

Заметим, что это частный случай задачи 3.4.c (сравните с задачей 4.6.a).

**3.7.** (a) См. определение окружностей  $A_-, A_0, A_+$  на рисунке 15. Семейство  $\{A_0\}$  лежит по одну сторону от семейства  $\{A_+, A_-\}$ , но не наоборот.

(b) Нет.

### Некоторые новые задачи по проблеме соседственных последовательностей.

Пара  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  последовательностей положительных целых чисел называется *сильно реализуемой*, если существуют две такие криволинейные сферы  $S, T$ , что

(1) их пересечение состоит из  $n - 1$  окружностей и делит

- $S$  на  $n$  связных компонент, которые можно занумеровать так, что у  $i$ -ой связной компоненты  $x_i$  соседей в  $S$ , границей

- $T$  на  $n$  связных компонент, которые можно занумеровать так, что у  $i$ -ой связной компоненты  $y_i$  соседей в  $T$ ;

(2) в  $S \cap T$  существует окружность, являющаяся границей некоторых диска и компоненты с  $x_1$  соседями в  $S - T$ , а также границей некоторых диска и компоненты с  $y_1$  соседями в  $T - S$ .

Пара  $(S, T)$  криволинейных сфер называется *сильной реализацией* пары  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

**4.1.** Пусть  $\vec{x}, \vec{y}$  — деревянные последовательности, у которых все единицы находятся в конце. Если пара последовательностей  $\vec{x}' := (x_1 - y_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_{n-y_1+1}), \vec{y}' := (y_2, y_3, \dots, y_{n-y_1+2})$  сильно реализуема, то и пара  $(\vec{x}, \vec{y})$  тоже.

**4.2.** Если пара  $(\vec{x}, \vec{y})$  сильно реализуема, то для любого целого положительного  $a$  пары  $(\vec{x}', \vec{y}')$  сильно реализуемы для

(а)  $\vec{x}' = (a, x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 1, \dots, 1)$ ,  $\vec{y}' = (y_1 + a - 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1, 1, \dots, 1)$  (в  $\vec{y}'$   $a - 1$  новых единиц, в  $\vec{x}'$  их  $a - 2$ ; здесь  $a$  может быть различно для различных замен:  $((1, 1), (1, 1)) \xrightarrow{a=3} ((3, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1)) \xrightarrow{a=4} ((4, 3, 1, 1, 1, 1, 1), (6, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$ ).

(б) какого-либо выбора  $\vec{x}' \in \{(1, x_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_n), (x_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)\}$  и  $\vec{y}' \in \{(1, y_1 + 1, y_2, y_3, \dots, y_n), (y_1 + 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1)\}$ .

**4.3.** Пара последовательностей сильно реализуема тогда и только тогда, когда обе последовательности деревянные.

### Некоторые новые задачи по проблеме Ландо.

**4.4.** Каждая пара объединений из

(5) 5;      (6) 6;

непересекающихся окружностей, реализуема.

Проблема Ландо решается с помощью ее *занумерованного*, или *раскрашенного*, аналога. Дадим определения, необходимые для его формулировки.

В этом пункте  $M$  и  $N$  — два объединения непересекающихся окружностей на сферах  $S$  и  $T$ , соответственно, причем в каждом объединении окружности занумерованы числами  $1, 2, \dots, n$ .

Пара  $(M, N)$  называется *реализуемой*, если существуют

(1) две криволинейные сферы  $S'$  и  $T'$ , трансверсально пересекающиеся по конечному набору  $S' \cap T'$  непересекающихся окружностей, и

(2) нумерация этих окружностей, для которой

- $S' \cap T'$  на сфере  $S'$  и  $M$  на сфере  $S$  занумерованно одинаковы;
- $S' \cap T'$  на сфере  $T'$  и  $N$  на сфере  $T$  занумерованно одинаковы.

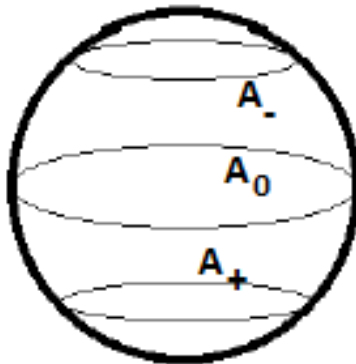


Рис. 15: К примеру

(Вы, по-видимому, сможете решить все задачи, не используя следующего строгого определения занумерованноодинаковости. Занумерованные наборы  $M$  на криволинейной сфере  $S$  и  $N$  на криволинейной сфере  $T$  называются *занумерованно одинаковыми*, если существует взаимно однозначное соответствие между связными компонентами дополнений  $S - M$  и  $T - N$ , при котором две связные компоненты дополнения  $S - M$  граничат по окружности из  $M$  тогда и только тогда, когда две соответствующие компоненты дополнения  $T - N$  граничат по соответствующей окружности из  $N$ .)

**Пример.** На единичной сфере (или на поверхности Земли) возьмем экватор  $A_0 = A_2$ , параллель  $A_+ = A_1$  шестидесяти градусов северной широты, параллель  $A_- = A_3$  шестидесяти градусов южной широты. См. рисунок 15. Тогда

- незанумерованные (или неупорядоченные) наборы  $\{A_-, A_0, A_+\}$  и  $\{A_0, A_-, A_+\}$  одинаковы.

- занумерованные (или упорядоченные) наборы  $(A_-, A_0, A_+)$  и  $(A_+, A_0, A_-)$  занумерованно одинаковы.
- занумерованные наборы  $(A_-, A_0, A_+)$  и  $(A_0, A_-, A_+)$  не являются занумерованно одинаковыми.
- пара занумерованных наборов  $(A_-, A_0, A_+)$  и  $(A_0, A_-, A_+)$  не реализуема.

