УДК 512.552.4+512.554.32+512.664.2

Мономиальные алгебры

А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев*

Содержание

Введение **3**

1. Комбинаторика слов и ее приложения **10**
1.0.1. Некоторые конструкции 10
1.0.2. Сверхслова в алгебрах 11
1.1. Рост в словах и в алгебрах 13
1.2. Конечные подслова, равномерно рекуррентные слова. Соображения компактности 16
1.2.1. Сверхслова и динамика 17

2. Применения техники работы со словами в вопросах бернсайдовского типа **18**
2.1. Периодичность в словах 19
2.1.1. Свойства последовательности u^∞ 19
2.1.2. Перекрытия слов 22
2.1.3. Периодичность в словах и теорема о независимости . . 27
2.1.4. Периодичность и бесконечные слова 30
2.1.5. Периодичность и количество подслов 32
2.2. Базисы алгебр 34
2.2.1. О приведении слов к каноническому виду 34
2.2.2. Выделенные наборы слов и операции над ними 36

3. Равномерно рекуррентные слова и радикалы мономиальных алгебр **39**
3.1. Нильрадикал и радикал Джекобсона 39
3.2. Равномерно рекуррентные слова и классификация слабо нетеровых мономиальных алгебр 41
3.3. Радикал Бэра мономиальных алгебр. Первичные слова 44

4. Автоматные алгебры **45**
4.1. Функции роста автоматных алгебр 47
4.2. Матричные представления и полиномиальные тождества автоматных алгебр 49

*Работа поддержана РФФИ, Intas, программой “Университеты Росии” и Домом Научно-Технического Творчества Молодежи г. Москвы.

4.2.1. Конструкции представлений автоматных алгебр 50
4.2.2. Полиномиальные тождества 53
4.3. Структурная теория автоматных алгебр 55
4.4. Нильпотентные элементы и делители нуля 57
4.4.1. Алгоритм проверки, является ли элемент делителем нуля 58
4.5. Нетеровость 62
4.6. Представления мономиальных алгебр 63
4.6.1. Операции над мономиальными алгебрами. Прямые суммы 63
4.7. Критерий представимости мономиальной алгебры 65
4.7.1. Обобщенные графы 68
4.7.2. Применения критерия представимости 70

5. Многообразия мономиальных алгебр 72
5.1. Редукция к конечно порожденному случаю 75
5.2. Описание многообразий автоматных алгебр в терминах графов 75

6. Лиева нильпотентность: распознавание и проблема равенства 76

Приложение 78

А. О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным 78
А.1. Вопросы и замечания 84

Б. О теореме Нагаты—Хигмана для полуколец 85

Литература 89

Введение

Данный обзор посвящен комбинаторным методам в теории колец. В отличие от известного обзора В. А. Уфнаровского [**?**], наше внимание смещено с самих результатов на технику их получения. Соответственно тематика данного обзора более узкая и сильнее отражает интересы авторов. Главной темой является комбинаторика слов и ее приложения, а также понятие канонической формы элементов в различных исчислениях.

Исследование комбинаторных и ассимптотических свойств алгебраических объектов имеет важные приложения. Можно выделить работы Фон Неймана, Дэя, Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича, М. Громова, Вольфа, Фьюрстенберга, Столингса. Функции роста к.п. групп введены независимо А. А. Шварцем и Дж. Милнором при исследовании накрытий римановых пространств (с неположительной кривизной) см. [40], [43], [44], [263], [211], [239].

Задание элемента в алгебре осуществляется с помощью линейной комбинации слов, поэтому наиболее “чистыми” вопросами являются вопросы, относящиеся к комбинаторике слов. К комбинаторике слов сводится изучение роста алгебр и рядов Гильберта. Эффекты, связанные с периодичностью, возникают при рассмотрении вопросов бернсайдовского типа, таких, как теорема Ширшова о высоте, теорема о независимости, нильпотентность радикала PI-алгебры и т.п.

В центре внимания данного обзора — мономиальные алгебры, т.е. алгебры, все определяющие соотношения которых задаются словами от образующих. Исследование таких алгебр имеет своей целью выявление идей, необходимых для построения комбинаторной теории колец. Благодаря этому исследованию стала более понятной роль равномерно рекуррентных слов и связь комбинаторной теории колец с символической динамикой.

Мы изучаем алгоритмические вопросы теории мономиальных алгебр, их представления и многообразия, ими порожденные, структурную теорию. С помощью мономиальных алгебр доказываются и обобщаются теоремы о высоте и размерности Гельфанда—Кириллова для произвольных PI-алгебр. Особое место занимает *автоматный* случай — когда множество ненулевых слов мономиальной алгебры представляет собой регулярный язык. Одно из эквивалентных определений регулярного языка — это множество слов, которые можно прочесть, двигаясь по ребрам графа, отмеченным буквами фиксированного алфавита. Буквы алфавита соответствуют образующим мономиальной алгебры. Граф, представляющий конечный автомат, мы будем называть *графом Уфнаровского* автоматной алгебры.

Комбинаторика слов используется при изучении произвольных алгебр, не обязательно мономиальных. Комбинаторные леммы хорошо работают при изучении канонических базисов алгебр, нормальной формы ее элементов. Это прежде всего относится к теоремам о высоте и теоремам о независимости. Комбинаторные рассуждения позволяют получить простые и конструктивные доказательства таких известных теорем, как теорема Ширшова о высоте, теорема В. А. Уфнаровского и Г. П. Чекану о независимости, положительное решение гипотезы Шестакова о локальной нильпотентности алгебры сложности (полиномиальной степени) n, в которой все слова степени n от образующих нильпотентны, доказательство теоремы Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной PI-алгебры и т.д.

Наконец, ряд чисто комбинаторных задач обладают собственной ценностью.

Каковы основные идеи, используемые наиболее часто?

Во-первых, это идея лексикографического порядка, рассмотрение минимальных (максимальных) слов, рассмотрение неуменьшаемых объектов. Это работает как при рассмотрении слов, так и при рассмотрении векторов степеней (лемма о перекачке), а также при сравнении наборов слов.

Во-вторых, одним из основных инструментов являются бесконечные слова, которые мы для краткости называем *сверхсловами*. Использование сверхслов позволяет проводить неконструктивные комбинаторные рассуждения с помощью соображений компактности (из кусков бесконечного множества конечных слов можно составить одно бесконечное слово).

Чрезвычайно важным является понятие *равномерно рекуррентного* бесконечного слова W: для всякого натурального k существует $N = N(k)$ такое, что любой конечный кусок сверхслова W длины k содержится в любом его куске длины N. Равномерно рекуррентные (р.р.) слова позволяют, к примеру, описать все *почти простые* мономиальные алгебры (т.е. алгебры, любой фактор которых нильпотентен): это алгебры вида A_W, где A — р.р. непериодическое сверхслово. (Через A_W обозначается мономиальная алгебра, все ненулевые слова которой являются подсловами сверхслова W.) Основой доказательства этого факта является следующая лемма, представляющая собой аналог теоремы плотности: для любых двух подслов $u \neq v$ непериодического р.р. слова W существуют подслова $r, t \subset W$ такие, что $rut \subset W$, $rvt \not\subset W$.

Этот результат используется при доказательстве теоремы о совпадении нильрадикала мономиальной алгебры и радикала Джекобсона. Нильрадикал мономиальной алгебры оказывается равным пересечению идеалов, факторы по которым мономиально почти просты. (Мономиальная алгебра называется *мономиально почти простой*, если каждый ее фактор по идеалу, порожденному мономом, нильпотентен.) Мономиально почти простая алгебра — это алгебра вида A_W, где W — произвольное р.р. сверхслово.

С помощью сверхслов получается также описание слабо нетеровых мономиальных алгебр, короткие доказательства теоремы о независимости и теоремы о локальной нильпотентности алгебры Ли, порожденной сэндвичами. В терминах сверхслов естественно определяется порядок Уфнаровского — правые сверхслова образуют линейно упорядоченное множество.

Изучение сверхслов приводит к вопросам, относящимся к символической динамике. Так, равномерно рекуррентные слова имеют динамический смысл: это слова, возникающие при изучении минимальных замкнутых инвариантных (относительно оператора сдвига) множеств в пространстве всех сверхслов с метрикой Хемминга. Оказывается, что если функция роста $V(n)$ алгебры (т.е. размерность пространства, порожденного словами степени не выше n) при некотором n удовлетворяет неравенству $V(n) < n(n+3)/2$, то алгебра имеет линейный рост. Алгебры с "предельной" функцией роста $n(n+3)/2$ описываются в терминах поворота окружности. А именно, все они, кроме счетного множества, строятся как алгебры A_W, где $W = \{w_i\}$ — последовательность из нулей и единиц, задаваемая иррациональными α, $\beta \in (0,1)$: $w_i = f(i+1) - f(i), \quad f(i) = [\alpha i + \beta]$. Динамические свойства р.р. слов (минимальность по включению набора подслов р.р. слова) используются также при доказательстве критерия слабой нетеровости.

В-третьих, часто используются комбинаторные леммы, относящиеся к периодическим словам, строению периодических последовательностей и расположению периодических частей внутри слова. Целый параграф посвящен коллекции таких мелких, но полезных утверждений. Особое внимание уделено альтернативе псевдопериодичность — линейная упорядоченность относительно лексикографического порядка. Эта альтернатива основана на свойствах сдвиговой инвариантности периодических слов и квазипериодичности решений уравнения в словах $uW = Ws$. Ее осознание проясняет, в частности, доказательства теорем о высоте, о независимости и о совпадении нильрадикала с радикалом Джекобсона в мономиальных алгебрах. Вокруг псевдопериодичности группируется материал части 2.1.

В-четвертых, работает уже упоминавшаяся нами автоматная техника. Использование графов есть проявление категорного подхода. Объектами соответствующей категории являются вершины графа, а морфизмами — стрелки. Каждой аддитивной категории, у которой морфизмы размечены буквами некоторого алфавита, соответствует подалгебра алгебры эндоморфизмов прямой суммы ее объектов. Если нет двух по разному размеченных путей, соединяющих два объекта (например, когда все морфизмы помечены разными буквами), то получается мономиальная алгебра. Между морфизмами размеченных категорий и морфизмами соответствующих алгебр есть естественные взаимоотношения. На этом строится вся теория представлений мономиальных алгебр. Теории представлений алгебр графов посвящены десятки работ. См., например, обзор [23]. Если граф “хороший”, т.е. в нем отсутствуют “зацепленные циклы” — циклы с общей вершиной, то набор проходимых стрелок однозначно определяет порядок прохождения и не имеет особого значения, коммутируют ли морфизмы категории. Алгебра, связанная с “хорошим” конечным графом, является *PI*. При естественных ограничениях верно и обратное.

Наконец, простым, но весьма полезным комбинаторным утверждением является лемма о перекачке: пусть A — *PI*-алгебра, в которой выполняется полилинейное тождество f степени m. Тогда любое слово вида $w = c_0v_1c_1\dots v_mc_{m+1}$, где c_i — буквы, не входящие в слова v_j, можно представить в виде линейной комбинации слов вида $w' = c_{i_0}v_1'c_{i_1}\dots v_m'c_{i_{m+1}}$, где c_i не входят в слова v_j' и не более чем $m-1$ слово v_i' имеет длину, большую, чем $m-1$ (почти все слова v_i' короткие). Перекачка есть комбинаторный аналог рассуждений, связанных с алгебраичностью. С помощью этой процедуры легко доказывается выполнимость тождества Капелли, получаются конструктивные оценки для степени тождества Капелли и для высоты *PI*-алгебры, упрощается доказательство теоремы Размыслова—Кемера—Брауна, а также результата А. Д. Чанышева о глобальной нильпотентности градуированной *PI*-алгебры, у которой n-ые степени однородных элементов нильпотентны.

Важным методологическим аспектом теории мономиальных алгебр является их связь с техникой канонической формы. Изучение мономиальных алгебр по сути дела есть исследование нормальной формы “в чистом виде”. Поэтому эти алгебры находят свое приложение в комбинаторике слов, в символьных вычислениях, в кодировании, комбинаторной теории колец и др. Практика показывает, что даже в тех случаях, когда исследование не касается собственно мономиальных алгебр, вычисления тем не менее производятся с записью элементов через произведения образующих, т.е. с мономами. Прекрасным подтверждением этого служит понятие базиса Грёбнера, одно из основных в теории символьных вычислений (см. также теорему 1.2).

Аппарат теории мономиальных алгебр работает при исследовании нормальной формы. Он используется при решении проблем бернсайдовского типа (что, собственно, и привело одного из авторов к исследованию этих алгебр). Например, пусть A — мономиальная алгебра с образующими a, b и соотношениями $a^2 = b^2 = 0$. Она порождает то же самое многообразие, что и алгебра 2×2 матриц. Каждое ненулевое слово в A есть подслово сверхслова $(ab)^\infty$. И если в алгебре B выполняется тождество f, которое не выполняется в алгебре 2×2 матриц, то f не выполняется в A. Это означает, что с помощью f любой период длины, большей 1, можно нарушить. В частности, при достаточно больших n слово $(a'b')^n$ линейно представимо словами, содержащими ${a'}^2$ и ${b'}^2$. Квадраты созданы! Обозначим $c = {a'}^2$. Создав слово с достаточно большим числом вхождений c и воспользовавшись теоремой о высоте (см. лемму о тиражировании 2.81), мы создадим степень $(cu)^k$, а затем с помощью f — квадрат c, т.е. ${a'}^4$. Этот путь, изложенный в главе 2, приводит к доказательству ограниченности высоты PI-алгебры над множеством слов степени не выше сложности.

Получение экспоненциальной оценки для указанной высоты ведет к прояснению аналогии между структурными и комбинаторными рассуждениями. Поэтому заключительная часть главы 2 организована как доказательство этой оценки.

Структурная теория, с помощью которой были получены основные результаты в теории ассоциативных колец, в силу своей эффективности оказала тормозящее действие на развитие комбинаторных методов — пусть более трудоемких, но зато конструктивных. Блоки рассуждений применяются без раскрытия и ряд фундаментальных результатов в теории колец (например, теорема о нильпотентности радикала в PI-кольцах) не имеет прямого доказательства. Недостаток понимания вызывает дополнительные трудности при переносе результатов и зачастую не дает возможности получить сколько-нибудь разумные оценки. Например, если взять два тождества одинаковой сложности, то в многообразии, порожденном одним из этих тождеств, другое лежит в радикале, который нильпотентен. Поэтому одно из этих тождеств влечет степень другого. Но какую? Мы не понимаем, что происходит при этом на уровне преобразований букв. Уже случай сложности 1, исследованный В. Н. Латышевым, далеко не прост. Для получения комбинаторных доказательств важно постараться понять, какие комбинаторные объекты соответствуют структурной теории и как отражаются структурные свойства на комбинаторике слов. Возможно, это позволит более успешно решать задачи типа: если в алгебре для любых x и y выполняется равенство $(xy)^{n(x,y)} = x^{n(x,y)}y^{n(x,y)}$, то такая алгебра коммутативна.

При создании структурной теории особую роль играли проблемы бернсайдовского типа. Эти проблемы важны и при построении комбинаторной теории. Они помогают прояснить соответствие между структурными и комбинаторными рассуждениями.

Общей схемой структурных рассуждений является редукция к неприводимым в том или ином смысле объектам (первичным, простым) и изучении радикала — части, которая изчезает при такой редукции (отображающейся в ноль при любой проекции на неприводимый объект). Неприводимости соответствует периодичность — первичной является мономиальная алгебра, соответствующая **периодическому** слову. Она порождает матричное многообразие $\mathrm{Var}(\mathbb{M}_n)$, где n — длина периода. И если в слове есть периодический кусок сверхслова u^∞ периода, большего n, и выполняется тождество f, которого нет в $n \times n$ матрицах, то с помощью этого тождества период можно испортить. При этом можно получить слово, лексикографически меньшее u. Далее работает техника выделенных наборов, позволяющая сделать "рассуждения в полупростой части" конструктивными. (Набор слов называется *выделенным*, если факторалгебра по идеалу, порожденному этим набором, нильпотентна. Свойство выделенности набора слов или сверхслов не зависит от радикала.) Это позволяет создать периодическую часть периода, меньшего n. Наконец, "перекачка" очень похожа на алгебраичность (отсюда ее эффективность). Унитарной замкнутости многообразия, порожденного алгеброй матриц, отвечает лемма 2.5 о вычеркиваниях и приписках. Рассмотрение неприводимых модулей соответствует рассмотрению сверхслова, линейно не представимого меньшими (а также рассмотрению минимального выделенного набора). Покажем, как это работает.

Теорема. *Множество лексикографически неуменьшаемых слов в PI-алгебре A имеет ограниченную высоту над множеством слов, степень которых не превышает сложности алгебры A.*

Доказательство. Пусть m — минимальная степень тождеств алгебры A, $n = \mathrm{PIdeg}(A)$ — сложность A. Поскольку A имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше m, достаточно показать, что, если $|u|$ — нециклическое слово длины, большей n, то при достаточно больших k слово u^k есть линейная комбинация лексикографически меньших слов.

Шаг 1. Рассмотрим правый A-модуль M, заданный образующей v и соотношениями $vW = 0$, где $W \prec u^{\infty/2}$ (т.е. W меньше некоторой степени u). (Через $u^{\infty/2}$ обозначается бесконечное вправо слово с периодом u, через "$\prec$" — отношение лексикографического порядка.) Соответствие $t : vs \to vus$ задает корректно определенный эндоморфизм модуля M, поэтому M можно рассматривать как $A[t]$-модуль. Наша цель — показать, что $Mt^k = 0$ при некотором k.

Шаг 2. Если $Mt^k \in M \cdot J(\mathrm{Ann}\, M)$, где $J(\mathrm{Ann}\, M)$ — радикал Джекобсона аннулятора, то $Mt^{lk} \in M \cdot J(\mathrm{Ann}\, M)^l$, и по теореме Брауна о нильпотентности радикала $Mt^{lk} = 0$ при достаточно большом l. (Воспользовавшись центральностью t в $A[t]$, можно обойтись и теоремой Амицура о локальной нильпотентности радикала.) Поэтому, переходя к модулю M над факторалгеброй $B = A[t]/J(\mathrm{Ann}\, M)$, можем считать, что $J(\mathrm{Ann}\, M) = 0$.

Шаг 3. Используя примарное разложение, сводим доказательство к случаю, когда M есть точный модуль над первичным кольцом B.