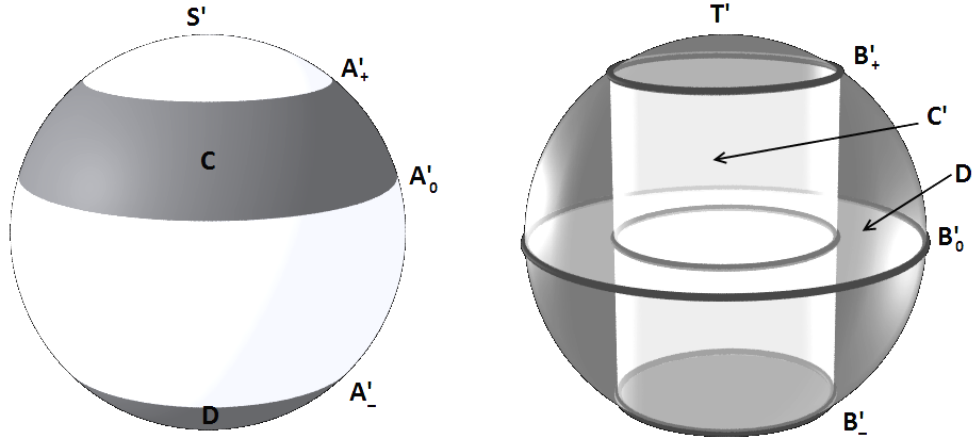


Рис. 16: Растащенные криволинейные сферы  $S'$  и  $T'$

*Доказательство последнего утверждения.* Пусть, напротив, существуют криволинейные сферы  $S'$  и  $T'$ , реализующие эту пару. Обозначим через

- $B_k$  копию окружности  $A_k$  на копии  $T$  сферы  $S$ ;
- $A'_k$  окружность на криволинейной сфере  $S'$  соответствующую  $A_k$ ;
- $B'_k$  окружность на криволинейной сфере  $T'$  соответствующую  $B_k$ ;
- $D' \subset S'$  диск в  $S' - T'$  ограниченный  $A'_+$ ;
- $C' \subset S'$  цилиндр в  $S' - T'$  ограниченный  $A'_0$  и  $A'_-$ .

Поскольку  $S'$  и  $T'$  реализуют пару  $(A_+, A_0, A_-), (B_0, B_+, B_-)$ , получаем  $A'_+ = B'_0, A'_0 = B'_+$  и  $A'_- = B'_-$ .

Ясно, что  $C'$  и  $D'$  лежат в трехмерном пространстве по одну сторону от криволинейной сферы  $T'$ . (Сравните с задачей 3.3.) Имеем  $\partial D' = A'_+ = B'_0$ . Граница  $\partial C' = A'_0 \sqcup A'_- = B'_+ \sqcup B'_-$  не лежит в одной компоненте дополнения  $T' - \partial D' = T' - B'_0$ . Это противоречит утверждению задачи 3.4.a для  $P = C'$  и  $Q = D'$ . QED

**4.5. Занумерованная проблема Ландо.** Какие пары занумерованных наборов на сферах реализуемы?

**4.6.** (a) Если пара  $(M, N)$  занумерованных наборов на сферах  $S$  и  $T$  реализуема, то связные компоненты дополнения  $S - M$  можно покрасить в черный и белый цвета так, что для любых двух одноцветных компонент  $P$  и  $Q$  дополнения  $S - M$  поднаборы в  $T$ , соответствующие  $\partial P$  и  $\partial Q$ , не зацеплены.

(b) Верно ли обратное к (a) утверждение?

Пусть  $p$  и  $q$  два подмножества множества ребер некоторого дерева. Множество  $p$  лежит по одну сторону (в этом дереве) от  $q$ , если  $p \cap q = \emptyset$ , и для любых двух концов ребер из  $p$  соединяющий их путь в дереве содержит четное число ребер из  $q$ . Наборы  $p$  и  $q$  не зацеплены (в этом дереве) если  $p$  лежит по одну сторону от  $q$  и  $q$  лежит по одну сторону от  $p$ .

Для вершины  $P$  графа обозначим через  $\delta P$  множество выходящих из  $P$  ребер.

Графы  $G(S, M)$  и  $G(T, N)$  определены в §1. Нумерация окружностей в  $M$  и окружностей в  $N$  задает нумерацию ребер в  $G(S, M)$  и в  $G(T, N)$ .

**4.7.** (а) Если пара  $(M, N)$  занумерованных наборов на сферах  $S$  и  $T$  реализуема, то вершины графа  $G(S, M)$  можно так покрасить в черный и белый цвета, что для любых двух одноцветных вершин  $P, Q$  графа  $G(S, M)$  наборы ребер в  $G(T, N)$ , соответствующие  $\delta P$  и  $\delta Q$ , не зацеплены в  $G(T, N)$ .

(b)\* Даны два дерева  $G$  и  $G'$  с одинаковым количеством ребер. Существует ли полиномиальный алгоритм для проверки наличия таких нумераций их ребер, при которой вершины графа  $G$  можно покрасить в черный и белый цвета так, что для любых двух одноцветных вершин  $P, Q$  графа  $G$  наборы ребер в  $G'$ , соответствующие  $\delta P$  и  $\delta Q$ , не зацеплены в  $G'$ ?

## 5 Больше сфер и сферы с ручками

Пусть  $n_1, n_2, n_3$  — положительные целые числа. Тройка

$$\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}), \quad \vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}), \quad \vec{x}_3 = (x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n_3})$$

последовательностей положительных целых чисел называется *реализуемой*, если существуют три криволинейных сферы  $S_1, S_2, S_3$  в трехмерном пространстве, пересекающиеся попарно по окружностям так, что  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$  и для всех  $k = 1, 2, 3$  дополнение  $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$  имеет  $n_k$  связных компонент, которые можно пронумеровать так, что у  $i$ -ой связной компоненты  $x_{ki}$  соседей в  $S_k$  для всех  $i = 1, \dots, n_k$ .

В этом параграфе (и в соответствующих решениях) индексы  $k, k+1, k+2$  рассматриваются по модулю 3.