Шаг 4. Элементы центра $Z(B)$ не имеют аннулятора, поэтому мы можем по ним локализовать и, сделав алгебраическое расширение $Z(B)$, прийти к случаю, когда B — алгебра матриц над полем. При этом размер матриц не превышает n.

Шаг 5. Применив конструкцию 2 из параграфа 1.0.2, мы получаем минимальное ненулевое правое сверхслово $vu^{\infty/2}$, что противоречит следствию 2.41 из теоремы о независимости (см. пункт 2.1.3). $\square$

Прокомментируем доказательство. Модуль M очень похож на неприводимый модуль. Имеется параллелизм рассуждений, связанных с рассмотрением таких модулей и с рассмотрением слов, линейно не представимых меньшими. Модуль M можно определить с помощью левых сверхслов, имеющих на бесконечности период u; t означает оператор сдвига. Периодическое слово есть собственный вектор для оператора t с собственным значением

u. Принадлежность радикалу Джекобсона означает, помимо всего прочего, отсутствие ненулевых собственных значений. И рассмотрение левых сверхслов позволяет показать нильпотентность $J(A[t])$. Отметим, что аналогия между структурными и комбинаторными рассуждениями во многом остается неясной.

Приведем примерное содержание работы по главам. Глава 1 в основном посвящена бесконечным словам и равномерно рекуррентным словам. Леммы, доказанные здесь, затем многократно используются. Кроме того, рассматривается рост в словах и алгебрах. В частности, строится патологический пример алгебры, функция роста которой то отстает от $\varphi(n) = n(n+3)/2 + \lambda(n)$, где $\lambda(n)$ — произвольная функция, стремящаяся (сколь угодно медленно) к бесконечности, например, $\ln n$, то обгоняет $\psi(n) = e^{o(n)}$, например, $\psi(n) = e^{\sqrt{n}}$. Также описываются алгебры с "предельно" медленным ростом $n(n+3)/2$.

В главе 2 комбинаторика слов применяется при рассмотрении вопросов бернсайдовского типа и изучении нормальных базисов. Целью является получение чисто комбинаторных (и, следовательно, конструктивных) доказательств известных ранее результатов, а также получение явных оценок. Большое внимание уделено свойствам периодических слов. Из рассмотренных здесь теорем следует упомянуть теорему о независимости Уфнаровского—Чекану и теорему Ширшова об ограниченности высот. Связь между радикалами и сверхсловами используется для доказательства отсутствия алгебр, функции роста которых заключены между линейными и $n(n+3)/2$. Параграф **??** посвящен правильным словам их приложению к теории алгебр Ли, доказательству нильпотентности подалгебры, порожденной сэндвичами, и теореме о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством.

В главе 3 доказывается совпадение нильрадикала и радикала Джекобсона в мономиальной алгебре. Радикал Джекобсона описывается в терминах равномерно рекуррентных слов.

В главе 4.6 изучаются конечномерные представления мономиальных алгебр. Мы рассматриваем "дикие" и "ручные" мономиальные алгебры — т.е. алгебры, все представления которых поддаются или не поддаются описанию. Ручными мономиальными алгебрами оказываются только 1-порожденные алгебры и 2-порожденные алгебры с нулевым умножением. Описание неприводимых представлений автоматной PI-алгебры сводится к описанию представлений алгебры A_{u^∞}. Если автоматная алгебра не является PI-алгеброй, то задача описания неприводимых представлений является дикой.

Необходимым условием представимости является выполнение теоремы о высоте. В этом случае при некотором h слова алгебры имеют вид $u_1^{k_1}u_2^{k_2}\dots u_l^{k_l}$, где $l \le h$, а $\{u_i\}$ — набор слов фиксированной длины. Необходимое и достаточное условие представимости формулируется как условие на множество векторов $\vec{k} = \langle k_1, \dots , k_l\rangle$. Оно означает, что множество таких $\langle k_1, \dots , k_l\rangle$, что $u_1^{k_1}\dots u_l^{k_l} = 0$, должно задаваться системой экспоненциальных диофантовых уравнений. В качестве следствия получается следующий результат.

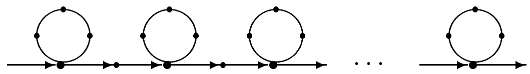
Теорема. *Представимая мономиальная алгебра над полем характеристики 0, имеющая размерность Гельфанда—Кириллова 1, является автоматной, а ее ряд Гильберта — рациональным.*

Кроме того, строится пример мономиальной алгебры (или полугруппы), представимой над полем характеристики p, но не представимой над полем нулевой характеристики. Также строится пример представимой мономиальной алгебры над полем характеристики 0, ряд Гильберта которой трансцендентен.

В главе 5 изучаются многообразия, порожденные произвольным множеством мономиальных алгебр. Такие многообразия образуют достаточно широкий класс: например, многообразия, порожденные алгеброй матриц и алгеброй верхнетреугольных матриц, порождаются автоматными алгебрами. Тем не менее не все многообразия реализуются таким образом: например, многообразие, заданное тождеством $x^n = 0$, и многообразие, порожденное алгеброй Грассмана, не порождаются мономиальными алгебрами. Основным результатом этой главы является следующая

Теорема. *Любое многообразие, порожденное произвольным множеством мономиальных (не обязательно конечно порожденных или автоматных!) алгебр, порождается одной автоматной алгеброй.*

Для доказательства этой теоремы используется техника формальных степенных рядов. Далее дается классификация многообразий, порожденных автоматными алгебрами, в терминах графов. Всякое такое многообразие есть конечное объединение многообразий автоматных алгебр, заданных графами вида



(линейные пути между циклами и сами циклы имеют произвольную длину), удовлетворяющими следующему условию: каждая стрелка, имеющая хотя бы одну общую вершину с циклом, помечена буквой, которая нигде больше не встречается.

Следствие. *Любое многообразие мономиальных алгебр порождается конечно определенной алгеброй.*

Таким образом, буквы могут совпадать только на внутренних стрелках линейных путей, соединяющих циклы между собой. При доказательстве этой теоремы используется достаточно громоздкая техника работы с графами, позволяющая путем различных “элементарных” операций постепенно упрощать граф так, чтобы при этом порожденное им многообразие не менялось (либо чтобы последовательные многообразия вкладывались друг в друга).

Как следствие из этой теоремы, а также из того, что многообразие, порожденное автоматной алгеброй с циклическим графом, совпадает с многообразием, порожденным алгеброй матриц, получаем классификацию унитарно замкнутых многообразий мономиальных алгебр.

Теорема. *Всякое унитарно замкнутое многообразие, порожденное мономиальными алгебрами, совпадает с конечным объединением многообразий, идеалы тождеств которых есть конечные произведения идеалов тождеств матричных алгебр.*

Итак, в случае алгебр с единицей никаких других многообразий мономиальных алгебр, кроме многообразий матричных алгебр и прямых суммм их полупрямых произведений, не бывает.

В заключительной части работы рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности фиксированного индекса. Внимание сосредоточено на разрешимости алгоритмических проблем в этих многообразиях. Показано, что алгоритмически разрешим вопрос о выполнимости тождества лиевой нильпотентности фиксированного индекса в конечно порожденной алгебре, в которой разрешима проблема равенства слов. Также доказано, что в многообразии лиево нильпотентных алгебр проблема равенства слов решается с помощью алгоритма, использующего технику базисов Грёбнера.

При подготовке этой статьи мы использовали обзор В. А. Уфнаровского [?] и книгу Ж. Окнинского [245]. Идея использования равномерно рекуррентных бесконечных слов возникла в результате бесед с М. В. Сапиром. Критерий представимости мономиальных алгебр возник как вариация идей Д. Аника. Т. Гатевой-Ивановой принадлежит определение первичного сверхслова, и наше изложение теории радикала мономиальных алгебр основано на результатах совместной работы. К сожалению, из–за неожиданной сжатости сроков и проблем организационного характера нам не удалось привлечь ее в качестве соавтора. Однако мы надеемся на дальнейшее сотрудничество. В обсуждении вопросов, относящихся к теореме о высоте и к неассоциативному случаю, принимал участие С. В. Пчелинцев. Мы благодарны Е. И. Зельманову и А. В. Михалеву за постановку некоторых задач и моральную поддержку. Авторы благодарят Л. А. Бокутя, А. А. Михалева, В. А. Уфнаровского, В. Т. Маркова, В. М. Петроградского за полезные обсуждения.

1. Комбинаторика слов и ее приложения

В комбинаторных рассуждениях теории колец прежде всего имеют дело со словами, т.е. с записью элементов через образующие. Техника работы со словами использует мономиальные алгебры, в которых определяющие соотношения представляют собой набор слов, равных нулю. Ряд вопросов теории колец, например, изучение рядов Гильберта, сводятся к мономиальному случаю. Перейдем к определениям.

Отметим следующее полезное утверждение, доказываемое с помощью комбинаторики слов.

Предложение 1.1. *Пусть A — к.п. градуированная алгебра, M — конечный набор однородных элементов такой, что при всех k факторалгебра $A/M^{(k)}$ нильпотентна. Тогда любая факторалгебра $A' = A/I$, в которой все проекции элементов из M алгебраичны, конечномерна.*

Доказательство. Пусть k — максимум из степеней многочленов, аннулирующих элементы из проекции M. Пусть $A/M^{(k)}$ нильпотентна индекса l. Это означает, что все слова в A длины, не меньшей l, линейно представимы словами от образующих A и элементов $m \in M$, содержащих m^k своим подсловом. Поэтому проекции слов длины l линейно представимы проекциями слов меньшей длины. $\square$

1.0.1. Некоторые конструкции

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathrm{Wd}\langle\{x_i\}\rangle$. Через $\widehat{\mathcal{M}}$ обозначается множество подслов слов из $\mathcal{M}$. Тогда $\mathrm{Wd}\langle\{x_i\}\rangle\backslash\widehat{\mathcal{M}}$ — идеал в полугруппе $\mathrm{Wd}\langle\{x_i\}\rangle$. Он порождает идеал $I_{\mathcal{M}}$ в алгебре $\Phi\langle\{x_i\}\rangle$. Соответствующая факторалгебра обозначается $A_{\mathcal{M}}$. Пусть W — бесконечное слово. Тогда A_W — это алгебра, все соотношения в которой имеют вид $v = 0$, где v — слово, не являющееся подсловом W. Если $\{W_i\}$ — набор слов, то A_{W_i} суть алгебра, все соотношения в которой имеют вид $v = 0$, где v — слово, не являющееся подсловом ни одного из $\{W_i\}$.

Известна следующая теорема.

Теорема 1.2. *Для любой алгебры A существует мономиальная алгебра $\widehat{A}$ с той же функцией роста.*

Таким образом, изучение функций роста в алгебрах сводится к мономиальному случаю. Отметим, однако, что алгебра $\widehat{A}$ может оказаться не конечно определенной даже в том случае, когда A конечно определена.

1.0.2. Сверхслова в алгебрах

Большинство комбинаторных результатов данной части основывается на рассмотрении бесконечных слов или сверхслов. В данном пункте собраны основные технические факты и конструкции, относящиеся к сверхсловам в алгебрах.

Определение 1.3. *Сверхсловом* называется слово, бесконечное в обоих направлениях, слово, бесконечное только налево, называется *левым сверхсловом*, а бесконечное направо — *правым*.

Определение 1.4. Через u^∞ обозначается сверхслово с периодом u, через $u^{\infty/2}$ — правое (левое) сверхслово с периодом u, начинающееся (заканчивающееся) словом u.

Из контекста всегда будет ясно, какое одностороннее сверхслово имеется ввиду — правое или левое, поэтому мы не вводим специальных обозначений. Например, запись $u^{\infty/2}\cdot s\cdot v^{\infty/2}$ подразумевает, что $u^{\infty/2}$ — левое сверхслово, а $v^{\infty/2}$ — правое.

Правые сверхслова (в отличие от конечных слов, где есть несравнимые элементы) образуют линейно упорядоченное множество относительно левого лексикографического порядка, а левые — относительно правого. Мы по преимуществу рассматриваем сверхслова и правые сверхслова.

Мы не можем говорить о значении сверхслова в алгебре, но можем говорить о его равенстве или неравенстве нулю, а в некоторых случаях — и о линейной зависимости.

Определение 1.5. а) Сверхслово W называется *нулевым*, если у него есть нулевое подслово конечной длины, и *ненулевым*, если все его подслова конечной длины ненулевые.

б) Конечный набор правых сверхслов $\{W_i\}$ называется *линейно зависимым*, если существуют такие $\{\lambda_i\}$, не все равные нулю, что для всех достаточно больших k выполняется соотношение:

$$\sum \lambda_i (W_i)_k = 0$$

(через $(W)_k$ обозначается начальный отрезок W длины k).

в) Пусть M — правый A-модуль, W — правое сверхслово в алгебре A, $m \in M$. Мы говорим, что $mW \neq 0$, если $\forall k \quad m(W)_k \neq 0$. Иначе $Mw = 0$.

г) Пусть M — правый A-модуль, $\{W_i\}$ — конечный набор правых сверхслов в алгебре A, $\{m_i\} \subseteq M$. Мы говорим, что $\sum m_i W_i = 0$, если для всех достаточно больших $k \quad \sum m_i (W_i)_k = 0$.

Аналогичные определения можно дать для левых сверхслов и левых модулей.

Если не оговорено противное, то мы рассматриваем случай, когда алфавит $\mathcal{A}$ конечен. При этом множество сверхслов (левых, правых, двусторонних) над $\mathcal{A}$ образует компактное пространство $\mathcal{A}^\infty$ в топологии тихоновского произведения, индуцированной дискретной топологией в $\mathcal{A}$. Правые сверхслова относительно левого лексикографического порядка (а левые — относительно правого) образуют линейно упорядоченное множество, при этом для каждого подмножества существует инфимум и супремум.

Из леммы о существовании сверхслова, каждое подслово которого есть подслово данного семейства конечных слов неограниченной длины, вытекает следующее

Предложение 1.6. *а) В конечно порожденной ненильпотентной алгебре A существуют ненулевые сверхслова.*

б) Пусть M — к.п. правый A-модуль, A — к.п. алгебра. Тогда если $\forall k$ $MA^k \neq 0$, то существуют $m \in M$ и правое сверхслово W такие, что $mW \neq 0$. □

Из определений нулевого сверхслова и тихоновской топологии следует, что множество нулевых сверхслов открыто, а множество ненулевых — замкнуто. Из существования точной верхней и нижней грани у любого множества правых сверхслов вытекает следующее

Предложение 1.7. *а) Пусть W — сверхслово. Тогда среди правых сверхслов, все подслова которых содержатся в W, есть как максимальное, так и минимальное.*

б) Пусть $\forall k \quad mA^k \neq 0$. Тогда множество правых сверхслов W таких, что $mW \neq 0$, содержит как максимальное, так и минимальное сверхслово.

в) Если A не нильпотентна, то среди ненулевых правых сверхслов в A есть как максимальное, так и минимальное. □

Определение 1.8. а) Набор слов $\{w_i\}$ называется *выделенным*, если факторалгебра $A/Id(\{w_i\})$ нильпотентна.

б) Набор сверхслов $\{W_i\}$ называется *выделенным*, если набор слов $\{w_i\}$, получающийся заменой каждого сверхслова W_i на его конечное подслово w_i, является выделенным.

Пусть u — слово в алгебре A, максимальное среди всех ненулевых слов в A длины $\leq n$. К сожалению, u может не продолжаться до слова большей длины. Поэтому чтобы применять технику сверхслов, мы будем пользоваться следующей конструкцией.

Конструкция 1. Пусть A — алгебра с образующими $a_s \succ \cdots \succ a_1$. Положим $a_1 \succ x$ и рассмотрим свободное произведение $A' = A * F\langle x \rangle$.

Тогда каждое слово u в алгебре A есть начало некоторого сверхслова в алгебре A'. Если u — максимальное слово в алгебре A среди всех слов длины не выше $|u|$, то максимальное сверхслово в A', начинающееся с u, является сверхсловом в A. Если u — сверхслово в A, каждое начало которого обладает этим свойством, то максимальное сверхслово в A' есть u.

Для работы с модулями полезна следующая конструкция.

Конструкция 2. Пусть A — алгебра с образующими $a_s \succ \cdots \succ a_1$, M — к.п. правый A-модуль с образующими $m_k \succ \cdots \succ m_1$. Положим $m_1 \succ a_s$, $a_1 \succ x$. Положим $\widetilde{A} = A \oplus M$, $\forall i, j\ 0 = m_i m_j = a_i m_j$; $\mu\alpha$ ($\mu \in M$, $\alpha \in A$) есть результат действия α на μ, $\alpha\beta$ (α, $\beta \in A$) определяется как произведение в A. Обозначим через A'' фактор свободного произведения $\widetilde{A} * F\langle x\rangle/I$, где идеал I порожден элементами вида xm_i.

В алгебре A'' максимальное правое сверхслово начинается с m_k, любое слово из $\widetilde{A}$ продолжается до сверхслова в A''; если $\forall k\ MA^k \neq 0$, то максимальное сверхслово в $\widetilde{A}$ начинается с некоторого m_i. Если u — максимальное слово в алгебре A среди всех слов длины не выше $|u|$, действующих ненулевым образом на образующие модуля, то при подходящей перенумерации m_i максимальное сверхслово в A'' является сверхсловом в $\widetilde{A}$. Если u — сверхслово в $\widetilde{A}$, каждое начало которого обладает этим свойством, то максимальное сверхслово в A'' есть u.

Отметим, что если алгебра не имеет нильпотентного идеала, то любое слово продолжается до сверхслова.

При исследовании вопросов нильпотентности часто пользуются следующим соображением.

Предложение 1.9. *Если в алгебре (полугруппе) нет ненулевого периодического сверхслова, то все ее слова нильпотентны.* $\square$

Отметим, что таким свойством обладает алгебра A_W, где W — равномерно рекуррентное непериодическое слово (см. определение 1.18).

1.1. Рост в словах и в алгебрах

Понятие роста измеряет количество соотношений в алгебраической системе, степень ее “бесконечности”. Оно служит, в частности, обобщением понятия размерности в бесконечномерном случае. Вопрос о поведении функций роста в группах, полугруппах и алгебрах изучался многими авторами. Достаточно часто встречается полиномиальный (например, в коммутативном случае) и экспоненциальный (в свободных алгебрах) рост. Дж. Милнор поставил вопрос о наличии групп промежуточного роста. Проблема Милнора была решена Р. И. Григорчуком [43]. Рост конечно определенной мономиальной алгебры либо полиномиален, либо экспоненциален. В. А. Уфнаровский [145] построил пример конечно определенной алгебры промежуточного роста. Она явилась универсальной обертывающей алгеброй для бесконечномерной алгебы Ли. А. А. Кириллов и М. Л. Концевич [76] построили относительно свободную алгебру Ли промежуточного роста — алгебру Ли векторных полей общего положения на многообразиях. Поэтому представляет интерес вопрос о поведении функций роста алгебр в общем случае.