Тройка  $(S_1, S_2, S_3)$  криволинейных сфер называется *реализацией* тройки  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .

**5.1. Проблема троек соседственных последовательностей.** Какие тройки деревянных последовательностей реализуемы?

**5.2.** Какие тройки деревянных последовательностей, в каждой из которых не более четырех чисел, реализуемы?

**5.3.** Если тройка последовательностей длин  $n_1, n_2, n_3$ , реализуема, то

- (а)  $n_1 + n_2 + n_3$  нечетно;
- (б)  $n_k < n_{k+1} + n_{k+2}$  для всех  $k = 1, 2, 3$ .

**5.4.** Пусть  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  — деревянная последовательность, а  $p$  и  $q$  — такие положительные целые числа, что  $p \geq q > 1$  и  $p + q = n + 1$ . Тогда существуют две такие деревянные последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_p$  и  $b_1, b_2, \dots, b_q$ , что  $a_1 + b_1 = x_1$ , и упорядоченные наборы  $(a_2, a_3, \dots, a_p, b_2, b_3, \dots, b_q)$  и  $(x_2, x_3, \dots, x_n)$  одинаковы с точностью до перестановки.

Каковы аналоги характеристик соседственных последовательностей (теорем 1 и 2) для пересечения *более, чем трех* многогранников?

**5.5. \* Гипотеза.** Заданы натуральные числа  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$  и  $s$  последовательностей

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \quad \dots, \quad x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn_s}$$

натуральных чисел. Тогда существуют  $s$  криволинейных сфер  $S_1, S_2, \dots, S_k$  в трехмерном пространстве, попарно пересекающихся по окружностям и таких, что

- никакие три из них не пересекаются в одной точке;
- для каждого  $k = 1, \dots, s$  и  $j = 1, \dots, n_k$  дополнение  $S_k - S_{k+1} - S_{k+2} - \dots - S_{k+s-1}$  имеет  $n_k$  компонент связности,  $j$ -тая из которых имеет  $x_{kj}$  соседей в  $S_k$

тогда и только тогда когда все  $s$  последовательностей деревянные, и  $n_1 + n_2 + \dots + n_s - s$  есть четное число, не меньшее  $2n_k$  для каждого  $k = 1, \dots, s$ .



Для  $s < 4$  эта гипотеза доказана (см. Теоремы 1 и 2), первый нетривиальный случай —  $s = 4$ .

Какими могут быть наборы количеств соседей у компонент, если разрешить тройные пересечения криволинейных сфер?

**5.6. \* Гипотеза.** Пусть  $n_1, n_2, n_3$  — положительные целые числа, и

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \quad x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n_3}$$

— последовательности положительных целых чисел. Тогда существование криволинейных сфер  $S_1, S_2, S_3$ ,

- попарно пересекающихся по окружностям,
  - имеющих  $2T$  точек пересечения всех трех сфер и
  - таких, что для каждого  $k = 1, 2, 3$  дополнение  $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$  имеет  $n_k$  связных компонент, у  $i$ -ой из которых  $x_{ki}$  соседей в  $S_k$  для каждого  $i = 1, \dots, k$
- равносильно тому, что  $n_1 + n_2 + n_3 + T$  нечетно,  $x_{k1} + x_{k2} + \dots + x_{kn_k} = 2n_k - 2 + 2T$  и  $n_k + T < n_{k+1} + n_{k+2}$  для каждого  $k = 1, 2, 3$ .

Каковы аналоги теорем 1 и 2 для пересечения криволинейных сфер с ручками?

**5.7. \* Гипотеза.** Заданы целые числа  $g_1, g_2, n > 0$  и две последовательности

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$$

натуральных чисел. Существуют криволинейные сфера с  $g_1$  ручками  $S_1$  и сфера с  $g_2$  ручками  $S_2$  в трехмерном пространстве, пересекающиеся по окружностям, разбивающим  $S_k$  на  $n$  компонент связности,  $j$ -тая из которых имеет  $x_{kj}$  соседей в  $S_k$  для каждого  $k = 1, 2$  и  $j = 1, \dots, n$

тогда и только тогда когда  $s := x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n}$  четно и  $2n - 2 \leq s \leq 2n - 2 + 2g_k$  для каждого  $k = 1, 2$ .

Было бы интересно решить аналогичные проблемы при наличии самопересечений. Интересны оба варианта — с точками троекратного самопересечения или без.

# КАК ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СФЕРЫ, ИЛИ ДВУМЕРНЫЕ МЕАНДРЫ

С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович и А. Скопенков

## 6 Финиш. Решения.

В этом параграфе криволинейные сферы называются просто *сферами*.

### Проблема соседственных последовательностей

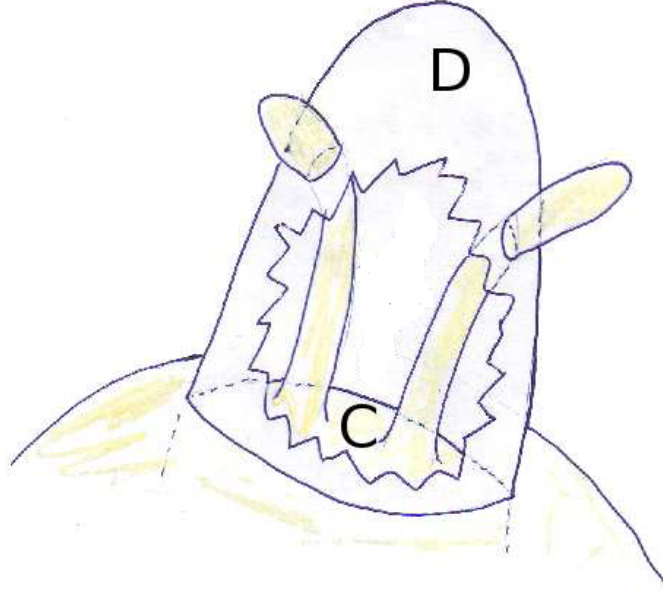


Рис. 17: Индуктивное построение

**4.1.** Можно считать, что  $x_1 \geq y_1$ . Рассмотрим сферы  $S', T'$ , реализующие пару  $(\vec{x}', \vec{y}')$  последовательностей. Рассмотрим окружность в пересечении  $T' \cap S'$ , из условия (2) в определении сильной реализуемости. Это окружность, ограничивающая

- в  $S' - T'$  связную компоненту, назовем ее  $C$ , у которой  $x_1 - y_1 + 1$  соседей,
- в  $T' - S'$  — диск, назовем его  $D$ .