Определения. Пусть A — алгебра с фиксированным набором образующих над полем F. Через (x) обозначается идеал, порожденный элементом x, а через (α) — идеал, порожденный множеством α. *Функция роста* $V_A(n)$ алгебры A — это размерность пространства, порожденного словами длины не выше n. $V_A(0) = 0$, $V_A(1)$ есть число образующих. Положим $T_A(n) = V_A(n) - V_A(n-1)$. В случае, когда алгебра однородна и все a_i имеют степень однородности единица, $T_A(n)$ есть размерность пространства, порожденного словами длины ровно n. *Рядом Гильберта* $H_A(x)$ называется производящая фукция $\sum V_A(n)\cdot x^n$. Легко видеть, что $\sum T_A(n)\cdot x^n = (1-x)\cdot H_A(x)$. *Функция роста* бесконечного слова W определяются аналогично: $V_W(n)$ — это число его различных подслов длины не выше n, $T_W(n) = V_W(n) - V_W(n-1)$ есть число различных подслов слова W длины ровно n. Можно показать, что для любой алгебры с фиксированным набором образующих найдется мономиальная алгебра с той же функцией роста. В дальнейшем мы будем рассматривать только этот случай. Тогда $T_A(n)$ есть число ненулевых слов этой алгебры длины ровно n.

Отметим, что рост у свободной k-порожденной алгебры A_k и у свободной группы G_k экспоненциален: $T_{A_k}(n) = k^n$, $T_{G_k}(n) = k(k-1)^n$. Если L_k — свободная k-порожденная алгебра Ли, то $T_{L_k}(n)$ равно количеству правильных слов длины n (см. пункт **??**) и $T_{L_k}(n) > k^n/n$. С другой стороны, у разрешимых групп, а также у PI-алгебр рост полиномиален.

Следующая теорема говорит о возможном "аномальном" поведении функций роста.

Теорема 1.10. *а) Пусть* $\psi(n) = e^{o(n)}$, *т.е.* $\lim_{n\to\infty} \ln\psi(n)/n = 0$. *Пусть* $\varphi(n) = n(n+3)/2 + 1/o(1)$, *т.е.* $\lim_{n\to\infty}(\varphi(n) - n(n+3)/2) = \infty$. *Тогда существует такая алгебра A и два бесконечные подмножества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ натурального ряда, что*

1) при всех $n \in \mathcal{K}$ $\quad V_A(n) > \psi(n)$;

2) при всех $n \in \mathcal{L}$ $\quad V_A(n) < \varphi(n)$.

Если $\psi(n)$ есть многочлен, то A может быть выбрана PI-алгеброй.

б) Пусть $\psi(n) < Cn^k$. Тогда существует PI-алгебра, удовлетворяющая условиям предыдущего пункта для функций φ и ψ .

Например, пусть $\psi(n) = e^{\sqrt{n}}$, $\varphi(n) = n(n+3)/2 + \ln(n)$. Тогда функция роста алгебры A то растет медленно и отстает от φ, то вдруг начинает расти быстро и обгоняет ψ, и это происходит бесконечно много раз.

Доказательство. Нам понадобится рассмотреть две вспомогательные алгебры.

1. Алгебра $A^\infty = \Phi\langle a, b\rangle/(b)^2$. Слова этой алгебры — это суть слова, не содержащие двух вхождений букв b. Как легко видеть, $T_{A^\infty}(n) = n+1$, поэтому $V_{A^\infty}(n) = n(n+3)/2$. Очевидно следующее

Предложение 1.11. *Для любой константы C существует такое $K(C,\varphi)$, что при $n > K(C,\varphi)$* $\quad V_{A^\infty}(n) + C < \varphi(n)$. □

2. Алгебра $A^n = \Phi\langle a, b\rangle/I_b^n$, где I_b^n — идеал, состоящий из слов, не содержащих подслов вида ba^kb, где $k < n$. Ясно, что при $k < n$ $\quad T_{A^n}(k) = T_{A^\infty}(k) = k+1$. Легко видеть также, что $T_{A^\infty}(k) \geq 2^{[k/n]}$. Для этого достаточно рассмотреть множество слов, у которых на позициях с номером, не кратным n (номер отсчитывается слева), стоит буква a, а в остальных позициях стоит все что угодно. Число таких слов равно $2^{[k/n]}$. Поэтому справедливо

Предложение 1.12. *Существует такое $N_\psi(n)$, что при $k > N_\psi(n)$ справедливы неравенства*

$$V_{A^n}(k) > T_{A^n}(k) \geq \psi(k).$$

□

Итак, алгебра A^n есть алгебра экспоненциального роста. Множество слов алгебры, которую мы будем строить, при некоторых длинах слов будет устроено как множество слов алгебры A^∞, при других длинах — как множество слов алгебры A^{l_i}.

Основная конструкция. Пусть α: $l_1 < k_1 < l_2 < k_2 < \ldots < l_i < k_i < l_{i+1} < \ldots$ — последовательность натуральных чисел. Через $I(\alpha)$ мы обозначим идеал, порожденный следующими множествами $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$:

$$\mathcal{W}_1 = \{W \mid l_i < |W| < k_i \quad \& \quad \exists k < l_i : \ ba^k b \subset W\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{W \mid k_i < |W| < l_{i+1} \quad \& \quad \exists k < l_{i+1} : \ ba^k b \subset W\}.$$

Положим $W(\alpha) = \mathrm{Wd}(a,b) \backslash I(\alpha)$, $A(\alpha) = \Phi(a,b)/I(\alpha)$.

Ясно, что при $l_i \le n < k_i$ $T_{A(\alpha)}(n) = T_{A^{l_i}}(n)$, а при $k_i \le n < l_{i+1}$ $T_{A(\alpha)}(n) = T_{A^\infty}(n) = n+1$. Предложение 1.12 позволяет выбрать k_i так, чтобы выполнялось неравенство $V_{A(\alpha)}(k_i - 1) > T_{A(\alpha)}(k_i - 1) = T_{A^{l_i}}(k_i - 1) > \psi(k_i - 1)$, а предложение 1.11 позволяет выбрать l_{i+1} так, чтобы выполнялось неравенство $V_{A(\alpha)}(l_{i+1} - 1) < \varphi(l_{i+1} - 1)$. В этом случае построенная алгебра $A(\alpha)$ будет искомой алгеброй, удовлетворяющей условиям теоремы. Доказательство первой части теоремы завершено.

Доказательство п.б) аналогично. Достаточно отметить, что алгебра $F\langle a,b\rangle / \mathrm{id}(b)^k$ является *PI*-алгеброй и что число слов, имеющих k вхождений букв b, у которых любые два вхождения букв b находятся на расстоянии, большем R, растет как n^k. □

Замечание. На множестве функций роста вводят следующие отношения. Отношение нестрогого порядка: $f \succ g$, если для некоторых c, k при всех n $cf(kn) \ge g(n)$; отношение эквивалентности: $f \sim g$, если $f \succ g$ и $g \succ f$. Класс эквивалентности функции роста алгебры (группы, полугруппы, алгебры Ли) не зависит от выбора системы образующих.

Для случая алгебр Ли аналогично доказывается следующая

Теорема 1.13. *Пусть $\psi(n) = e^{o(n)}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \ln\psi(n)/n = 0$. Пусть $\varphi(n) = n + 1/o(1)$, т.е. $\lim_{n\to\infty}(\varphi(n) - n) = \infty$. Тогда существуют такие алгебра Ли L и два бесконечных подмножества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ натурального ряда, что*

а) при всех $n \in \mathcal{K}$ $\quad V_L(n) > \psi(n)$;

б) при всех $n \in \mathcal{L}$ $\quad V_L(n) < \varphi(n)$.

Например, пусть $\psi(n) = e^{\sqrt{n}}$, $\varphi(n) = n + \ln(n)$. Тогда функция роста некоторой алгебры то отстает от φ, то обгоняет ψ.

С другой стороны, условия этих теорем нельзя улучшить. А именно, как для функций T_A и V_A, так и для функций T_W и V_W можно утверждать следующее.

Теорема 1.14. *Существуют следующие пределы:*

а) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \ln(T(n))/n$;

б) $\lim_{n\to\infty}(T(n) - n)$, и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(V(n) - n(n+3)/2)$;

в) если L — алгебра Ли, то существует предел $\lim_{n\to\infty}(V_L(n) - n)$.

Таким образом, рост бывает экспоненциальным, подэкспоненциальным, квадратичным, линейным, константой.

Замечание. Условие пункта а) теоремы 1.14 означает, что верхнюю границу ("потолок") в условиях теорем 1.10, **??** нельзя поднять, условия пунктов б), в) — что в условиях теорем 1.10, 1.13, **??** нижнюю границу ("пол") нельзя опустить. Возникает вопрос о справедливости пункта а) для алгебр Ли. Предположительный ответ отрицательный. Техника работы [145] позволяет показать, что если $\lim_{n\to\infty}\ln(V_L(n))/n = 0$, то $\lim_{n\to\infty}\ln(V_{U(L)}(n))/n = 0$. Однако условия равенства нулю нижнего предела $\underline{\lim}_{n\to\infty}\ln(V_L(n))/n = 0$ для этой техники недостаточно. Возникает вопрос: пусть L — алгебра Ли и пусть $\underline{\lim}_{n\to\infty}\ln(V_L(n))/n = 0$; верно ли, что $\lim_{n\to\infty}\ln(V_L(n))/n = 0$?

1.2. Конечные подслова, равномерно рекуррентные слова. Соображения компактности

Обозначения и определения. *Куском*, или *подсловом v слова W* мы называем набор символов, встречающихся в W, идущих подряд. Место, где этот кусок встречается, называется *вхождением v в W*. Через $|W|$ мы обозначаем множество всех конечных подслов бесконечного слова W. $W_1 \sqsupset W_2$ означает, что $|W_1| \supset |W_2|$, и $W_1 \sqsupseteq W_2$ означает, что $|W_1| \supseteq |W_2|$. В первом случае мы говорим, что W_1 *богаче кусками*, чем, во W_2 втором — что *не беднее кусками*. Два слова U и V называются *эквивалентными* $U \sim V$, если они имеют одинаковые конечные подслова, т.е. $|U| = |V|$. Понятия *"не богаче кусками"*, *"беднее кусками"* определяются аналогично.

Определение 1.15. *(Бесконечным) словом U* называется последовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ из символов. *Оператором сдвига τ* называется оператор $U \to \tau(U)$, определенный покомпонентно: $\tau(\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $v_n = u_{n+1}$.

Определение 1.16. *Расстоянием между словами* W_1 и W_2 мы назовем величину $d(W_1, W_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n 2^{-|n|}$, где $\lambda_n = 0$, если n-е позиции слов совпадают, и $\lambda_n = 1$, если они не совпадают. (Такое расстояние называется *расстоянием Хемминга.*)

Справедливы следующие утверждения.

1. Множество слов $\mathbf{W}$ — компактное метрическое пространство.

2. Операторы сдвига τ и τ^{-1} непрерывны, т.е. $\tau : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ — гомеоморфизм. Более того,

$$d(\tau(W_1), \tau(W_2)) \le 2d(W_1, W_2), \quad d(\tau^{-1}(W_1), \tau^{-1}(W_2)) \le 2d(W_1, W_2).$$

3. Для слова W через $\widehat{W}$ обозначим множество всех слов, к каждому из которых сколь угодно близок сдвиг слова W, т.е. $U \in \widehat{W} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{Z} : d(U, T^n W) < \varepsilon$, т.е. $\widehat{W}$ — замыкание $\{T^n W,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Следующие свойства слова U равносильны:

а) $U \in \widehat{W}$,

б) U принадлежит замкнутой орбите слова W,

в) $|U| \subset |W|$ (т.е. $U \sqsubset W$).

Пусть $U < V$, если $\widehat{U} \subset \widehat{V}$, и $U \vdash V$, если $\widehat{U} = \widehat{V}$.

Предложение 1.17. $U < V \iff |U| \subset |V|$ *(любой конечный кусок слова U встречается в V).* $\square$

Пример. Рассмотрим последовательность $123\ldots$, которая получается, если выписать подряд все числа в десятичной записи. В ней встречается любая комбинация цифр, поэтому ее замкнутая орбита совпадает с множеством всех слов вообще.

Определение 1.18. Слово U называется *равномерно рекуррентным*,если $\forall k\ \exists n(k)$ такое, что всякий кусок длины k слова U содержится в любом куске слова U длины $n(k)$.

Равносильное определение: $\forall u \subset U\ \exists n(u) \colon \forall v \subset U \colon |v| \geq n(u) \Longrightarrow u \subset v$.

Теорема 1.19. *Следующие два свойства бесконечного слова W равносильны:*

а) для любого k можно найти $N(k)$ такое, что любой участок W длины k можно найти в любом участке W длины $N(k)$;

б) если все конечные куски слова V являются конечными кусками слова W, то и все конечные куски слова W являются конечными кусками слова V. $\square$

Лемма 1.20 (о компактности). *Пусть $\mathcal{M}$ — множество слов неограниченной длины над конечным алфавитом $\mathcal{A}$. Тогда существует бесконечное слово V, все подслова которого являются подсловами слов из $\mathcal{M}$.* $\square$

Следствие 1.21. *Если u — подслово слова W, и в слове W есть сколь угодно длинные подслова, не содержащие u, то существует слово W', которое беднее кусками, чем W. При этом можно выбрать W так, чтобы u не входило в W'.* $\square$

Следствие 1.22. *Для любой убывающей в смысле отношения $\sqsupseteq$ цепочки сверхслов найдется инфимум.* $\square$

Следствие 1.23. *Для слова W найдется беднейшее по подсловам слово W' такое, что $W \sqsupseteq W'$.* $\square$

Мы имеем следующую теорему, означающую, что из кусков любого слова можно составить р.р. слово.

Теорема 1.24. *Пусть W — бесконечное слово. Тогда существует равномерно рекуррентное слово $\widehat{W}$, все подслова которого являются подсловами W.* $\square$

Эта теорема исключительно важна в комбинаторике слов, т.к. очень часто позволяет сводить изучение произвольных слов к изучению р.р. слов.

1.2.1. Сверхслова и динамика

Рассмотрим действие оператора сдвига τ на множестве сверхслов. *Инвариантное подмножество* —это подмножество множества всех сверхслов, которое инвариантно относительно действия τ. *Минимальное замкнутое инвариантное множество*,сокращенно м.з.и.м., — это замкнутое (относительно введенной выше метрики) инвариантное подмножество, которое не пусто, не содержит замкнутых инвариантных подмножеств, кроме себя самого и пустого. Обычно оно обозначается через N.

Свойства замкнутых инвариантных множеств. а) М.з.и.м. N есть замкнутая орбита любой своей точки.

б) Любые два м.з.и.м. либо совпадают, либо имеют пустое пересечение. В этом случае они отстоят на ограниченное сверху и снизу расстояние.

в) Следующие свойства слова W равносильны: 1) W — равномерно рекуррентное; 2) $|W|$ минимально по включению среди класса множеств вида $|V|$ (для любого U, если $W \sqsubseteq U$, то $U \sqsubseteq W$, т.е. $U \sim W$); 3) замкнутая орбита W минимальна и представляет собой м.з.и.м.

Фактически пункт а) означает почти возвращаемость к любой точке x: N есть замкнутая орбита любой своей точки, в том числе и точки $y = f(x)$. Это значит, что орбита y сколь угодно близко приближается к любой точке N, в том числе и к x! Однако справедлива более интересная и сильная вещь: в N наблюдается равномерная почти возвращаемость. Имеет место следующая

Теорема 1.25. *Пусть U — открытое множество такое, что $U \cap M \neq \varnothing$. Тогда существует такое $n = n(U) \in \mathbb{N}$, что для всех y из N некоторая итерация $f^{(k)}(y)$, где $1 \leq k \leq n$, попадет в U.* □

Теорема 1.26. *Пусть L — замкнутое инвариантное множество. Тогда существует м.з.и.м. N, содержащееся в L.*

Понятие р.р. слова имеет динамический смысл. Если на k-ом месте последовательности W стоит 0 или 1 в зависимости от попадания $f^{(k)}(y_0)$ в U, то в случае общего положения (когда при всех k $f^{(k)}(y_0)$ не попадает на границу U) слово W р.р. и любое р.р. слово может быть получено похожим образом. В качестве f можно рассматривать оператор сдвига, а в качестве N — м.з.и.м. в пространстве сверхслов, снабженном Тихоновской топологией.

2. Применения техники работы со словами в вопросах бернсайдовского типа

В вопросах бернсайдовского типа важную роль играют комбинаторные эффекты, связанные с периодичностью. Почти периодичность и равномерная рекуррентность также лежат в основе наших рассмотрений. Последовательное применение этих понятий позволяет получить простые доказательства таких известных теорем теории колец, как теорема Ширшова об ограниченности высот *PI*-алгебры, теорема Уфнаровского о независимости, теорема Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной *PI*-алгебры и т.п.

Хочется обратить внимание на связь между периодичностью и лексикографической несравнимостью: если подстановка $u \to v$ приводит к результату, несравнимому с исходным словом, то рассматриваемое вхождение слова v завершает периодический кусок. Многие трудности связаны с тем, что лексикографический порядок частичен. Однако имеет место своего рода альтернатива: квазипериодичность или лексикографическая сравнимость. Если $u \neq v$ и слова us и vs несравнимы, то слова us и vs имеют общий предпериод и квазипериод.

2.1. Периодичность в словах

Положительное решение проблем берсайдовского типа означает возникновение периодичности. В данной части мы изучаем периодические последовательности — комбинаторно самый чистый случай.

2.1.1. Свойства последовательности u^∞

Определим оператор δ, действующий на словах. Пусть слово u имеет вид $u = u'b$, где b — буква. Положим $\delta(u) = bu'$. Обозначим $m = |u|$.

Предложение 2.1. *Множество $\{\delta^k(u)\}$ есть множество слов, циклически сопряженных к слову u. Пусть $u = v^q$, где слово v не является степенью. Тогда $\delta^k(u) = u \iff q$ делит k.* □

Следующее предложение связывает сдвиги u^∞ и оператор циклического сопряжения δ. Через u мы обозначаем слово, не являющееся степенью.