Изменим сферы  $S', T'$  соединением компонент  $C$  и  $D$  при помощи  $y_1 - 1$  ‘пальцев’, см. рис. 17. Новые сферы обозначим через  $S, T$ . Докажем, что они реализуют пару  $(\vec{x}, \vec{y})$  последовательностей.

Условие (1) выполнено для  $S, T$ , поскольку

- каждая компонента  $S' - T'$ , кроме  $C$ , также является и компонентой дополнения  $S - T$ ,
- $C$  делится  $y_1 - 1$  окружностями из  $(S \cap T) - (S' \cap T')$  на  $y_1 - 1$  дисков и компоненту с  $(x_1 - y_1 + 1) + (y_1 - 1) = x_1$  соседями,

и

- каждая компонента дополнения  $T' - S'$ , кроме  $D$ , также является и компонентой дополнения  $T - S$ ,

- $D$  разделено  $y_1 - 1$  окружностями на  $y_1 - 1$  дисков и компоненту с  $y_1$  соседями.

Любая окружность из  $(S \cap T) - (S' \cap T')$  удовлетворяет условию (2).

**4.3. Доказательство теоремы 1'.** Докажем индукцией по длине  $n$  последовательности. Для любой деревянной последовательности из  $n$  чисел имеем  $n \geq 2$ . База индукции ( $n = 2$ ) очевидна.

Докажем шаг индукции. Пусть теорема 1' доказана для  $2, 3, \dots, n - 1 \geq 2$ . Докажем ее для  $n$ .

Переставим единицы в последовательностях в конец. Согласно задачам 2.5 и 4.1, по предположению индукции новые последовательности реализуемы. Рассмотрим сферы  $S, T$ , их реализующие. Сферы  $S, T$  удовлетворяют условию (1) из определения сильной реализуемости для старых последовательностей. Также

- если  $x_1 \neq 1$ , то условия (2) для старой и новой последовательностей  $\vec{x}$  эквивалентны;
- если  $x_1 = 1$ , то окружность из условия (2) для новой последовательности  $\vec{x}$  ограничивает диск, т.е. компоненту с  $x_1 = 1$  соседом.

Это выполнено и с заменой  $\vec{x}$  на  $\vec{y}$ . Итак, условие (2) выполнено для старых последовательностей. Значит,  $S, T$  сильно реализуют старые последовательности.

### Проблема Ландо.

**3.1. (d) (прямое решение)** Пусть, напротив, существуют сферы  $S'$  и  $T'$ , реализующие пару с рисунка 9. Обозначим связные компоненты дополнения  $S' - T'$  как на рис. 14 слева.

Рассмотрим диски  $A_1, \dots, A_4 \subset S'$ . Без ограничения общности предположим, что их внутренности лежат внутри  $T'$ . Тогда внутренность компоненты  $C \subset S'$  также лежит внутри  $T'$  (так как пересечение  $S' \cap T'$  трансверсально). Так как  $C, A_1, \dots, A_4$  не пересекаются, то  $C$  целиком лежит в одной связной компоненте дополнения  $\mathbb{R}^3 - T' \cup \bigsqcup A_i$ . Таким образом, все 5 окружностей границы  $\partial C$  лежат в одной связной компоненте дополнения  $T' - \bigsqcup \partial A_i$ . (Здесь мы используем тривиальный частный случай теоремы о продолжении вложения.)

Переформулируем предыдущее утверждение в терминах графа  $G(T')$  (рис. 18). Обозначим за  $G(C)$  объединение 5-и ребер графа  $G(T')$ , соответствующих окружностям границы  $\partial C$ . Тогда  $G(C)$  целиком лежит в одной связной компоненте дополнения в  $G(T')$  к 4-ем ребрам, соответствующим окружностям границы  $\partial A_i$ . Так как у  $G(T')$  только 9 ребер, это значит, что  $G(C)$  — поддереву  $G(T')$ . Обозначим через  $G(B)$  объединение 5-и ребер графа  $G(T')$ , соответствующих окружностям границы  $\partial B$ . Аналогично,  $G(B)$  — поддереву  $G(T')$ .

Так как  $G(B) \cup G(C) = G(T')$ , то хотя бы два из трех ребер  $a, b, c$  графа  $G(T')$  (рис. 18) лежат в одном из поддеревьев  $G(B)$  или  $G(C)$ . Без ограничения общности  $a, b \in G(B)$ . Но в любом поддереве  $G(T')$ , содержащем и  $a$ , и  $b$  хотя бы 6 ребер, в то время как в  $G(B)$  лишь 5 ребер. Значит, исходное предположение противоречиво и неверно.

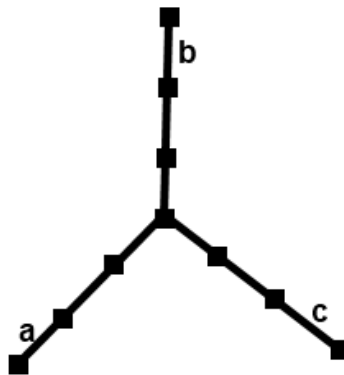


Рис. 18: Граф  $G := G(T', N)$ .