Предложение 2.2. *а) Пусть $|v| = N|u| = |v'|$, и первая буква v' находится на расстоянии 1 справа от первой буквы v. Тогда $v' = \delta(v)$.*

б) Если первая буква v' находится на расстоянии k справа от первой буквы v, то $v' = \delta^k(v)$.

в) Любые два подслова u^∞ длины $N|u|$ циклически сопряжены и совпадают тогда и только тогда, когда расстояние между их начальными буквами кратно периоду.

Из данного предложения вытекает следующее часто используемое

Предложение 2.3. *а) Начальное подслово длины m однозначно определяет слово из A_{u^∞}. Если начальные подслова длины $|u|$ у двух подслов v и v' сверхслова u^∞ совпадают, то одно из них является подсловом другого. Если $|c| \geq |u|$, и d_1 и d_2 лексикографически сравнимы, то по крайней мере одно из слов cd_1 или cd_2 не является подсловом u^∞.*

б) Начальные позиции расположений в слове u^∞ слова v длины больше $|u|$ отличаются на кратное периода.

в) Пусть $|v| \geq |u|, v^2 \subset u^\infty$. Тогда v циклически сопряжено степени слова u. Таким образом, в алгебре A_{u^∞} ненильпотентные слова — это в точности слова, циклически сопряженные словам вида u^k. □

Предложение 2.4. *Если все подслова длины $|u|$ в слове W являются подсловами u^∞, т.е. циклически сопряжены u, то само слово $W \subset u^\infty$. Иными словами, алгебра A_u^F задается набором определяющих соотношений длины $\leq |u|$.* □

Лемма 2.5 (о вычеркиваниях и приписках). *Пусть $t = t_1vt_2 \subset u^\infty$, v циклически сопряжено с u. Тогда $\forall k \geq 0 \quad t_1v^kt_2 \subset u^\infty$. В частности, $t_1t_2 \subset u^\infty$ и $t_1v^2t_2 \subset u^\infty$.* □

Периодичность бесконечного слова означает инвариантность относительно сдвига. В случае односторонней бесконечности возникает предпериод, а в конечном случае — эффекты, связанные с обрезанием. Именно это является ядром очень многих комбинаторных рассуждений. В качестве примера можно привести доказательство гипотезы Шестакова, теоремы о независимости, теоремы Ширшова о высоте, совпадения нильрадикала и радикала Джекобсона для мономиальных алгебр. Ниже собраны соответствующие комбинаторные леммы. Не случайно они часто используются.

Предложение 2.6. *Пусть $uW = Ws$. Тогда uW — подслово u^∞. Слово W имеет вид $u^n r$, где r — начальный сегмент слова u.*

Доказательство. Если W — начало uW, то $\forall k \quad u^k W$ есть начало $u^{k+1}W$. Следовательно, uW — начало $u^{\infty/2}$. □

Следствие 2.7. *Если слово u одновременно является и началом и концом W, то при некоторых s и t слова u и W имеют вид: $u = t(st)^l$, $W = t(st)^k$, $k \geq l$.* □

Следующее предложение аналогично предыдущему:

Предложение 2.8. $uW \succ Ws \iff Ws \prec u^{\infty/2}$, $uW \prec Ws \iff Ws \succ u^{\infty/2}$. □

Следствие 2.9. *Цепочка слов $\mathcal{U} = \{u^k t\}_{k=0}^\infty$ либо строго монотонна относительно лексикографического порядка, либо квазипериодична с периодом u (т.е. t есть начало $u^{\infty/2}$).* □

Следствие 2.10. *Пусть u и v различные подслова W, $|u| \geq |v|$. Фиксируем вхождение u. Тогда выполняется одно из трех утверждений:*

а) Подслова u и v – сравнимы. Тогда замена меньшего слова на большее всегда ведет к увеличению порядка, вне зависимости от вхождения.

б) Одна из замен $u \to v$ либо $v \to u$ ведет к увеличению W.

в) v есть начало u, слово W оканчивается квазипериодическим куском с периодом v и наше вхождение u находится в этом куске. □

Предложение 2.11. *а) Пусть W — бесконечное вправо слово, $W = vuW' = vW'$. Тогда W периодично с периодом u и предпериодом v. В частности, если W совпадает со своим правым концом, то оно периодично.*

б) Пусть W — конечное слово, $W = vuW'$ и vW' — начало W. Тогда слово W имеет вид $vu^k r$, где r — начальный сегмент слова u.

Иначе говоря, если слова ut и vt несравнимы, то они оба псевдопериодичны порядка не выше $\max(|u|, |v|)$.

в) Пусть e_i — собственные начала нециклического слова u, а f_i — его собственные концы. Тогда если $f_1 u^2$ сравнимо с $f_2 u^2$, то $f_1 = f_2$; если $u^2 e_1$ есть конец $u^2 e_2$, то $e_1 = e_2$. □

Определения. Слово $W = u^k$, где $k > 1$, называется *циклическим* или *периодическим.* Если $W = u^k r$, r — начало u, то W называется *квазипериодическим.* Если $W = vu^k r$ (r — начало u), то слово W называется *псевдопериодическим*; v — его *предпериод*, а u — *период. Порядок слова* W есть минимально возможное значение $|v| + |u|$. Если $W = vu^k$, то W называется *предпериодическим* словом. Отметим, что слово псевдопериодично порядка $m \iff$ существует автомат, имеющий m состояний, который может его напечатать.

Следующее предложение полезно для осуществления индукционного спуска.

Предложение 2.12. *Если псевдопериодическое слово не является квазипериодическим, то при выбрасывании первой буквы его порядок уменьшается на единицу.* □

О левой и правой квазипериодичности говорить не имеет смысла, поскольку квазипериодические слова порядка m — это в точности подслова периодических слов периода m, и если $W = u^k r$, где r — начало u, то $W = sv^k$, где v циклически сопряжено с u, s есть конец v. При этом $v = \delta^{|s|}(u)$. С псевдопериодичностью дело обстоит иначе. Фактически мы определили (и будем преимущественно использвать) псевдопериодичность слева. Можно показать, что если $|W| \geq 2m$, то псевдопериодичность порядка не выше m справа и слева влечет квазипериодичность. Однако нам понадобится еще более слабая "периодичность".

Определение 2.13. Слово W называется *слабо псевдопериодическим порядка* m, если оно представимо в виде $au^k rb$, где r — начало u, $|a|+|b|+|u| \leq m$.

Мы покажем в дальнейшем, что все слова в алгебрах медленного роста слабо псевдопериодичны ограниченного порядка. Слабо псевдопериодичными порядка $m+1$ являются слова, каждый начальный кусок которых псевдопериодичен порядка m.

Определение 2.14. Слово называется *m-собственным*, если любое его начало является псевдопериодическим порядка не выше m, а оно само таким не является. m-собственное слово называется *минимальным*, если любой его конец тоже является псевдопериодическим порядка не выше m.

Предложение 2.15. *Каждое m-собственное слово содержит единственное минимальное m-собственное слово, являющееся его концом. Если одно m-собственное слово содержит другое, то они содержат общее минимальное m-собственное слово, являющееся концом обоих.* □

Предложение 2.16. *Пусть l — количество букв в алфавите, $X(R)$ — количество m-собственных слов длины R, $X_k(m)$ — количество m-собственных слов, не содержащих k-ю степень слова длины $\leq m$. Пусть $T(m,R)$ — количество m-собственных слов длины $\leq m$. Тогда*

а) $X(m) < l^{m+1}m, \quad T(m,R) < Rml^{m+1}$;

б) $X_k(m) < l^m(l-1)m \cdot km = l^m(l-1)m^2k$.

Доказательство. Начальный участок длины m может быть выбран l^m способами. Имеется m способов его разбиения на предпериод и период. Последняя буква может быть выбрана $(l-1)$ способом. Наконец, m-собственное слово, не содержащее k-ю степень, имеет длину не выше mk. □

Предложение 2.17. *а) Минимальное m-собственное слово и имеет длину не меньше $m+1$ и не больше $2m$.*

б) Количество $Y(m)$ таких слов не превосходит $l^m(l-1)m$.

Доказательство. В силу предложения 2.12 и индукции, можно считать, что начало u или конец u длины $|u|-1$ квазипериодичен порядка ровно m. Остается воспользоваться леммой о перекрытиях. Пункт б) есть непосредственное следствие пункта а). □

Замечание. Интересно было бы провести точное вычисление количества m-собственных и минимальных m-собственных слов.

2.1.2. Перекрытия слов

Изучим теперь расположение подслов внутри слова. Нас интересуют перекрытия.

Лемма 2.18 (о перекрытиях). *Если два периодических слова периода m и n имеют одинаковое подслово длины $m+n-\text{НОД}(m,n)$, то они составлены из одинаковых подслов.* □

Предложение 2.19. *Пусть даны две периодические последовательности периодов m и n соответственно, $m \geq n$. Тогда если эти две последовательности имеют общий кусок длины $2m$, то они совпадают.* □

Следующее предложение вытекает из леммы о перекрытиях.

Предложение 2.20. *а) Если два псевдопериодических слова порядка $\leq n$ и порядка $\leq m$ соответственно имеют общий участок длины $m+n-1$, то их объединение есть псевдопериодическое слово порядка не выше* $\max(m,n)$.

б) Два m-собственных подслова не могут иметь общий участок длины $2m$.

Доказательство. Пункт б) есть непосредственное следствие пункта а). Воспользовавшись предложением 2.12 и индукционным спуском, можно считать оба подслова квазипериодичными. А этот случай вытекает из леммы о перекрытиях. □

Перекрытие минимальных m-типов

Предложение 2.21. *а) Если два одинаковых квазипериодических подслова порядка m имеют общий участок длины m, то их объединение квазипериодично того же порядка.*

б) Если два одинаковых псевдопериодических подслова порядка m имеют общий участок длины m, то их объединение псевдопериодично того же порядка.

в) Два одинаковых m-собственных подслова не могут иметь общий участок длины $\geq m+1$.

г) Никакие три одинаковых m-собственных подслова не могут иметь общий символ. □

Нас интересуют квазипериодические участки слова. Назовем m-собственное слово u *концом*, если любой его начальный участок квазипериодичен порядка не выше m; если же u — минимальное m-собственное слово, то u называется *минимальным m-концом.*

Предложение 2.22. *а) Два различных m-конца не могут иметь общий участок длины $m+1$. В частности, один m-конец не может содержать другого.*

б) Количество минимальных m-концов не превосходит $l^m(l-1)$.

Доказательство. Пункт а) следует из предыдущего; m-конец однозначно определяется последним символом и последним периодом. □

Решение проблем бернсайдовского типа в ассоциативных алгебрах основывается на приведении слов к кусочно периодическому виду. Поэтому мы изучаем свойства периодических последовательностей.

Определение 2.23. Пусть $Y = \{u_i\}$ — набор слов. *Высотой множества слов W относительно Y* называется наименьшее h такое, что любое слово $w \in W$ представимо в виде $u_{i_1}^{k_1} u_{i_2}^{k_2} \dots u_{i_r}^{k_r}$, где $r \le h$. *Алгебра A имеет высоту h над Y*, если A линейно представима множеством слов, имеющим высоту h над Y. При этом Y называется *базисом Ширшова алгебры A*.

Теорема Ширшова о высоте. *Пусть A — конечно порожденная PI-алгебра степени m, Y — множество слов степени не выше m. Тогда A имеет ограниченную высоту над Y.* □

Эта теорема означает возможность приведения к кусочно периодическому виду. Из нее непосредственно следует локальная конечность алгебраических *PI*-алгебр (проблема Куроша) и, в частности, локальная нильпотентность нильалгебр ограниченного индекса. Кроме того, из теоремы Ширшова вытекает ограниченность размерности Гельфанда—Кириллова.

В связи с теоремой Ширшова возникает вопрос о том, над какими множествами слов Y алгебра A имеет ограниченную высоту. Это частный случай вопроса об устройстве базиса в *PI*-алгебрах. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 2.24 (А. Я. Белов). *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \mathrm{PIdeg}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова u.*

Доказательство. Заметим, что $(uv)^n = u(vu)^{n-1}v$, и если Y содержит два циклически сопряженных слова v_1 и v_2, то одно из них можно удалить из базиса. Таким образом, достаточность условия теоремы следует из теоремы **??**, которая будет доказана ниже. Покажем необходимость. Пусть $|u| \le n$ и u нециклично. Согласно теореме 4.22, $A_u \in \mathrm{Var}(A)$ и, следовательно, является факторалгеброй алгебры A. В силу ненильпотентности A_u, проекция Y должна содержать ненильпотентный элемент. По предложению 2.3 множество ненильпотентных слов в алгебре A_u есть множество слов, циклически сопряженных к степеням слова u. Поэтому Y содержит слово требуемого типа. □

Замечание. Ограниченность высоты *PI*-алгебры над множеством слов степени не выше сложности была анонсирована также Г. П. Чекану [157]. Оценка на длину слов из Y впервые была снижена И. В. Львовым [100] (с m до $m-1$).

Нас будут интересовать также оценки на высоту h. Идея состоит в том, что если высота большая, то слово линейно представимо меньшими словами.

Определение 2.25. Слово W называется *m-разбиваемым*, если его можно разбить на m лексикографически убывающих частей

$$W = w_1 w_2 \dots w_m, \quad \text{где } w_1 \succ w_2 \succ \dots \succ w_m.$$

Следующее предложение объясняет важность понятия m-разбиваемости.

Предложение 2.26 (А. И. Ширшов). *а) Пусть слово W является m-разбиваемым. Тогда любое слово, получающееся из W нетождественной перестановкой w_i, лексикографически меньше W.*

б) Если в алгебре A выполнено тождество

$$x_1 \dots x_m = \sum_{\sigma \neq id} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}$$

степени m, то слово W представимо в виде линейной комбинации меньших слов.

Таким образом, в PI-алгебре степени m слова, не представимые в виде линейной комбинации меньших слов, m-разбиваемыми не являются и достаточно проверить, что множество m-разбиваемых слов имеет ограниченную высоту.

Другое (равносильное) определение n-разбиваемости Слово W m-разбиваемо, если оно имеет вид $s_0v_1s_1v_2 \dots s_{m-1}v_ms_m$, где $v_1 \succ v_2 \succ \dots \succ v_m$.

Предложение 2.27. *Если слово W имеет вид $W = s_0vs_1v \dots s_{m-1}vs_m$, и слово v содержит m попарно лексикографически сравнимых подслов (возможно, перекрывающихся), то W является m-разбиваемым.*

Доказательство. Выберем из первого вхождения v самое старшее подслово, из второго — второе по величине и т.д. Таким образом, из слова W мы выбрали убывающую цепочку из уже неперекрывающихся подслов. $\square$

Итак, слово, содержащее n лексикографически сравнимых подслов n-встречаемо только в n-разбиваемом слове.

Следствие 2.28. *Слово, не являющееся m-разбиваемым, не содержит m неперекрывающихся подслов одинакового m-типа, а также минимального m-типа.* $\square$

Определение 2.29. *m-типом слова W* назовем его m-собственное начало, а в случае, когда W псевдопериодично порядка m, m-типом W назовем само W. *Минимальным m-типом* назовем минимальное m-собственое подслово у собственного m-начала.

Итак, нам нужно находить m попарно лексикографически сравнимых подслов. Следующая лемма чрезвычайно важна. Она устанавливает альтернативу псевдопериодичность — лексикографическая сравнимость. Эта альтернатива лежит в основе получения оценок для высоты, доказательства теоремы о независимости, теоремы о совпадении нильрадикала и радикала Джекобсона мономиальной алгебры и т.д.

Лемма 2.30. *а) Пусть $u_0 = W$, $W = v_1u_1 = v_2u_2 = \dots = v_mu_m$, $|v_i| = i$. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:*

1) слова u_i лексикографически сравнимы и образуют цепь;

2) слово W псевдопериодично с предпериодом v_i для некоторого i и периодом s, причем $v_is = v_j$; порядок W не превосходит m.

б) Пусть u — нециклическое слово, $u^{(i)}$ — его собственные концы. Тогда $u^{(i)}$ии образуют цепь.

Пункт а) непосредственно следует из предыдущего предложения. Пункт б) следует из леммы о том, что если в квазипериодическом слове есть квадрат подслова длины, большей периода, то это слово есть степень периода. $\square$

Следствие 2.31. *а) Пусть* $\forall i \quad |v_i| \le m$ *и при* $i \ne j \quad v_i \ne v_j$. *Тогда либо множество слов* $\{v_i t\}$ *линейно упорядочено относительно лексикографического порядка, либо* t *квазипериодично порядка не выше* m.

б) Определим $(zv)^{(i)}$ *с помощью равенства* $(zv)_i (zv)^{(i)} = zv$. *Пусть* $|zv| > R > m$. *Тогда либо* $(zv)_R$ *псевдопериодично порядка* $\le m$, *либо* $((zv)^{(i)})_R$ *образуют линейно упорядоченное множество.* $\square$

Отметим, что W может быть правым сверхсловом. Если оно не предпериодично, то все его концы попарно различны. Этот случай нам понадобится при доказательстве теоремы о независимости.

Псевдо- и квазипериодичность естественно возникают в проблемах бернсайдовского типа. Следующая лемма является непосредственным следствием из предыдущих предложений.

Лемма 2.32. *а) Пусть* $|z| = R$, z *псевдопериодично порядка* $\le m$. *Тогда* z *содержит* $[R/m]$*-ю степень слова длины* $\le m$.

б) В условиях предыдущей леммы, пусть W *бесконечно,* $\mathcal{K}$ *— множество индексов* i *таких, что* $(u)^{(i)} = V$, *где* V *— некоторый конец сверхслова* W, *и* k_0 *— минимальное число из* $\mathcal{K}$, $v = v_{k_0}$. *Тогда существует такое слово* s, *что для любого* $k \in \mathcal{K} \quad v_k = vs^{n_k}$, *где* $n_k = (k - k_0)/|s|$. $\square$

Следствие 2.33. *Если* $|t| \ge mk$, *то* t *содержит либо* k*-ю степень слова длины не выше* m, *либо* m *подслов, образующих цепь.* $\square$

Эти подслова перекрываются, но если само t имеет m неперекрывающихся вхождений в слово W, то W является m-разбиваемым.

Из предложения 2.16 вытекает следующее

Предложение 2.34. *а) Количество* m*-типов слов, не содержащих* k*-ю степень слова длины* $\le m$, *не превосходит* $l^{m+1}m^2k$.

б) Каждое слово длины $\ge mk$ *либо является псевдопериодичным порядка* m *и содержит* k*-ю степень слова длины* $\le m$, *либо не совпадает со своим* m*-типом.*

в) Если слово W *имеет длину, большую, чем* $l^{m+1}m^4k^2$, *то в слове* W *можно указать* $l^{m+1}m^3k$ *кусков длины* mk, *из них* m *будут иметь одинаковый* m*-тип.* $\square$

Следствие 2.35. *Если слово* W *имеет длину, большую, чем* $l^{m+1}m^4k^2$, *то либо* $W \quad m$*-разбиваемо, либо какая-то комбинация из* $n < m$ *букв повторяется* k *раз подряд.* $\square$

Отметим, что без использования m-типов оценка получается порядка l^{mk}: в слове длины m^2kl^{mk} найдутся m непересекающихся одинаковых подслов длины mk каждое.

Следствие 2.36. *Пусть* A *—* l*-порожденная PI-алгебра степени* m. *Пусть все слова длины не выше* m *от образующих нильпотентны индекса* k. *Тогда* A *нильпотентна индекса* $l^{m+1}m^4k^2$. $\square$

Замечание. Вопрос о локальной конечности алгебраических PI-алгебр был поставлен А. Г. Курошем. Он был решен положительно И. Капланским. Его доказательство было неконструктивным. Первое комбинаторное доказательство было получено А. И. Ширшовым как следствие из теоремы о высоте. Однако оригинальное доказательство теоремы Ширшова имело только рекурсивную оценку. В последствии эта оценка была улучшена А. Т. Колотовым (до двойной экспоненты [?]) и А. Я. Беловым (до экспоненциальной [182]). Для случая характеристики 0 Нагатой и Хигманом была показана нильпотентность (не обязательно конечно-порожденных) ниль-алгебр индекса n. Ими была получена экспоненциальная оценка на степень нильпотентности. Ю. П. Размыслов улучшил эту оценку до n^2. (В случае положительной характеристики глобальная нильпотентность не имеет места.) Локальная конечность алгебраических PI-алгебр Ли в случае характеристики ноль была доказана А. И. Кострикиным. Е. И. Зельманов доказал это в общем случае и показал глобальную нильпотентность Энгелевой алгебры Ли в случае характеристики нуль.

Приведенные оценки можно улучшить, если воспользоваться следующими соображениями: во-первых, достаточно установить повторяемость минимального m-типа для обеспечения m-разбиваемости. Кроме того, нет тройных перекрытий у одинаковых m-типов. Поэтому нет нужды резать слово на куски длины mk и устанавливать повторение m типов кусков. Перекрытия одинакового типа могут быть двойные, а кусков в mk раз меньше. Приведем улучшенные оценки.

Предложение 2.37. *а) Если слово W имеет длину, большую чем $2l^{m+1}m^2k$, то либо W m-разбиваемо, либо какая-то комбинация из $n < m$ букв повторяется k раз подряд. В только что приведенном следствии оценку $l^{m+1}m^4k^2$ можно заменить на оценку $2l^{m+1}m^2k$.*

б) Слово, не являющееся m-разбиваемым, содержит менее чем $2ml^{m+1}$ подслов, являющихся m-концами.

в) Слово, не являющееся m-разбиваемым, разбивается на ml^{m+1} псевдопериодических порядка не выше m частей. □

Таким образом, слово c, не являющееся m-разбиваемым, имеет вид

$$c = c_0\omega_0c_1\omega_1\ldots\omega_{r-1}c_r,$$

где ω_i — квазипериодические порядка не выше m слова длины не меньшей $2m$ каждое, c_i не содержат таких подслов, произведение ω_i на первую букву c_i не псевдопериодично порядка m. Следовательно, $r < ml^{m+1}$ и $\sum|c_i| < ml^{m+1}$.

Представим ω_i в виде $\omega_i = u_i^{k_i}S_i$, где S_i — начало ω_i, $|u_i| \leq m$. Мы имеем следующую теорему.

Теорема Ширшова о высоте. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра степени m. Тогда A имеет ограниченную функцией $H(m,l)$ высоту над множеством слов степени не выше m. При этом*

$$H(m,l) < 3ml^{m+1}.$$

Замечание. Разобравшись с концами ω_i, можно показать, что $H(m,l) < 2ml^{m+1}$.

Нас будет интересовать возникновение q-й степени слова, содержащего данную букву. Из предыдущей теоремы вытекает следующее

Предложение 2.38. *Пусть A — l-порожденная PI-алгебра степени m. Пусть буква z имеет $(q+3)ml^{m+1}$ вхождений в слово W. Тогда W линейно представимо словами, каждое из которых содержит подслово вида $(zv)^q$.* □

Данное предложение нам понадобится для получения оценок на высоту относительно множества слов степени не выше сложности.

2.1.3. Периодичность в словах и теорема о независимости

Предложение 2.39. *Пусть $\{u_i\}$ – множество попарно несравнимых подслов экстремального слова. Тогда они линейно независимы.* □

Из леммы 2.30 вытекает следующая

Теорема 2.40 (о независимости для сверхслов). *Пусть W — минимальное ненулевое сверхслово. Тогда выполняется одно из условий:*

а) слова $(W)_1, \dots, (W)_n$ линейно независимы;

б) W псевдопериодично порядка не выше n. Его предпериод есть некоторое $(W)_i$, а период — один из концов $(W)_n$.

Доказательство. Определим бесконечные слова $(W)^i$ с помощью равенства $W = (W)_i(W)^i$. Если условие б) не выполняется, то множество $\{(W)^i\}$ образует цепь. Пусть $\sum \alpha_i(W)_i = 0$ и пусть $(W)^j$ — минимальное $(W)^i$ для всех i таких, что $\alpha_i \neq 0$. Тогда $W = (W)_i(W)^i \succ (W)_i(W)^j$ при $i \neq j$ и $\alpha_i \neq 0$. Но так как $(W)_j$ представимо линейной комбинацией $(W)_i$, слово $W = (W)_j(W)^j$ тоже представимо линейной комбинацией меньших слов. Но это противоречит тому, что W — минимальное ненулевое слово. □

Замечание. а) В формулировке теоремы минимальность можно заменить на максимальность.

б) Если все подслова длины не выше n слова W нильпотентны, то слова $(W)_1, \dots, (W)_n$ линейно независимы.

Следствие 2.41. *а) Пусть A — подалгебра алгебры $n \times n$ матриц, W — минимальное ненулевое (сверх)слово. Тогда W псеводопериодично порядка не выше n.*

б) Пусть M — к.п. A-модуль, и при всех k $MA^k \neq 0$. Тогда минимальное сверхслово в алгебре A'' (получающейся с помощью конструкции 2 из параграфа 1.0.2), псевдопериодично порядка не выше $n+1$ (единичка добавилась за счет образующей модуля, стоящей перед словом из A). □

Из теоремы о независимости для сверхслов и конструкции 1 параграфа 1.0.2 вытекает следующее

Следствие 2.42. (Теорема о независимости, В. А. Уфнаровский.) *Пусть (1) слово $W = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ является минимальным в левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n;*

(2) концы слова W нильпотентны.

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы. □

Эта теорема была доказана ранее В. А. Уфнаровским [148] и Г. П. Чекану [156].

Следствие 2.43 (гипотеза Шестакова). *а) Пусть A — подалгебра алгебры матриц $\mathbb{M}_n$, имеющая фиксированный набор образующих. Тогда если все слова степени $\leq n$ нильпотентны, то алгебра A нильпотентна.*

б) Пусть A — алгебра сложности n с фиксированным набором образующих. Тогда если все слова степени $\leq n$ нильпотентны, то алгебра A локально нильпотентна.

Доказательство. а) Алгебра A имеет точное представление операторами в n-мерном пространстве. Пусть $m_1, \dots, m_n$ — базис этого пространства. Осталось применить конструкцию 2 и теорему о независимости для сверхслов. Для доказательства пункта б) достаточно взять фактор по радикалу и воспользоваться представимостью. □

Пункт а) данного следствия был впервые сформулирован И.В.Львовым. Им же [100] было замечено наличие редукции пункта б) к а).

Г. П. Чекану [158] сделал следующие наблюдения: 1) условие нильпотентности можно заменить квазирегулярностью значений некоторых многочленов, 2) линейно независимыми оказываются не только начала слова W, но и все его различные подслова. Техника периодичности в бесконечных словах позволяет получить несколько более сильный результат.

Пусть W — максимальное ненулевое слово, и пусть его начальные подслова линейно зависимы, т.е. имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (W)_k = 0.$$

Пусть $\widetilde{W} = \max_{\alpha_k \neq 0} (W)^k$ (напомним, что $(W)^k$ — конец W, соответствующий $(W)_k$ — началу длины k, $W = (W)_k (W)^k$). Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких k, что $\alpha_k \neq 0$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$. Справедливо следующее

Предложение 2.44. *а) $\widetilde{W}$ периодично. Существует слово s минимальной длины такое, что $\widetilde{W} = s^\infty$.*

б) Пусть k_0 — минимальное число из $\mathcal{K}$, $v = (W)_{k_0}$. Тогда для любого $k \in \mathcal{K}$ $\quad (W)_k = v s^{n_k}$, где $n_k = (k - k_0)/|s|$.

в) При достаточно большом m имеет место соотношение:

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k v s^{m + n_k} = 0$$

г) Элемент

$$x = \alpha_{k_0}^{-1} \sum_{k \in \mathcal{K},\ k > k_0} \alpha_k s^{n_k}$$

не является квазиобратимым.

Доказательство. Пункты а) и б) следуют из леммы 2.32. Если $k \notin \mathcal{K}$, то $(W)_k \widetilde{W} = 0$. Отсюда по определению нулевого бесконечного слова следует равенство нулю произведения $(W)_k$ на некоторый начальный отрезок $\widetilde{W}$, а следовательно, и на некотрую степень s^p, поскольку $\widetilde{W} = s^\infty$. Взяв в качестве m максимум таких p, мы получаем пункт в). Равенство $\sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k v s^{m+n_k} = 0$ можно переписать в виде $vs \sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k s^{n_k} = 0$. Откуда непосредственно следует, что x не квазиобратим. □

Следствие 2.45. (Локальная теорема о независимости, Г. П. Чекану.) *Пусть (1) слово $W = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ является минимальным в левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n; (2) если v_i — концы слова W, то для любых многочленов $f_i(x) \in xF[x], \quad \deg f_i(x) \le n$ элементы $f_i(v_i)$ квазирегулярны.*

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы.

В условиях данного следствия легко получить также, что множество попарно несравнимых концов экстремального слова линейно независимо.

Рассмотрим правый идеал, порожденный как модуль элементом u. Воспользуемся конструкцией 2 из параграфа 1.0.2. Применив данную теорему к алгебре A'', получаем

Следствие 2.46 (Г. П. Чекану). *Если слово W удовлетворяет условиям (1) и (2) и $uW \neq 0$, то элементы $u(W)_i$, $i = 1, \dots n$ линейно независимы ($(W)_i$ обозначает начало слова W длины i).* □

Назовем слово W *максимальным*, если оно удовлетворяет условию (1) теоремы о независимости.

Из следствия 2.10 вытекает

Предложение 2.47. *Пусть W - максимальное слово. Тогда*

а) Пусть u и v — различные подслова W, причем $|u| \ge |v|$. Пусть они изображают одинаковые элементы алгебры. Тогда они лексикографически несравнимы (т.е. $u = vs$). Если $v \triangleright u$, то расположению u отвечает псевдопериодический конец W.

б) Пусть $(W)_k$ — k-начало W. Тогда если $(W)_p(W)_q \neq 0$, и $p+q \le |W|$, то $(W)_p(W)_q = (W)_{p+q}$. □

Из утверждения 2.45 выводится также следующая теорема (см. [158]).

Теорема 2.48. (Глобальная теорема о независимости, Г. П. Чекану.) *Если слово W удовлетворяет условиям локальной теоремы о независимости, то все различные подслова W линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\sum \lambda_i U_i = 0$ — линейное соотношение между подсловами W. Выберем из множества $\{U_i\}$ подмножество $\mathcal{U}$ слов, лексикографически минимальных в множестве $\{U_i\}$, а в множестве $\mathcal{U}$ — слово U_j максимальной длины. Пусть $W = SU_jT$. Тогда $0 = \sum \lambda_i SU_i$ и SU_i либо равно нулю, либо есть начало W в силу условия (1) — максимальности W среди ненулевых слов. Это противоречит локальной теореме о независимости. □

Пусть W - экстремальное сверхслово от матриц порядка n. Оно предпериодично порядка l, причем $l \le n$. Пусть A — матрица, соответствующая букве a. Каждому ее вхождению в сверхслово W отвечает начало W, заканчивающееся этим вхождением. Перед каждым вхождением буквы, меньшей a, стоит начало W, зануляемое оператором A (в силу экстремальности W). Теперь отметим, что ранг оператора равен размерности образа, а коранг — ядра.

Применив конструкцию 2 из параграфа 1.0.2 и воспользовавшись теоремой о независимости для сверхслов, имеем следующее

Предложение 2.49. *а) Общее число вхождений буквы a в период и предпериод экстремального слова не превосходит ранга оператора A.*

б) Общее число вхождений букв, меньших a в период и предпериод экстремального слова не превосходит размерности ядра оператора A. □

Следующее утверждение несклько усиливает результаты Г. П. Чекану:

Следствие 2.50. *а) Пусть $A_1, \ldots, A_s - n \times n$-матрицы, $k_i = \mathrm{rk}(A_i)$. Тогда если все слова, содержащие для каждого i не более k_i вхождений буквы a_i нильпотентны, то матрицы $A_1, \ldots, A_s$ порождают нильпотентную алгебру.*

б) Аналогичное утверждение верно, если зафиксировать s и потребовать нильпотентность слов, имеющих не более $n - k_s$ вхождений букв, отличных от a_s и ровно k_s вхождений a_s.

Доказательство. п.а) непосредственно следует из п.а) предложения 2.49. Для доказательства п.б) достаточно рассмотреть такой порядок на образующих a_i, чтобы образующая a_s была бы старшей. □

Замечание. Можно рассмотреть вхождения произвольного слова u в сверхслово W, начальная буква которых находится на расстоянии не выше l от левого края W. Число таких вхождений u не меньше ранга соответствующего оператора, а число вхождений слов лексикографически меньших u — коранга. (Чтобы не считать вхождение слова и его начала дважды, рассматриваются подслова той же длины $|u|$.) Формулировку утверждения, аналогичному следствию 2.50 мы предоставляем читателю.

В заключение отметим, что доказательства теоремы о независимости, предложенные ранее ([148], [156]), достаточно трудные. Краткость и ясность получилась из-за прояснения связи периодичности и сдвигов.

2.1.4. Периодичность и бесконечные слова

Соображения, связанные со сдвиговой инвариантностью, образуют доказательство следующей комбинаторной леммы, лежащей в основе доказательства совпадения нильрадикала и радикала Джекобсона.

Лемма 2.51. *Пусть $u \neq v$ — два различных подслова сверхслова W. В этом случае верно одно из следующих утверждений:*

а) $\exists t: \quad ut \subset W, \quad vt \not\subset W$;

б) $\exists t: \quad ut \subset W, \quad vt \subset W$; ut и vt лексикографически сравнимы. (Если u и v сравнимы, то в качестве t можно взять пустое слово Λ);

в) $\exists s: \ \forall n \in \mathbb{N} \quad s^n \subset W$ и либо $u = vs$, либо $v = us$.

Доказательство. Предположим, что а) и б) не выполняются. Тогда для некоторого непустого слова s либо $u = vs$, либо $v = us$. Покажем, что $s^n \subset W$. Возьмем такое t, что $ut \subset W$, $|t| > 2n|s|$. Тогда ut и vt лексикографически сравнимы и $vt \subset W$.

Из сравнимости ut и vt вытекает, что t есть начало st, поэтому t есть начало s^∞. Поскольку $|t| > 2n|s|$, то $s^n \subset t \subset W$. Таким образом, выполняется условие в). □

Лемма 2.52. *Пусть $u \neq v$ — два различных подслова сверхслова W. В этом случае верно одно из следующих утверждений:*

а) в слове W существуют подслова сколь угодно большой длины, свободные от вхождения u;

б) $\exists r, t$: $rut \subset W$, $rvt \not\subset W$;

в) $\exists s: \ \forall n \in \mathbb{N} \quad s^n \subset W$ и либо $u = vs$, либо $v = us$.

Доказательство. Если б) и в) не выполняются, то по предыдущей лемме $\exists t : ut \subset W$, $vt \subset W$, ut и vt лексикографически сравнимы. Положим $u_1 = ut$, $v_1 = vt$; переупорядочив образующие, можно добиться того, чтобы $v_1 \succ u_1$. Итак, нам достаточно доказать лемму для случая, когда $v \succ u$.

Отметим, что если условие б) не выполняется, то замена подслов $u \to v$ сохраняет свойство слова x быть подсловом W. Если же слово X бесконечно, то указанная замена сохраняет свойство "каждое подслово слова X является подсловом W".

Рассмотрим $\mathcal{W}$ — множество слов, бесконечных вправо, таких, что каждое подслово слова из $\mathcal{W}$ содержится в W. Замена подслов $u \to v$ сохраняет принадлежность $\mathcal{W}$, повышая при этом лексикографический порядок слова. Поэтому W' — максимальное слово из $\mathcal{W}$ (которое существует в силу предложения 1.7) — не имеет вхождений слова u.

Поскольку каждое подслово из W' является подсловом W, а слово W', будучи бесконечным, содержит подслова любой длины, условие а) данной леммы выполняется. $\square$

Следствие 2.53. *Пусть $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ — конечный набор попарно различных подслов сверхслова W. В этом случае для каждого i верно одно из следующих утверждений:*

а) в слове W существуют подслова сколь угодно большой длины, свободные от вхождения u_i;

б) $\exists r_i, t_i: \quad r_i u_i t_i \subset W$, и $\forall j \neq i \quad r_i u_j t_i \not\subset W$;

в) При некотором $j \quad \exists s: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad s^n \subset W$ и либо $u_i = u_j s$, либо $u_j = u_i s$.

Доказательство — индукция по числу слов в наборе $\mathcal{U}$.