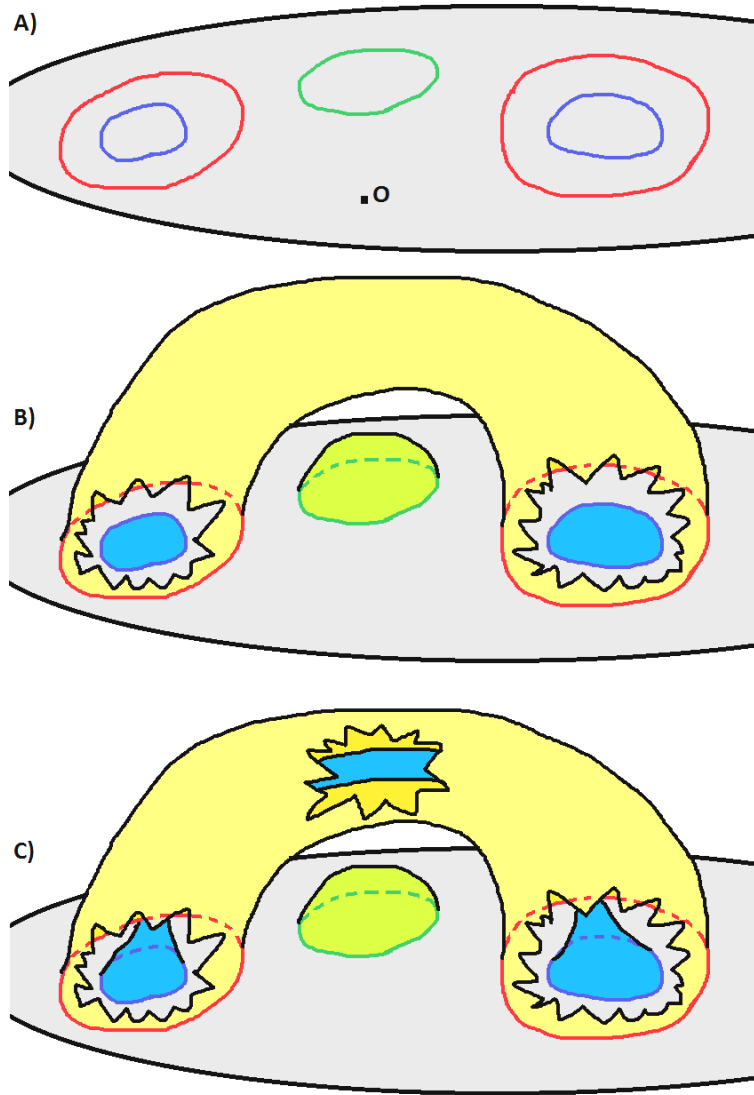


Рис. 19: К решению задачи 3.6.f. (А) Имеем  $S$  (серая),  $p_1$  (красное),  $p_2$  (зеленое),  $p_3$  (синее). (В) Имеем, что  $\hat{p}_3$  (синее) — ‘наименьшее’. Построим  $P_1$  (желтое) и  $P_2$  (зеленое) по индукции. (С) Связные компоненты  $\hat{p}_3$  (синее) можно соединить путем, не пересекающимся с  $P_1 \cup P_2$ . Тогда соединим их трубой и получим  $P_3$  (синее).

**3.6.** (а) Очевидно.

(б) Это равносильно тому, что окружности  $q_1$  и  $q_2$  лежат по одну сторону от  $p$ .

(с) Это равносильно тому, что  $p_1 \sqcup p_2$  и  $q_1 \sqcup q_2$  не зацеплены.

(д) Это равносильно тому, что  $p$  и  $q$  не зацеплены. *Подсказка:* обобщите решение задачи 3.1.d. *Формальное решение* получается подстановкой  $m = 2$  в решение для (f).

(е) Нет, согласно ответу на (f).

(f) Это равносильно тому, что  $p_i$  и  $p_j$  не зацеплены для любых  $i \neq j$ .

**Теорема о продолжении вложения.** *Наборы  $p_1, \dots, p_m$  непересекающихся окружностей в единичной сфере  $S$  попарно не зацеплены в том и только том случае, когда существуют непересекающиеся сферы с дырками  $P_1, \dots, P_m$ , чьи внутренности лежат внутри  $S$ , и для которых  $\partial P_i = p_i$  для всех  $i = 1, \dots, m$ .*

*Доказательство.* Необходимость легко следует из задачи 3.4.c. Достаточность докажем индукцией по  $m$ . База  $m = 1$  по сути доказана при решении задачи 3.2.a. Докажем шаг индукции.

Возьмем точку  $O \in S - \bigsqcup_{i=1, \dots, m} p_i$ . Для каждого  $i$  рассмотрим черно-белую раскраску дополнения  $S - p_i$ , при которой  $O$  белая. Напомним, что  $\mathring{p}_i$  — объединение черных компонент дополнения  $S - p_i$ . Раз  $O$  белая, а  $p_i$  и  $p_j$  не зацеплены, по задаче 3.7.b для всех  $i \neq j$  или  $\mathring{p}_i \subset \mathring{p}_j$ , или  $\mathring{p}_j \subset \mathring{p}_i$ , или  $\mathring{p}_i \cap \mathring{p}_j = \emptyset$ . Значит, есть ‘наименьшее’  $\mathring{p}_i$ , то есть, такое  $\mathring{p}_i$ , что  $\mathring{p}_j \not\subset \mathring{p}_i$  для всех  $j \neq i$ . Можно положить  $i = m$ . Тогда  $\mathring{p}_m \cap \bigsqcup_{i=1}^{m-1} p_i = \emptyset$ ,  $\mathring{p}_m$  — набор сфер с дырками,  $\partial \mathring{p}_m = p_m$  и  $\mathring{p}_m \subset S$ . Обозначим через  $\Delta$  замкнутый шар, ограничиваемый  $S$  (то есть, ‘внутреннюю часть’ сферы  $S$ ). По индукционному предположению существуют непересекающиеся сферы с дырками  $P_1, \dots, P_{m-1} \subset \Delta$ , такие что  $\partial P_i = p_i$  для всех  $i = 1, \dots, m-1$ .