Теорема 2.54. *а) Пусть W — равномерно рекуррентное непериодическое слово, $u \neq v$ — его подслова. Тогда $\exists r, t$: $rut \subset W$ и $rvt \not\subset W$.*

б) Если $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ — конечный набор попарно различных подслов сверхслова W, то $\forall i$, $1 \leq i \leq n$ $\exists r_i, t_i$: $r_i u_i t_i \subset W$, и $\forall j \neq i \quad r_i u_j t_i \not\subset W$.

в) Если $I \neq 0$ — идеал алгебры A_W, то I содержит моном, а следовательно и все достаточно длинные мономы, так что факторалгебра A_W/I нильпотентна. (Определения р.р. слова и алгебры A_W даны в параграфе 1.2.)

Доказательство. Справедливость частей а) и б) настоящего следствия следует из того, что при непериодичном р.р. слове W случаи а) и в) предыдущих лемм исключаются.

Пусть $\sum \lambda_i u_i \in I$. По предыдущему следствию мы можем выбрать такие r_i и t_i, что $r_i u_i t_i \subset W$, и $\forall j \neq i \quad r_i u_j t_i \not\subset W$. Следовательно, $r_i u_j t_i = 0$ в алгебре A_W, и $I \ni r_i(\sum_j \lambda_j u_j) t_i = \lambda_i r_i u_i t_i$. Таким образом, I содержит моном. $\square$

Следствие 2.55. *Если слово W равномерно рекуррентно и непериодично, то радикал Джекобсона $J(A_W) = 0$.* □

Замечание. В главе 3 показано, что нильрадикал мономиальной алгебры A совпадает с пересечением идеалов I_W для всех р.р. слов W алгебры A, имеющих вхождение только конечного числа букв алфавита (т.е. образующих). Там же показано, что $J(A_W) = 0$ в периодическом случае. Из этого следует совпадение нильрадикала и радикала Джекобсона для произвольной мономиальной алгебры.

2.1.5. Периодичность и количество подслов

Мы видели связь периодичности и сдвиговой инвариантности. Здесь мы рассмотрим другой способ установления периодичности.

Теорема 2.56 (о периодичности). *а) Если каждое подслово длины n сверхслова W однозначно определяет последующий символ, то W периодично с периодом $T_W(n)$.*

б) Если каждое подслово длины n правого сверхслова W однозначно определяет последующий символ, то W псевдопериодично порядка $T_W(n)$. Симметричное утверждение справедливо для левых сверхслов.

(Напоминаем, что $T_W(n)$ — количество подслов длины n слова W, а $V_W(n)$ — количество подслов длины не выше n.)

Доказательство. Каждому подслову u длины n слова W однозначно соответствует подслово u' длины n, сдвинутое на одну позицию вправо. Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого служат подслова длины n, а стрелками — указанное соответствие. Он связен, имеет $T_W(n)$ вершин и слову W соответствует путь, проходящий через все вершины графа. В случае а) этот путь есть цикл длины $T_W(n)$, а в случае б) — цикл с хвостом (хвост соответствует предпериоду). $T_W(n)$ равно сумме длин цикла и хвоста. □

Следствие 2.57. *Существуют сколь угодно длинные слова u_i и две различные буквы a и b такие, что $au_i \subset W$ и $bu_i \subset W$.* □

Применив лемму о компактности, получаем

Следствие 2.58. *Замкнутая орбита непериодического р.р. слова содержит два различных сверхслова с совпадающим правым (левым) концом.* □

Следствие 2.59. *Заключение теоремы становится верным при выполнении любого из условий:*

а) $T_W(n+1) = T_W(n)$;

б) $T_W(n+1) < n+1$;

в) $V_W(n) < n(n+3)/2$.

Итак, если W непериодично, то $\forall n \quad T_W(n) \geq n+1$, $V_W(n) \geq n(n+3)/2$.

Доказательство. Каждому подслову длины $n+1$ соответствует начальное подслово длины n. Если выполняется равенство $T_W(n) = T_W(n+1)$, то это соответствие взаимно однозначно. Таким образом, каждому подслову u длины n однозначно соответствует подслово w длины $n+1$, для которого оно служит началом, а следовательно, и подслово u' длины n — конец w.

Поскольку если $T_W(1) = 1$, то W периодично, пункт б) вытекает из а); в) вытекает из равенств $n(n+3)/2 = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$, $V(n) = \sum_{i=1}^{n} T(i)$. □

Замечание. Мы следуем работам А. Т. Колотова [80], [81]. В них аналогичные утверждения доказаны в несколько более общей ситуации. (Произвольный алфавит, подслова в словах ограниченной длины). Он показал, что если все слова длины не выше m алгебраичны и $V_A(m) < \frac{m(m-1)}{2} + ms$ и кроме того, любая подалгебра, порожденная меньше чем m образующими конечномерна, то исходная алгебра тоже конечномерна. Квазипериодичность выводилась из равенств $|u| \geq T_u(d) + d$, $T_u(d) = T_u(d+1)$. (см. раздел **??**)

Следующая теорема о периодичности аналогична предыдущей.

Теорема 2.60. *а) Пусть правое сверхслово W имеет два вхождения слова u и каждое подслово, содержащее u, однозначно определяет последующий символ. Тогда W псевдопериодично. Симметричное утверждение верно для левых сверхслов.*

б) Если сверхслово W удовлетворяет условиям пункта а), то правый конец W периодичен. Если левый конец W содержит бесконечно много вхождений u, то W периодично и имеет вид $(uc)^\infty$, где c — последовательность символов между соседними вхождениями u. □

С помощью этой теоремы мы установим континуальность множества слов, состоящих из тех же подслов, что и данное непериодическое р.р. слово.

Следствие 2.61. *Пусть u имеет бесконечно много вхождений в W. Тогда либо а), либо б) верно:*

а) Правый конец W периодичен.

б) $\exists s_1 \neq s_2, |s_1| = |s_2|$; $us_1 \subset W$, $us_2 \subset W$. □

Следствие 2.62. *Если сверхслово W первично (т.е. содержит каждое свое подслово бесконечно много раз), то либо W периодично, либо существует функция $k(n)$ такая, что $\forall u \subset W$ $\exists s_1 \neq s_2 : |s_1| = |s_2| = k(|u|)$, $s_1u \subset W$, $s_2u \subset W$.* □

Следствие 2.63. *Пусть W — р.р. непериодическое сверхслово, $u \subset W$. Тогда существуют два различных слова c_1 и c_2 одинаковой длины такие, что $uc_1 \subset W$ и $uc_2 \subset W$.* □

Теорема 2.64. *Пусть выполняется пункт б) предыдущего следствия. Тогда множество правых сверхслов, состоящих из слов, содержащихся в W, имеет мощность континуум.*

Нам потребуется следующее

Предложение 2.65. *Дано бесконечное дерево, каждая вершина которого (кроме корневой) имеет степень не ниже трех. Тогда число путей из корневой вершины имеет мощность континуум.* □

Набросок доказательства теоремы. Слова uc_1 и uc_2 тоже можно различными способами расширять вправо. Вершинами дерева будут расширения слова u, а стрелками соединяются слово и его расширения. Если расширять слово, полученное на каждом шаге, также влево, то строится и двустороннее сверхслово. □

Следствие 2.66. *Замкнутая орбита любого р.р. слова либо конечна (периодический случай), либо имеет мощность континуум.* □

2.2. Базисы алгебр

2.2.1. О приведении слов к каноническому виду

Традиционный подход состоит в представлении слова в виде линейной комбинации лексикографически меньших слов и изучении неуменьшаемых слов. Например, если слово $t = t_1 \dots t_n$ является n-разбиваемым, $t_1 \succ \cdots \succ t_p$, то для любой нетождественной перестановки $\sigma \in S_p$ слово $t_\sigma = t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}$ лексикографически меньше t. Таким образом, если в алгебре выполняется полилинейное тождество степени p, то слово t оказывается линейно представимо меньшими словами. Поэтому неуменьшаемое слово не является n-разбиваемым. Но мы видели, что множество всех не n-разбиваемых слов имеет ограниченную высоту. В частности, все не n-разбиваемые слова достаточной длины содержат степень подслова. Это обстоятельство служит основой для решения проблем бернсайдовского типа.

Но часто бывает достаточно найти интересное подслово, не обязательно вначале, а где угодно. Меньшее подслово обычно проще создать где-то внутри, проведя "сгущение". Основная идея, лежащая в основе соответствующей техники, состоит в том, что если где-то что-то увеличилось, то в другом месте где-то что-то уменьшилось, поэтому достаточно устанавливать только наличие изменений.

Предложение 2.67. *Пусть T — линейно упорядоченное множество, $\vec{\tau} = \{\tau_i\}_{i=1}^p$ — вектор из T^p. Тогда для любой перестановки $\sigma \in S_p$ верно либо а), либо б):*

а) $\forall i$ τ_i и $\tau_{\sigma(i)}$ совпадают как элементы T;

б) $\exists i \colon t_i > t_{\sigma(i)}$ и $\exists j : t_j < t_{\sigma(j)}$. □

Отметим, что если множество T только частично упорядочено, то предложение перестает быть верным, даже если в пункте а) условие совпадения заменить условием несравнимости в смысле порядка в T. Поэтому нам понадобятся леммы, устанавливающие линейную упорядоченность некоторых подмножеств слов относительно $\succ$. Все основывается на альтернативе: псевдопериодичность либо линейная упорядоченность. Приведем список соответствующих утверждений, вытекающих из доказанных ранее свойств псевдопериодических слов и слова u^∞ (предложение 2.3).

Предложение 2.68. *Пусть e_i — собственные начала нециклического слова u, а f_i — его собственные концы. Тогда если $f_1 u^2$ сравнимо с $f_2 u^2$, то $f_1 = f_2$; если $u^2 e_1$ есть конец $u^2 e_2$, то $e_1 = e_2$.* □

Предложение 2.69. *1. Пусть $\forall i$ $|v_i| \le n$ и $v_i \ne v_j$ при $i \ne j$. Тогда верно либо а), либо б):*

а) множество слов $\{v_i t\}$ линейно упорядочено относительно лексикографического порядка;

б) t квазипериодично порядка не выше n.

2. Определим $(zv)^i$ с помощью равенства $(zv)_i (zv)^i = zv$. Пусть $|zv| > R > n$. Тогда либо а), либо б) верно:

а) $(zv)_R$ псевдопериодично порядка $\le n$;

б) $((zv)^i)_R$ образуют линейно упорядоченное множество. □

Предложение 2.70. *Если все подслова длины $|u|$ в слове W являются подсловами u^∞, т.е. циклически сопряжены u, то само слово $W \subset u^\infty$. Иными словами, алгебра A_u^F задается набором определяющих соотношений длины $\le |u|$.* □

Напомним доказанную ранее лемму 2.5.

Лемма о вычеркиваниях и приписках. *Пусть* $t = t_1vt_2 \subset u^\infty$, v *циклически сопряжено с* u. *Тогда* $\forall k \geq 0$ $t_1v^kt_2 \subset u^\infty$. *В частности,* $t_1t_2 \subset u^\infty$ *и* $t_1v^2t_2 \subset u^\infty$. □

Следующее утверждение также было доказано ранее (см. лемму 2.32).

Предложение. *Пусть* $|z| = R$, z *псевдопериодично порядка* $\leq n$. *Тогда* z *содержит* $[R/n]$*-ю степень слова длины* $\leq n$. □

Предложение 2.71. *Если* z_1 *и* z_2 *не псевдопериодичны порядка* $\leq n$, $z_1 \succ z_2$, *и* n*-типы слов* z_1 *и* z_2 *различны, то* n*-тип* z_1 *больше* n*-типа* z_2. □

Теперь займемся перестановками. Следующее предложение получается, если объединить предложения 2.67 и 2.69 о перестановках и о линейной упорядоченности.

Предложение 2.72. *Пусть* $u = (z)_n$, $e_if_i = u$, $i = 1, \ldots, p$; $z = uy$, z *не является псевдопериодическим порядка* $\leq n$. *Пусть* $\sigma \in S_p$. *Тогда верно либо а), либо б):*

а) $\forall i$ $e_if_{\sigma(i)}y = uy$;

б) $\exists i, j : e_if_{\sigma(i)}y \succ uy \succ e_jf_{\sigma(j)}y$. □

Нам будет удобнее пользоваться не соответствием $i \to \sigma(i)$, а соответствием $\sigma(i) + 1 \to \sigma(i + 1)$. Это соответствие возникает при рассмотрении слова $t_\sigma = t_0t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)}t_{p+1}$. Концу подслова $t_{\sigma(i)}$ соответствует начало подслова $t_{\sigma(i+1)}$. Переформулируем данное предложение.

Предложение 2.73. *В условиях предыдущего предложения пусть* $\{e_i\}_{i=0}^p$ *нумеруются числами от* 0 *до* p, *а* $\{f_i\}_{i=1}^{p+1}$ — *числами от* 1 *до* $p + 1$. *При этом* $e_if_{i+1} = u$. *Пусть* $\sigma \in S_p$. *Положим* $\sigma(0) = 0$, $\sigma(p + 1) = p + 1$. *Тогда верно либо а), либо б):*

а) $\forall i$ $e_{\sigma(i)}f_{\sigma(i+1)}y = uy$;

б) $\exists i, j$: $e_{\sigma(i)}f_{\sigma(i+1)}y \succ uy \succ e_{\sigma(j)}f_{\sigma(j+1)}y$.

в) Если $x \succ z \succ y$, *то* $(x)_{|z|} \succ z \succ (y)_{|z|}$ □

Нам понадобится

Предложение 2.74. *Пусть* $\forall i$, $0 \leq i \leq p+1$, $|t_i| \geq n = |u|$, $t = t_0 \ldots t_{p+1} \subset u^\infty$. *Тогда если* $t_\sigma = t_0t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)}t_{p+1} \not\subset u^\infty$, *то слово* t_σ *содержит подслова* α *и* β *такие, что* $|\alpha| = |\beta| = |u| = n$ *и* $\alpha \succ u \succ \beta$.

Доказательство. В силу леммы о вычеркиваниях и приписках 2.5, все t_i можно считать достаточно длинными (например, $|t_i| > 10n$). Представим t_i в виде $t_i = f_iu^{k_i}e_i$, где $k > 2$, $e_if_{i+1} = u$, $|e_i| < n$. Если $\forall i$ $e_{\sigma(i)}f_{\sigma(i+1)} = u$, то $t_\sigma = t_0t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)}t_{p+1} \subset u^\infty$. Остается воспользоваться предыдущими предложениями. □

Приведем следствие, удобное для дальнейшего.

Предложение 2.75. *Пусть слово* z *не является псевдопериодическим порядка* $\leq n$, $u = (z)_n$; $|z| = K$. *Пусть* $zv \subset t_i$, $i = 1, \ldots, p + 1$,

$$t = t_0 \ldots t_{p+1} \subset (zv)^\infty, \quad t_\sigma = t_0t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)}t_{p+1} \not\subset (zv)^\infty, \ \sigma \in S_p.$$

Тогда слово t_σ содержит подслова α и β такие, что $|\alpha| = |\beta| = |z|$ и $\alpha \succ z \succ \beta$.

При этом, если α', β', z' — n-типы слов α, β и z соответственно, то $\alpha \succ z \succ \beta$. □

В главе 5 (см. [16]) доказано следующее утверждение.

Предложение 2.76. *Пусть u — нециклическое слово длины n, и пусть f — полилинейное тождество сложности меньше n и степени p. Тогда $\exists t \subset u^\infty$, $t = t_0 \dots t_{p+1}$ и $\forall i$ $2n \le t_i \le 3n$ такие, что t линейно представимо словами вида $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$ такими, что $t_\sigma \not\subset u^\infty$.* □

Таким образом, тождество сложности n позволяет разрушать период длины больше n.

Из предложений 2.75 и 2.76 вытекает

Предложение 2.77. *а) Пусть f — полилинейное тождество степени p и сложности меньше n, $T(f)$ — соответствующий T-идеал, z не является псевдопериодическим словом порядка n. Тогда слово $(zv)^{2(p+1)}$ линейно представимо по модулю $T(f)$ словами, содержащими подслова вида α, $|\alpha| = |z|$, $\alpha \succ z$, и вида β, $|\beta| = |z|$, $z \succ \beta$.*

При этом n-типы слов α, β и z удовлетворяют тем же неравенствам. □

Итак, с помощью "порчи периода" можно создавать подслова, лексикографически ме́ньшие периода.

Замечания. а) Путь к доказательству ограниченности высоты над множеством слов длины не выше сложности был таков. Вначале рассматривалась ситуация маленькой сложности. Легко заметить, что при нарушении периода в слове $(ab)^\infty$ возникают степени букв a и b. Эти степени можно собирать вместе с помощью процедуры "перекачки". Далее, в случае сложности 2 (разрушения периода длины 3) можно осуществлять "сгущение" старших букв. Затем возникла идея о понижении лексикографического порядка внутри периода. Таков путь к предложению 2.77.

б) В комбинаторике слов часто встречается такое рассуждение. Пусть $e_i f_i = w$. Порядку на концах f_i соответствует порядок на началах e_i. Тогда если e_i умножается на конец f_j бо́льший, чем ему полагается (т.е. $f_j \succ f_i$), то $e_i f_j \succ w$. Такая ситуация возникает при перестановке концов f_i.

в) Действие тождество полезно представлять как "недетерминированное T-преобразование", осуществляющего переход от произведения $v_0 v_1 \dots v_m v_{m+1}$ к "худшему члену" линейной комбинации $\sum_{\sigma \ne id} \alpha_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} x_{m+1}$ (см. раздел 2.2.2).

2.2.2. Выделенные наборы слов и операции над ними

Наша цель — добиваться появления внутри слова нужного подслова, поэтапно создавая промежуточные объекты.

Определение 2.78. Набор слов $\mathcal{W}$ мы называем *выделенным*, если алгебра $A/\operatorname{id}(\mathcal{W})$ нильпотентна, $l(\mathcal{W})$ обозначает степень нильпотентности. (Комбинаторный смысл состоит в том, что любое слово длины $\ge l(\mathcal{W})$ линейно представимо словами, содержащими подслово из $\mathcal{W}$.) Если любое слово длины $\geq l_k(\mathcal{W})$ линейно представимо словами, имеющими k вхождений одного из слов $\mathcal{W}$, то набор $\mathcal{W}$ назовем *k-выделенным.* Через $|\mathcal{W}|$ мы обозначаем количество слов в $\mathcal{W}$.