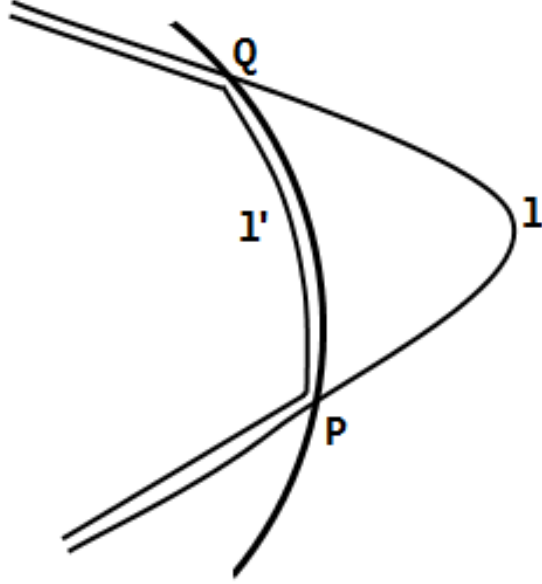


Рис. 20: Доказательство утверждения

**Утверждение.** Набор  $p_m$  лежит в одной связной компоненте дополнения  $\Delta - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$ .<sup>6</sup>

*Доказательство утверждения.* Предположим противное. Рассмотрим любые две точки  $A, B \in p_m$  из разных связных компонент дополнения  $\Delta - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$ . Обозначим через  $l$  путь внутри  $S$ , соединяющий  $A$  и  $B$ , и при этом  $\bar{l} := \#(l \cap \bigsqcup_{i=1}^{m-1} P_i)$  минимально (минимум по всем таким  $l$ , объекты  $A, B, p_m, S, P_1, \dots, P_{m-1}$  фиксированы). Тогда  $\bar{l} > 0$  (иначе  $A$  и  $B$  лежали бы в разных компонентах). Так как  $p_m$  лежит по одну сторону от  $\partial P_i$ , точки  $A$  и  $B$  лежат в одной компоненте  $\Delta - P_i$ , и  $\#(l \cap P_i)$  четно для всех  $i$ . (Если  $m = 2$ , можно даже получить  $\#(l \cap P_1) = 0$  и остановиться.) Тогда  $\#(l \cap P_i) \geq 2$  для некоторого  $i$ . Обозначим через  $Q$  и  $R$  последовательные (на  $l$ ) точки  $l \cap P_i$ . Обозначим через  $Q'$  точку  $l$  чуть перед  $Q$  и за  $R'$  точку  $l$  чуть после  $R$ . Так как  $P_i$  связно,  $Q$  и  $R$  можно соединить путем  $P_i$ . Значит  $Q'$  и  $R'$  можно соединить путем  $l'$ , достаточно близким к  $P_i$ , но не пересекающим  $P_i$ . Путь  $l'$  не пересекает ничего из  $P_1, \dots, P_{m-1}$ , так как он достаточно близок к  $P_i$ , а  $P_1, \dots, P_{m-1}$  попарно не пересекаются. Заменим часть пути  $l$  от  $Q'$  до  $R'$  на  $l'$ . Полученный путь назовем  $l''$ . Теперь  $\bar{l}'' = \bar{l} - 2$ . Это противоречит минимальности  $\bar{l}$ . Поэтому  $l$  не пересекает  $P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1}$ , значит  $A$  и  $B$  должны лежать в одной связной компоненте дополнения  $\Delta - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$ . ЧТД.

<sup>6</sup>Для  $m = 2$  это утверждение — почти определение незацепленности (точнее, того, что ' $p_2$  лежит по одну сторону от  $\partial P_1$ '). Случай  $m \geq 3$  интересней, ведь объединение двух подмножеств, вообще говоря, может разбить само множество, даже если каждое из этих подмножеств поодиночке исходное множество не разбивало.

*Завершение доказательства теоремы о продолжении вложения.* Пусть  $\mathring{p}'_m$  — объединение непересекающихся сфер с дырками, полученных из  $\mathring{p}_m$  небольшой деформацией, после которой внутренность  $\mathring{p}'_m$  попадает в  $\Delta$  и  $\partial\mathring{p}'_m = \partial\mathring{p}_m = p_m$ . Согласно Утверждению, любые две точки  $\mathring{p}'_m$  можно соединить путем внутри  $S$ , не пересекающим  $P_1, \dots, P_{m-1}$ . Тогда можно соединить все связные компоненты множества  $\mathring{p}'_m$  трубками внутри  $S$ , не пересекающими  $P_1, \dots, P_{m-1}$ . Количество трубок будет на 1 меньше количества компонент связности  $\mathring{p}'_m$ , значит, не будет ‘циклов из трубок’. Значит, мы получили сферу с дырками. Обозначим ее через  $P_m$ . Имеем  $\partial P_m = p_m$ ,  $P_m \subset \Delta$ , и  $P_m$  не пересекается с  $P_1, \dots, P_{m-1}$ . Шаг индукции доказан. ЧТД.

**4.4.** Этот факт получен с использованием компьютерной программы, основанной на теореме 3.

**4.5.** Ответ дается задачей 4.6, и он таков.

**Теорема 3.** *Пара  $(M, N)$  занумерованных наборов на сферах  $S$  и  $T$  реализуема тогда и только тогда, когда связные компоненты дополнения  $S - M$  можно покрасить в черный и белый цвета так, что для любых двух одноцветных компонент  $P$  и  $Q$  дополнения  $S - M$  поднаборы в  $N$ , соответствующие  $\partial P$  и  $\partial Q$ , не зацеплены.*

**4.6.** (а) Это переформулировка задачи 3.4.

(б) Да. Идея решения — доказать и использовать ответ к проблеме продолжения вложения 3.6.e.

Пусть  $T'$  — единичный куб. Нумерации дают взаимно-однозначное соответствие  $h$  между окружностями из  $M$  и окружностями из  $N$ .

Обозначим через  $A_1, \dots, A_m$  белые связные компоненты дополнения  $S - M$ . По предположению  $h(\partial A_1), \dots, h(\partial A_m)$  попарно не зацеплены в  $T$ . Согласно ответу к проблеме продолжения вложения 3.6.e существуют непересекающиеся криволинейные сферы с дырками  $A'_1, \dots, A'_m$ , внутренности которых лежат *внутри*  $T'$ , и такие, что  $\partial A'_i = h(\partial A_i)$  для всех  $i = 1, \dots, m$ .

Обозначим через  $B_1, \dots, B_n$  черные связные компоненты дополнения  $S - M$ . Аналогично существуют непересекающиеся сферы с дырками  $B'_1, \dots, B'_n$ , внутренности которых лежат *снаружи*  $T'$ , и такие, что  $\partial B'_i = h(\partial B_i)$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть  $S' := (A'_1 \cup \dots \cup A'_m) \cup (B'_1 \cup \dots \cup B'_n)$ . Из построения следует, что  $S'$  несамопересекающаяся. У  $A'_i$  такое же число дырок, как и у  $A_i$ , и у  $B'_i$  такое же число дырок, как и у  $B_i$ . Так как  $S = (A_1 \cup \dots \cup A_m) \cup (B_1 \cup \dots \cup B_n)$  — сфера, то и  $S'$  тоже. (Строгое доказательство можно получить, воспользовавшись эйлеровой характеристикой.) Очевидно,  $S'$  и  $T'$  реализуют пару  $M, N$ .

**4.7.** (а) Это — переформулировка задач 3.4 и 4.6.

## Больше сфер и сферы с ручками

**5.1. Теорема 2.** *Пускай  $n_1, n_2, n_3$  — положительные целые числа, а*

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \quad x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n_3}$$

*— последовательности положительных целых чисел. Тогда существуют криволинейные сферы  $S_1, S_2, S_3$  в трехмерном пространстве, пересекающиеся попарно по окружностям и такие, что*

- $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ ;

- У  $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$   $n_k$  связных компонент, которые можно так пронумеровать, что у  $i$ -ой компоненты  $x_{ki}$  соседей в  $S_k$ , для всех  $k = 1, 2, 3$

*если и только если последовательности деревянные,  $n_1 + n_2 + n_3$  нечетно, и  $n_k < n_{k+1} + n_{k+2}$  для всех  $k = 1, 2, 3$ .*

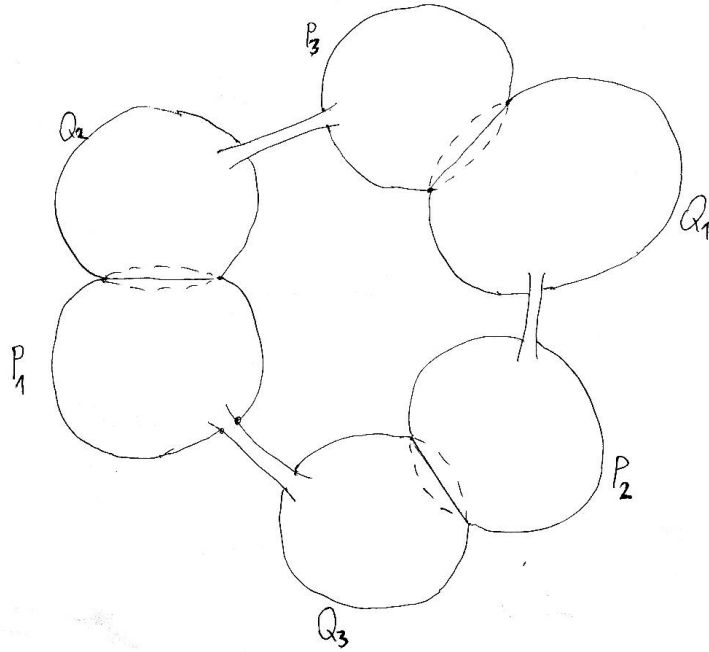


Рис. 21: Конструкция из трех сфер

*Доказательство.* Часть ‘только тогда’ следует из задач 2.2 и 5.3. Докажем часть ‘тогда’.  
Пусть

$$m_1 := (n_2 + n_3 - n_1 + 1)/2, \quad m_2 := (n_1 + n_3 - n_2 + 1)/2, \quad m_3 := (n_1 + n_2 - n_3 + 1)/2.$$

Тогда

$$m_1 + m_2 = n_3 + 1, \quad m_1 + m_3 = n_2 + 1, \quad m_2 + m_3 = n_1 + 1.$$

Согласно задаче 5.4 существуют последовательности

$$p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_3}, \quad p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_1}, \quad p_{31}, p_{32}, \dots, p_{3m_2},$$

$$q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1m_2}, \quad q_{21}, q_{23}, \dots, q_{2m_3}, \quad q_{31}, q_{32}, \dots, q_{3m_1},$$

такие что  $p_{k-1,1} + q_{k+1,1} = x_{k1}$  и упорядоченные множества

$$(p_{k-1,2}, p_{k-1,3}, \dots, p_{k-1,m_{k+1}}, q_{k+1,2}, q_{k+1,3}, \dots, q_{k+1,m_{k-1}}) \quad \text{и} \quad (x_{k2}, x_{k3}, \dots, x_{kn_k})$$

равны с точностью до перестановки. По теореме 1' существуют сферы

$$Q_1, P_1, Q_2, P_2, Q_3, P_3 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{такие что} \quad Q_k \cap Q_{k+1} = \emptyset, \quad Q_k \cap P_l = \emptyset \quad \text{если} \quad l \neq k-1 \quad \text{и}$$

- $Q_k - P_{k-1}$  — объединение  $m_{k+1}$  непересекающихся связных компонент, у  $i$ -ой из которых  $q_{ki}$  соседей

- $P_{k-1} - Q_k$  — объединение  $m_{k+1}$  непересекающихся связных компонент, у  $i$ -ой из которых  $p_{k-1,i}$  соседей

- граница некоторой связной компоненты  $\mathbb{R}^3 - P_{k-1} - Q_k$  содержит компоненту  $\tilde{q}_k$  с  $q_{k1}$  соседями в  $Q_k$  и компоненту  $\tilde{p}_{k-1}$  с  $p_{k-1,1}$  соседями в  $P_{k-1}$ .