Отметим, что факторизация алгебры по радикалу не дает новых выделенных наборов. Поэтому техника поиска таких наборов по сути дела означает работу в полупростой части и иногда способна заменить обращение к структурной теории. Добиваться появления нужного подслова мы будем поэтапно, создавая вначале вспомогательные подслова. Набор слов будет постепенно улучшаться, пока не превратиться в набор степеней базисных слов. Оказывается, что если слово неквазипериодично порядка n, то его можно заменить на набор слов ме́ньших типов. Поэтому следует изучить операции над выделенными наборами. Начнем с технических утверждений.

Предложение 2.79. *а) Если набор $\{u_i\}$ выделенный и $\forall i\ v_i \subset u_i$, то набор $\{v_i\}$ выделенный и $l(\{v_i\}) \leq l(\{u_i\})$.*

б) Если набор $\mathcal{A}$ выделенный, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, то набор $\mathcal{B}$ — выделенный и $l(\mathcal{B}) \leq l(\mathcal{A})$.

в) Слово выделенного набора можно заменить на семейство слов, которыми оно линейно представимо. При этом степень выделенности не возрастает. □

Прежде всего отметим, что если мы можем создать одно из слов набора, то мы это можем сделать много раз.

Предложение 2.80. *Если набор α выделенный, то он k-выделенный и $l_k(\alpha) \leq k|\alpha| \cdot l(\alpha)$.* □

Лемма 2.81 (о тиражировании). *Пусть f — полилинейное тождество алгебры A степени p, $D = \{d_j\}$ — множество слов степени не выше p (включая пустое слово Λ) от образующих алгебры A и элементов c_i, $C = \{c_i\}$ — выделенный набор. Тогда для любого натурального R набор $\{(c_i d_j)^R;\, i = 1, \ldots, |C|,\, j = 1, \ldots, |D|\}$ — также выделенный. ($|M|$ – число элементов M.)*

Доказательство. Каждое слово длины не меньше $l(\{c_i\})$ линейно представимо словами вида $d_k c_i e_k$, d_k, e_k — произведение образующих. Воспользуемся этим фактом, а также тем, что каждое слово, имеющее достаточно высокую степень по $\alpha = \{c_i\}$, нужным образом представимо по теореме Ширшова о высоте (см. предложение 2.38). □

Определение 2.82. Пусть z — слово. Обозначим через z' следующий набор слов.

Если z псевдопериодично порядка $\leq n$, то $z' = \{z\}$.

Иначе $z' = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, где $\mathcal{N}_1$ есть множество лексикографически меньших не псевдопериодических слов, совпадающих со своими n-типами (т.е. любое собственное начало слова из $\mathcal{N}_1$ псевдопериодично порядка $\leq n$), $\mathcal{N}_2$ есть множество псевдопериодических слов порядка $\leq n$ длины R, которые лексикографически меньше z. (R фиксировано. Мы положим $R = 2nk$, k есть требуемый показатель степени.)

Предложение 2.83. *Если к слову z и ко всем, получаемым из него, последовательно применять операцию $'$ (и всякий раз переходить к объединению образовавшихся множеств), то получится слово z или множество $\mathcal{N}_2$. При этом можно обойтись не более чем $T(n, R)$ операциями. $T(n, R)$ — количество n-типов, не являющихся псевдопериодическими порядка n и имеющих длину не выше R. Набор всех n-типов длины $\leq R$ также можно привести к набору псевдопериодических слов за $T(n, R)$ операций.* □

Мы уже установили, что $T(n, R) < Rnl^{n+1}$.

Отметим, что вместо оператора $'$ с тем же успехом можно использовать операцию взятия множества меньших слов той же длины. Оператор $'$ нужен для осуществления более быстрого спуска к псевдопериодическим словам. Это дает снижение оценок с порядка l^{m^2} до порядка l^m (l — число образующих, m — степень алгебры). Кстати, понятие n-типов в доказательстве теоремы о высоте тоже использовались с этой целью.

Итак, мы уже установили, что нарушить период можно так, чтобы создать и большее, и меньшее подслово. Лемма о тиражировании позволяет создавать период. Суммируем результаты предложения 2.77 и леммы 2.81.

Предложение 2.84. *Пусть α — конечный выделенный набор, $z \in \alpha$, z не является псевдопериодическим словом порядка $\leq n$. Пусть в алгебре A выполняется полилинейное тождество f степени p сложности n. Тогда*

а) если заменить z множеством всех лексикографически меньших слов той же длины, то получившийся набор α' останется выделенным;

б) слово z можно заменить набором z'. □

Из предложений 2.83 и 2.84 вытекает

Следствие 2.85 (гипотеза Шестакова). *Пусть A — конечно порожденная PI-алгебра сложности n. Тогда $\forall k$ множество k-х степеней слов длины $\leq n$ является выделенным. Если все эти слова являются алгебраическими элементами, то A конечномерна.* □

Замечание. Тот же самый результат получен как следствие теоремы о независимости (следствие 2.43). Однако здесь мы не используем структурную теорию (не факторизуем по радикалу) и можем дать конструктивные оценки. Эти оценки мы не выписываем, поскольку ниже будет изложена техника, позволяющая сделать их экспоненциальными.

Введем на множестве наборов слов следующее отношение порядка: вначале сравниваются старшие слова, потом вторые по величине, и т.д. Если первые k старших слов в двух наборах совпадают, а старшие слова из оставшихся лексикографически не сравнимы, то два набора не сравнимы. Если при этом в одном наборе слов не осталось, то набор с большим количеством слов считается большим.

Поскольку операция замены слова z на набор z' понижает его порядок (мы рассматриваем множества без кратностей), справедлива

Теорема 2.86. *Если A — к.п. PI-алгебра сложности n, то минимальный выделенный набор слов длины R состоит из псевдопериодических слов порядка не выше n.* □

Эта теорема параллельна структурным утверждениям о строении первичных алгебр и имеет интересное следствие. У любого нециклического слова есть циклически сопряженное правильное слово. Оно отвечает старшему члену некоторого лиева (йорданова) монома. Отсюда получается

Следствие 2.87. *Пусть A — лиева или йорданова алгебра, вложенная в ассоциативную алгебру сложности n. Если все мономы в A от ее образующих длины не выше n алгебраичны, то A локально конечна.* □

3. Равномерно рекуррентные слова и радикалы мономиальных алгебр

В этой главе, чтобы не загромождать формулировки утверждений, мы будем рассматривать мономиальные алгебры без единицы.

3.1. Нильрадикал и радикал Джекобсона

Простых мономиальных алгебр не бывает (кроме нулевой), однако правильным аналогом понятия простоты служит почти простота. Ненильпотентная алгебра A называется *мономиально почти простой,* если каждый ее фактор по идеалу, порожденному мономом, нильпотентен; A называется *почти простой,* если каждый ее фактор нильпотентен. Любая почти простая алгебра является мономиально почти простой. Слово в A — это ненулевое слово, бесконечное слово в A — это бесконечное слово без нулевых подслов. Через k будем обозначать число букв в рассматриваемом алфавите или число образующих в алгебре.

Определение 3.1. Пусть W — бесконечное слово. Тогда A_W — это алгебра, все соотношения в которой имеют вид $v = 0$, где v — слово, не являющееся подсловом W.

Следующая теорема дает описание всех почти простых и мономиально почти простых алгебр.

Теорема 3.2. *Пусть A — мономиально почти простая алгебра. Тогда существует равномерно рекуррентное слово W такое, что $A = A_W$. Алгебра A почти проста тогда и только тогда, когда W не периодично.*

Теорема будет следовать из предложения 3.4 ниже.

Определение 3.3. а) *Слово c плотно встречается в алгебре A*, если есть такая константа M и сколь угодно длинные ненулевые слова в A, что любой кусок такого слова длины M имеет вхождение слова c.

б) *Слово c плотно в алгебре A*, если все достаточно длинные ненулевые слова в A имеют вхождение слова c.

Напомним, что слово называется *равномерно рекуррентным* (р.р.), если его любое подслово плотно встречается в нем. Отметим, что если алгебра A мономиально почти простая, то любое слово в ней плотно встречается. Действительно, фактор по любому слову нильпотентен индекса n; это n можно взять в качестве константы M из определения.

Предложение 3.4. *а) Слово c плотно встречается в алгебре A в том и только в том случае, когда c плотно в некотором сверхслове W алгебры A.*

б) При этом сверхслово W можно считать равномерно рекуррентным.

Доказательство. Очевидно, что если c плотно в W, то c плотно в алгебре. Обратное утверждение получается, если взять набор слов $\{w_i\}$ неограниченной длины таких, что c входит в любой кусок w_i длины M, и применить лемму о составлении сверхслова. Пункт б) получается, если применить теорему **??**. □

Следующая теорема дает описание нильрадикала мономиальной алгебры.

Теорема 3.5. *$N(A)$ есть пересечение всех мономиально почти простых идеалов. Иными словами, $x \in N(A) \iff x$ проецируется в 0 для любого мономиально почти простого фактора $\iff$ если $x = \sum \lambda_i c_i$, $\lambda_i \neq 0$, — представление x в виде линейной комбинации слов c_i, то ни одно c_i не может плотно встречаться.*

Доказательство. Теорема вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 3.6. *Пусть слово u не может плотно встречаться. Тогда $u \in N(A)$.*

Доказательство. Если $u \notin N(A)$, то для некоторых $\{c_i\}$ и $\{d_i\}$ сумма $x = \sum \alpha_i c_i u d_i$ не нильпотентна. Пусть $M = \max(|c_i| + |d_j|) + 2|u|$. Тогда любая степень x есть линейная комбинация слов, в которых каждый участок длины M имеет вхождение слова u. □

Предложение 3.7. *Пусть слово $u \in N(A)$. Тогда u не может плотно встречаться.*

Доказательство. Пусть слово u встречается в каждом участке длины M некоторого сверхслова W. Представим W в виде произведения слов $c_i u$ таких, что никакой начальный сегмент $c_i u$ не содержит вхождения u. Поскольку $|c_i| < M$, слов вида c_i конечное число. Положим $x = \sum c_i u$. Тогда элемент x принадлежит $\mathrm{id}(u)$ и не является нильпотентным, т.к. каждая его степень содержит член, являющийся подсловом W, и все члены, получающиеся при раскрытии скобок в $(\sum c_i u)^n$, различны. □

Предложение 3.8. *Пусть A — почти простая мономиальная алгебра. Тогда радикал Джекобсона $J(A)$ алгебры A равен нулю.* □

Теорема 3.9. *Если бесконечное слово W периодично с периодом n, то A_W первична и представима. Существует мономорфизм A_W в алгебру $n \times n$ матриц над кольцом многочленов и эпиморфизм A_W на алгебру $n \times n$ матриц над основным полем.*

Доказательство. Первичность следует из того, что для всяких ненулевых слов u, v в алгебре A_W существует слово $w \neq 0$ такое, что $uvw \neq 0$. Конструкция представления алгебры A_W приведена в главе 4. □

Алгебра A_u, отвечающая периодическому р.р. слову, не является почти простой; например, $A_u/\operatorname{id}\{u-u^2\}$ не нильпотентна. Однако имеет место следующее

Предложение 3.10. *Если $I \neq 0$ — однородный идеал алгебры A_u, то A_u/I нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $I \ni s = \lambda_0 c_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i$, $|c_i| = |c_0|$, $c_i \neq c_0$ при $i \neq 0$. Каждое слово R длины, большей $2|u| + |c_0|$, в алгебре A_u имеет вид $R = v_1 c_0 v_2$, где $|v_1| \geq |u|$. Поэтому $I \ni v_1 s v_2 = \lambda_0 v_1 c_0 v_2 + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_1 c_i v_2 = \lambda_0 R$, поскольку последняя сумма по предложению 2.3 равна нулю. □

В разделе 2.1.4 было доказано следующее утверждение (теорема 2.54).

Теорема. *Пусть W — равномерно рекуррентное непериодическое слово. Тогда, если $I \neq 0$ — идеал алгебры A_W, то I содержит моном, а следовательно и все достаточно длинные мономы, так что факторалгебра A_W/I нильпотентна.* □

Следствие 3.11. *а) Если W — непериодическое равномерно рекуррентное слово, то любой идеал содержит некоторое слово, и алгебра A_W почти проста.*

б) Радикал Джекобсона мономиальной алгебры совпадает с нильрадикалом.

Доказательство. Пункт а) вытекает непосредственно из сформулированной выше теоремы. Пункт б) следствия вытекает из теорем 3.5, 3.2, 3.9, предложения 3.8 и пункта а). □

Назовем алгебру *приведенной*, если любой ее гомоморфный образ конечномерен. Суммируя результаты предложения 3.10 и теоремы 2.54 имеем следующее

Предложение 3.12. *Мономиальная алгебра приведена тогда и только тогда, когда она почти простая.* □

В заключение отметим, что в автоматном случае $N(A) = J(A) = B(A)$ (см. параграф 4.3). В случае произвольных мономиальных алгебр верно только $N(A) = J(A)$.

3.2. Равномерно рекуррентные слова и классификация слабо нетеровых мономиальных алгебр

Данный параграф посвящен классификации слабо нетеровых мономиальных алгебр. Известно, что все левонетеровы (правонетеровы) мономиальные алгебры автоматны (следствие 4.43). Однако для слабо нетеровых алгебр (удовлетворяющих условию обрыва возрастающих цепей двусторонних идеалов) это уже не так. Например, если W — р.р. непериодическое слово над конечным алфавитом, то неавтоматная алгебра A_W конечно порождена и не содержит идеалов с ненильпотентным фактором (см. теорему 2.54) и, следовательно, является нетеровой.

Описание слабо нетеровых мономиальных алгебр осуществляется в терминах р.р. слов. Назовем семейство $\mathcal{U}$, состоящее из (сверх)слов, *нетеровым*, если оно конечно и каждый элемент $\mathcal{U}$ есть либо конечное слово, либо сверхслово, которое при выбрасывании конечного куска распадается на р.р. части. Иными словами, каждый элемент $\mathcal{U}$ принадлежит к одному из следующих типов:

1) конечное слово;
2) правое сверхслово вида uW, где $|u| < \infty$, W — р.р. сверхслово;
3) левое сверхслово вида Wu, где $|u| < \infty$, W — р.р. сверхслово;
4) сверхслово вида W_1uW_2, где $|u| < \infty$, W_1 и W_2 — р.р. сверхслова;
5) равномерно рекуррентное сверхслово.

Теорема 3.13. *Мономиальная алгебра A слабо нетерова $\iff$ существует нетерово множество $\mathcal{U}$ такое, что $A = A_{\mathcal{U}}$.*

Из этой теоремы непосредственно следует

Предложение 3.14. *Слабо нетерова алгебра A автоматна тогда и только тогда, когда все р.р. части сверхслов из $\mathcal{U}$ периодичны. В этом случае конечным словам соответствуют отрезки графа, р.р. словам — циклы, словам вида 2 — циклы с входными отрезками, словам вида 3 — циклы с выходными отрезками, словам вида 4 — пара циклов, соединенная перемычкой.*

Для доказательства теоремы A.16 нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 3.15. *Пусть мономиальная алгебра B содержит множество ненулевых слов вида cv_ic, где $|v_i| \Rightarrow \infty$, и при всех i слово c — не подслово v_i. Тогда алгебра B не является слабо нетеровой.* □

Следствие 3.16. *а) Пусть A — слабо нетерова мономиальная алгебра. Тогда для любого $c \in \mathrm{Wd}(A)$ существует константа $\varphi(c)$ такая, что для любого $u \in \mathrm{Wd}(A)$ вида cvc каждый участок слова u длины $\varphi(c)$ имеет вхождение слова c.*

б) Если правое сверхслово W имеет бесконечно много вхождений c, то, начиная с некоторого места, каждый участок сверхслова W длины $\varphi(c)$ имеет вхождение c. Симметричное утверждение верно и для левых сверхслов.

в) Если сверхслово W имеет бесконечно много вхождений c как слева, так и справа от заданной позиции, то каждый участок сверхслова W длины $\varphi(c)$ имеет вхождение c. □

Итак, бесконечная встречаемость равносильна плотной встречаемости, причем плотность ограничена снизу для всех сверхслов алгебры. Нам понадобится следующее

Предложение 3.17. *Количество попарно неэквивалентных р.р. сверхслов в слабо нетеровой мономиальной алгебре конечно.*

Это предложение вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.18. *Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность попарно неэквивалентных р.р. сверхслов. Тогда при некотором k существует конечное подслово $v \subset W_k$ и бесконечная подпоследовательность сверхслов $\{W_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$, не имеющих вхождения v.*

Доказательство предложения 3.17. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность попарно неэквивалентных р.р. сверхслов из A. Применяя данную лемму к $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, а затем — к $\{W_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и т.д., получаем бесконечную последовательность слов v_i, не содержащих друг друга. Они порождают идеал, который не является конечно порожденным. □

Доказательство леммы 3.18. Предположим противное. Тогда для любого подслова v слова из $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно указать такое число $N(v)$, что при всех $i > N(v)$ слово v содержится в W_i. В силу леммы 3.15, при всех $i > N(v)$ каждый участок сверхслова W_i длины $\varphi(v)$ содержит v. Пусть u_i — произвольное подслово W_i длины i. В силу леммы о компактности, существует сверхслово U, каждое подслово которого есть подслово некоторого u_i. Для любого $v \subset U$ каждый участок длины $\varphi(v)$ слова U содержит v. То же верно и для любого подслова c любого слова W_i. Поэтому U равномерно рекуррентно и содержит все подслова всех W_i. Но р.р. слово (см. теорему 1.19) имеет минимальный по включению набор конечных подслов. Значит, U эквивалентно всем W_i и, следовательно, все W_i эквивалентны между собой. Получили противоречие с условием леммы. □

Выше было показано, что нильрадикал $N(A)$ есть пересечение всех мономиально почти простых идеалов. Каждый такой идеал состоит из всех не подслов р.р. слова и, по только что доказанному, множество всех мономиально почти простых идеалов конечно.

Пусть $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ — образующие $N(A)$ (в силу слабо нетеровости A их конечное число). Поскольку c_i не могут плотно встречаться, то из леммы 3.15 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.19. *а) Существует такое натуральное k, что в любом слове v из $\mathrm{Wd}(A)$ можно указать такое подслово u длины k, что $v = sut$, где s и t — подслова р.р. слов из A (т.е. s и t не лежат в $N(A)$).*

б) При всех достаточно больших k для любого слова $u \in N(A)$ длины k любое слово из $\mathrm{Wd}(A)$ имеет не более одного вхождения слова u. □

(Пункт б) следует из квазипериодичности решений уравнения $uw = su$ см. предложение 2.6.)