Для  $k = 1, 2, 3$  пусть  $S_k$  — связная сумма сфер  $Q_{k+1}$  и  $P_{k-1}$  и тонкой трубки, соединяющей две компоненты  $\tilde{q}_{k+1}$  и  $\tilde{p}_{k-1}$  из третьего условия, см. рис. 21. Это можно сделать без пересечений на этих трех трубках.

Тогда  $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$  — такое, как и должно быть для каждого  $k = 1, 2, 3$ . ЧТД.

**5.2.** *Ответ:* реализуемы только следующие тройки.

$$\begin{aligned} &\{(2, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \quad \{(3, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \quad \{(3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \\ &\quad \{(3, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 1)\}, \quad \{(2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \\ &\quad \{(2, 2, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 1)\}, \quad \{(2, 1, 1), (1, 1), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Существует только 4 деревянные последовательности длины не более 4:

$$(1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1).$$

Согласно утверждению задачи 5.3 количество последовательностей нечетной длины в реализуемой тройке нечетно. Значит каждая реализуемая тройка последовательностей длины не более 4, кроме тройки  $\{(2, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 1)\}$ , состоит из последовательности  $(2, 1, 1)$  и двух последовательностей четной длины. По задаче 5.1 все эти 7 троек реализуемы.

**5.3.** Пусть  $m_3, m_2, m_1$  — количества окружностей в  $f_1 \cap f_2$ ,  $f_1 \cap f_3$  и  $f_2 \cap f_3$ . Тогда  $n_1 = m_3 + m_2 + 1$ ,  $n_2 = m_3 + m_1 + 1$ ,  $n_3 = m_2 + m_1 + 1$ .

Значит,  $n_1 + n_2 + n_3 = 2(m_3 + m_2 + m_1) + 3$  нечетно.

Так как  $2m_k + 1 > 0$ , то  $n_k < n_{k+1} + n_{k+2}$  для всех  $k = 1, 2, 3$ .

**5.4.** Пусть  $r = r(\vec{x})$  — число членов  $x_i$  больших 1. Пусть  $z_s = x_2 + x_3 + \dots + x_s$ . Для каждого  $s \leq r$  положим

$$a_1 = p - (z_s - s + 3) + 1, \quad a_i = x_i \quad \text{для} \quad 2 \leq i \leq s \quad \text{и} \quad a_i = 1 \quad \text{для} \quad s + 1 \leq i \leq p,$$

$$b_1 = x_1 - a_1, \quad b_i = x_{i+s-1} \quad \text{для} \quad 2 \leq i \leq r - s + 1, \quad b_i = 1 \quad \text{для} \quad r - s + 2 \leq i \leq q = n + 1 - p.$$

Так как  $s \leq r$ , последовательность  $b_1, b_2, \dots, b_q$  определена корректно. Для каждого  $i$  числа  $a_i$  и  $b_i$  зависят от  $s$ .

Получаем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = p - (z_s - s + 3) + 1 + z_s + p - s = 2p - 2,$$

то есть последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_p$  деревянная. Также

$$b_1 + b_2 + \dots + b_q = z_n - a_1 - a_2 - \dots - a_p = 2n - 2 - 2p + 2 = 2q - 2,$$

то есть последовательность  $b_1, b_2, \dots, b_q$  деревянная.

Осталось доказать существование числа  $s \leq r$ , при котором  $1 \leq a_1 \leq x_1 - 1$ . Для каждого  $i < r$  имеем  $x_1 \geq x_i$ , значит

$$z_i - i + x_1 + 1 \geq (z_{i+1} - (i + 1) + 3) - 1.$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} 2 &= z_1 - 1 + 3, \\ z_1 - 1 + x_1 + 1 &\geq (z_2 - 2 + 3) - 1, \\ z_2 - 2 + x_1 + 1 &\geq (z_3 - 3 + 3) - 1, \\ &\dots, \\ z_{r-1} - (r - 1) + x_1 + 1 &\geq (z_r - r + 3) - 1, \\ z_r - r + x_1 + 1 &= n - 1. \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство не аналогично предыдущим равенствам, но следует из того, что последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n$  деревянна, и  $1 = x_{r+1} = \dots = x_n$ . Так как  $2 \leq p \leq n - 1$ , существует число  $s \leq r$ , для которого

$$z_s - s + 3 \leq p \leq z_s - s + x_1 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq a_1 \leq x_1 - 1.$$



### Список литературы.

- [A] S. Avvakumov, *A counterexample to the Lando conjecture on intersection of spheres in 3-space*, preprint, 2012.
- [A12] I. Arzhantsev, V. Bogachev, A. Garber, A. Zaslavsky, V. Protasov and A. Skopenkov, *Students' mathematical olympiades at Moscow State University 2010-2011*, Mat. Prosveschenie, 16 (2012), 214-227.
- [D] Н. П. Долбилін, *Жемчужины теории многогранников*, М.: МССТМЕ, 2000.
- [H10] T. Hirasa, *Dissecting the torus by immersions*, Geometriae Dedicata, 145:1 (2010), 33-41
- [R] A. Rukhovich, *On intersection of two embedded spheres in 3-space*, <http://arxiv.org/abs/1012.0925>
- [T07] T. Nowik, *Dissecting the 2-sphere by immersions*, Geometriae Dedicata 127, (2007), 37-41, <http://arxiv.org/abs/math/0612796>.
- [W] <http://ru.wikipedia.org/wiki/Многогранник>