Из п.б) данной леммы и слабой нетеровости алгебры A следует

Лемма 3.20. *Пусть $|u| = k$, $u \in N(A)$. Тогда двусторонний идеал, порожденный u, конечно порожден как левый идеал. То же верно и для правых идеалов.* □

Эта лемма означает конечность числа ветвлений в графе левых (правых) умножений.

Для доказательства теоремы А.16 остается воспользоваться этой леммой. □

3.3. Радикал Бэра мономиальных алгебр. Первичные слова

Определение 3.21. Бесконечное слово W называется *первичным*, если каждое его подслово имеет бесконечное количество вхождений в W.

Замечание. Любое р.р. слово (в частности, периодическое) является первичным. Обратное неверно — слово, в котором встречается любая комбинация букв, является первичным, но не является р.р., поскольку в силу наличия для любых n вхождений b^n в таком слове найдутся сколь угодно длинные участки, свободные от вхождений других букв. Идея рассмотрения первичных бесконечных слов была предложена Т.Гатевой.

Хорошо известен следующий факт.

Теорема 3.22. *A полупервична $\iff$ радикал Бэра $B(A) = 0$.* □

Теорема 3.23. *а) Счетно порожденная мономиальная алгебра A является первичной тогда и только тогда, когда $A = A_W$ для некоторого первичного сверхслова W.*

б) Мономиальная алгебра A является полупервичной $\iff$ существует семейство первичных слов $\mathcal{W} = \{W_i\}$ такое, что $A = A_{\mathcal{W}}$.

в) Если A — произвольная мономиальная алгебра, то A первична $\iff$ существует такое семейство первичных слов $\mathcal{W} = \{W_i\}$, что $A = A_{\mathcal{W}}$, и для любых W_i, W_j существует W_k такое, что каждое подслово из W_i или из W_j содержится в W_k.

Следствие 3.24. *Радикал Бэра $B(A)$ есть пересечение идеалов I_W для всех первичных слов W.*

Замечание. A является PI и мономиальной первичной $\iff$ A имеет вид A_W для некоторого периодического $W = u^{\infty}$.

Доказательство. Если алгебра A удовлетворяет условиям теоремы, то никакое слово не порождает нильпотентный идеал. Отсюда с помощью стандартных соображений, связанных с рассмотрением членов, старших сначала по длине, а потом по лексикографическому порядку, легко выводится, что никакой элемент алгебры не порождает нильпотентный идеал. Поэтому A полупервична.

Если существует семейство, описанное в пункте в), то любые два слова имеют одновременное вхождение в заданном порядке в некоторое другое слово. Поэтому произведение идеалов, порожденных словами, не равно нулю. Рассмотрение старших членов максимальной длины показывает, что произведение любых двух идеалов не равно нулю. Поэтому в случае в) алгебра A первична.

Остается проверить существование указанных наборов слов в случаях, когда A первична или полупервична.

Начнем с доказательства пункта б). Пусть v — слово в A. Нам достаточно построить первичное слово в A, имеющее вхождение v. Для этого нам достаточно построить семейство $\{v_i\}$ слов в A таких, что $v_0 = v$, $v_{i+1} = v_i c_i v_i d_i v_i c_i v_i$. Так как каждое v_{i+1} имеет вид $r v_i s$, все v_i объединяются в сверхслово v_∞, каждое подслово u которого есть подслово некоторого v_i. И поскольку v_i очевидным образом имеет бесконечно много вхождений в v_∞, то u тоже имеет бесконечно много вхождений в v_∞. Таким образом, сверхслово v_∞ первично.

Итак, пусть v_i уже построено. Поскольку A — полупервичная алгебра, при некотором c_i выполняется $v_i' = v_i c_i v_i \neq 0$. Аналогичным образом при некотором $d_i \quad v_i' d_i v_i' \neq 0$. Мы построили v_{i+1}. Пункт б) доказан.

Докажем пункт а). В этом случае число слов в алгебре A счетно. Занумеруем их. Пусть $\{u_i\}_{i=0}^\infty$ — список слов в A. Нам нужно построить первичное слово, содержащее все u_i.

Для этого достаточно построить семейство слов $\{v_i\}$ таких, что

$$v_0 = u_0, \quad v_{i+1} = v_i c_i u_i d_i v_i c_i u_i e_i v_i c_i u_i d_i v_i c_i u_i$$

В этом случае каждое v_{i+1} имеет вид $r v_i s$, и все $\{v_i\}$ объединяются в первичное слово, содержащее каждое u_i бесконечно много раз.

Пусть v_i уже построено. Поскольку A — первичная алгебра, при некотором $c_i \quad v_i' = v_i c_i u_i \neq 0$. Аналогичным образом при некотором d_i $v_i'' = v_i' d_i v_i' \neq 0$ и при некотором $e_i \quad v_i'' e_i v_i'' \neq 0$. Мы построили v_{i+1}. Пункт а) доказан.

Пункт в) есть непосредственное следствие пунктов а) и б). $\square$

4. Автоматные алгебры

В этой главе основной объект изучения — автоматные (мономиальные) алгебры. Класс автоматных алгебр является естественным обобщением класса конечно определенных мономиальных алгебр. Практически все результаты для конечно определенных мономиальных алгебр строят путем построения графа нормальных слов — т.е. используя автоматную технику.

Всюду в этой главе под словом алгебра мы будем подразумевать мономиальную алгебру. Кроме того, будем считать, что единица принадлежит алгебре и представляется пустым словом от образующих.

Напомним хорошо известные определения из теории конечных автоматов. Пусть задан некоторый алфавит (т.е. конечное множество) X. *Конечным автоматом* (**КА**) с алфавитом X входных символов называется ориентированный граф, у которого ребра помечены буквами из алфавита X. Одна из вершин этого графа должна быть отмечена как *начальная*, и произвольное множество вершин — как *конечные* или *финальные* вершины. Слово w в алфавите X *допускается конечным автоматом*, если существует путь в графе, начинающийся в начальной вершине и заканчивающийся в одной из конечных вершин, у которого пометки ребер, записанные в порядке их прохождения, совпадают со словом w.

Языком в алфавите X называется некоторое подмножество множества всех слов (цепочек) в алфавите X. Язык L называется *регулярным* или *автоматным*, если существует конечный автомат, допускающий слова из множества L и только их. Справедливо следующее

Предложение 4.1. *Объединение, пересечение и дополнение регулярных языков снова регулярно.* $\square$

Имеется несколько вариантов определения понятия конечного автомата. Автомат называется *детерминированным*, если из любой его вершины не может выходить более одного ребра, помеченного одной и той же буквой (а также нет ребер, помеченных пустой цепочкой). Если отказаться от этого ограничения, а также разрешить ребра, помеченные пустой цепочкой, то мы придем к понятию *недетерминированного* конечного автомата. Можно кроме того разрешить недетерминированному конечному автомату иметь несколько начальных вершин. Хорошо известен результат из теории конечных автоматов: для всякого недетерминированного **КА** существует детерминированный **КА**, допускающий то же самое множество слов.

Для наших целей удобно будет также рассматривать класс недетерминированных **КА**, которые получаются из детерминированных объявлением всех вершин в качестве начальных и одновременно конечных. Это связано с тем, что язык ненулевых слов мономиальной алгебры обладает следующим свойством: любое подслово слова, принадлежащего языку, также принадлежит языку.

Определение 4.2. Пусть A — мономиальная алгебра (не обязательно конечно определенная). A называется *автоматной*, если множество ее ненулевых слов от образующих A является регулярным языком.

Легко видеть, что мономиальная алгебра является автоматной тогда и только тогда, когда множество ее ненулевых слов есть множество подслов слов некоторого регулярного языка.

Дадим другое эквивалентное описание автоматных алгебр.

Определение 4.3. Пусть u — ненулевое слово в алгебре A. Слово v назовем *продолжением* слова u, если $uv \neq 0$.

Слова u и w алгебры A *эквивалентны*, если множество продолжений слова u совпадает с множеством продолжений слова w.

Предложение 4.4. *Мономиальная алгебра является автоматной тогда и только тогда, когда множество ее ненулевых слов распадается на конечное число классов эквивалентности.*

Доказательство. В одну сторону (если алгебра автоматна, то число классов эквивалентности конечно) утверждение очевидно. Пусть число классов эквивалентности слов конечно. Приведем конструкцию минимального детерминированного автомата алгебры A.

Вершины: классы эквивалентности ненулевых слов алгебры A.

Ребра: вершина $\{u\}$ соединена с вершиной $\{v\}$ ребром, направленным от u к v, с меткой a, где a принадлежит множеству образующих алгебры A, если $ua \sim v$ (т.е. слово ua принадлежит классу эквивалентности слова v).

Начальная вершина: класс эквивалентности пустого слова.

Множество конечных вершин: любая вершина является конечной.

Нетрудно проверить, что определение корректно, и что язык, задаваемый построенным конечным автоматом, в точности совпадает с множеством ненулевых слов алгебры A. Кроме того, построенный конечный автомат обладает свойством минимальности: любые его две различные вершины не эквивалентны, т.е. существует путь из одной вершины, для которого не существует пути из другой вершины с такими же пометками на ребрах. (Разные вершины порождают разные языки, если их рассматривать в качестве начальных.) □

Предложение 4.5. *Конечно определенная мономиальная алгебра является автоматной.*

Доказательство. Пусть максимальная степень определяющих соотношений алгебры равна n. Тогда множество продолжений всякого ненулевого слова длины $\geq n-1$ однозначно определяется его концом длины $n-1$. Следовательно, число классов эквивалентности ненулевых слов не превосходит числа ненулевых слов длины $\leq n-1$. □

Обратное утверждение неверно: класс автоматных алгебр шире, чем класс конечно порожденных мономиальных. Например, рассмотрим мономиальную алгебру, заданную тремя образующими $\{a, b, c\}$ и бесконечным числом соотношений $\{ab^nc = 0, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Легко видеть, что алгебра автоматна и не конечно определена. Имеет место общее утверждение:

Предложение 4.6. *Мономиальная алгебра автоматна тогда и только тогда, когда множество ее определяющих соотношений образует регулярный язык.* □

Определение 4.7. Сверхслово W называется *автоматным*, если множество его подслов образует регулярный язык.

Предложение 4.8. *Следующие свойства сверхслова W равносильны:*

а) W автоматно.

б) W имеет расположение на описанном выше графе.

в) Множество подслов W разбивается на конечное число классов эквивалентности, так что замена подслова s слова v на любое подслово того же класса сохраняет свойство "быть подсловом" W. □

Предложение 4.9. *а) р.р. слово автоматно $\iff$ оно периодично.*

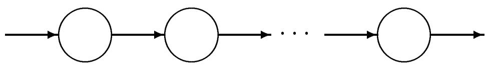
б) Первичное автоматное сверхслово имеет расположение на сильно связанном графе.

в) Первичная автоматная алгебра имеет вид A_W, где W — первичное автоматное сверхслово, имеющее расположение на графе этой алгебры.
□

4.1. Функции роста автоматных алгебр

Пусть $\Gamma(A)$ — минимальный детерминированный граф автоматной алгебры A. Назовем вершину графа *циклической*, если существует путь, начинающийся и заканчивающийся в этой вершине. Назовем вершину *дважды циклической*, если существуют два различных пути, начинающихся и заканчивающихся в этой вершине и не проходящих ни через одну другую вершину дважды. Иначе говоря, вершина дважды циклическая, если она принадлежит двум различным циклам. *Циклом* называется подграф графа, содержащий путь из некоторой вершины в саму себя, не проходящий дважды ни через одну другую вершину.

Пусть граф Γ не имеет дважды циклических вершин. Назовем *цепью* подграф графа Γ, состоящий из последовательности ребер, в которой конец предыдущего ребра является началом следующего, и никакая вершина не встречается дважды. Назовем *простым графом* подграф графа Γ, состоящий из конечного числа циклов, занумерованных числами $1, 2, \dots, d$, причем пары соседних циклов с номерами i, $i+1$ соединены ровно одной цепью, направленной от i-го к $i+1$-му циклу. В первый цикл может входить одна цепь, и из последнего также может выходить одна цепь. Число циклов d будем называть *длиной* простого графа.



Простой подграф — это минимальный подграф (в графе без дважды циклических вершин), содержащий некоторый путь.

Теорема 4.10 (В. А. Уфнаровский). *Пусть A — автоматная алгебра, $\Gamma(A)$ — ее минимальный детерминированный граф.*

1. Если $\Gamma(A)$ имеет вершину, принадлежащую двум различным циклам, то A имеет экспоненциальную функцию роста.

2. Если $\Gamma(A)$ не имеет дважды циклических вершин, то A имеет степенную функцию роста. Степень роста (размерность Гельфанда—Кириллова) равняется количеству циклов в максимальном простом подграфе, содержащемся в $\Gamma(A)$.

Доказательство.

1. Пусть v — вершина графа, принадлежащая двум различным циклам C_1 и C_2, u_1 — слово, соответствующее пути из v в v по циклу C_1 (составленное из меток ребер C_1 в порядке их прохождения), u_2 — слово, соответствующее C_2. Утверждение пункта 1 вытекает из того, что слова u_1 и u_2 порождают свободную подалгебру ранга 2 в A.

2. Обозначим длину максимального простого подграфа через d. Пусть $V(n)$ — число ненулевых слов длины $\leq n$ в алгебре A. Для доказательства теоремы достаточно показать, что существуют числа c_1, c_2 такие, что для достаточно больших n выполняются неравенства

$$c_1 n^d \leq V(n) \leq c_2 n^d,$$

где константы c_1, c_2 не зависят от n.

Докажем оценку сверху. Граф $\Gamma(A)$ можно представить в виде объединения конечного числа простых подграфов (возможно, пересекающихся) таких, что всякий путь в графе лежит целиком внутри одного подграфа. Поэтому достаточно доказать неравенство для одного подграфа. Рассмотрим произвольный простой подграф H, содержащий k циклов, где $1 \leq k \leq d$. Построим простой граф H', содержащий такое же количество циклов и цепей, соединяющих циклы, в котором все циклы имеют длину 1 (петли) и все простые пути также имеют длину 1 (ребра). Очевидно, что число путей длины n в графе H' не меньше, чем число путей в H, поэтому достаточно доказать неравенство для простого графа, в котором длины всех циклов и длины всех цепей равны единице. Но для такого простого графа число путей длины $\leq n$ легко вычисляется. Каждый путь однозначно определяется числом оборотов в каждом цикле, а также тем, прошел ли он через ребро, предшествующее первой циклической вершине, и ребро, следующее за последней циклической вершиной. Суммарное число оборотов во всех циклах не превосходит n. Число различных представлений n в виде суммы d слагаемых с учетом их порядка равно $\binom{n+d}{d-1} \leq Kn^{d-1}$, где K — константа, не зависящая от n. Число различных сумм, не превосходящих n, не больше, чем $n \cdot Kn^{d-1} = Kn^d$. Следовательно, число различных путей длины $\leq n$ не превосходит $3Kn^d$.

Оценка снизу доказывается аналогично. □

Предложение 4.11. *Ряд Гильберта автоматной алгебры рационален.* □

Описание множеств финитно-неначальных слов в терминах графов. Назовем вершину A графа *финитно не начальной*, если нет сколь угодно длинного пути, в ней начинающейся. Это равносильно тому, что в графе есть циклическая вершина, предшествующая вершине A. Понятие *финитно не конечной* вершины определяется аналогично. Имеет место следующее

Предложение 4.12. *а) Слово принадлежит W_R, если оно имеет расположение с началом в финитно не начальной вершине графа, и принадлежит W_R, если такого вхождения не имеет. Симметричное утверждение верно для W_L и J_L.*

б) Слово принадлежит W_{RL}, если оно имеет расположение с началом в финитно не начальной вершине и с концом в финитно не конечной. Если такого расположения нет, то оно принадлежит J_{RL}. (Отметим, что слово v может иметь расположения, удовлетворяющие каждому из этих условий, но не иметь расположения, удовлетворяющего обоим из них. В этом случае v не лежит в W_{RL}, но лежит в пересечении W_R и W_L.)

в) Если $J_R(A) = 0$, то есть граф без финитно не начальных вершин, задающий алгебру A, Если $J_L(A) = 0$, то есть граф без финитно не конечных вершин, задающий A. Если пересечение J_R, и J_L нулевое, то есть граф у которого отсутствуют пути, соединяющие финитно не начальные вершины с финитно не конечными. □

Определения W_{RL}, W_L, W_R, J_{RL}, J_R, J_L см. в разделе **??**.

Отметим также, что если автоматная алгебра нильпотентна, то в представляющем ее графе есть цикл. Поэтому если в автоматной алгебре есть сверхслово, то в ней есть и периодическое сверхслово.

Предложение 4.13. *Лексикографически минимальное (максимальное) правое сверхслово в ненильпотентной автоматной алгебре существует и предпериодично порядка не выше числа вершин представляющего ее графа.* □

Доказательство. Рассмотрим для каждой финитно не конечной вершины графа расположение минимального правого сверхслова. Для каждого такого расположения отметим начальную стрелку. Теперь максимальным правым сверхсловам соответствуют пути по отмеченным стрелкам, а каждый такой путь есть "цикл с хвостом". На "хвосте" расположен предпериод, а на цикле — период. Доказательство можно провести и с помощью лемм о псевдопериодичности: максимальное слово, растущее из данной вершины единственно, и при возвращении к вершине возникает сдвиг. □

4.2. Матричные представления и полиномиальные тождества автоматных алгебр

В данном параграфе будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 4.14. *Автоматная мономиальная алгебра вкладывается в алгебру матриц над свободной алгеброй.*

Теорема 4.15. *Пусть граф автоматной мономиальной алгебры A не имеет вершин, принадлежащих двум циклам. Тогда A вкладывается в алгебру матриц над полем.*

Из теоремы 4.15 и результатов предыдущего параграфа получаем

Следствие 4.16. *Пусть A — автоматная мономиальная алгебра,* $\Gamma(A)$ — *ее минимальный детерминированный граф. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Gamma(A)$ *не имеет дважды циклических вершин;*
(2) алгебра A имеет степенной рост;
(3) алгебра A имеет не экспоненциальный рост;
(4) алгебра A представима матрицами над полем;
(5) в A выполняется полиномиальное тождество.

Доказательство следствия 4.16. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) доказана в теореме 4.10. Импликация (4) $\Rightarrow$ (5) очевидна. Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) следует из теоремы 4.15. Осталось доказать (5) $\Rightarrow$ (1). Действительно, если в A выполняется полиномиальное тождество, то $\Gamma(A)$ не может иметь дважды циклических вершин, потому что в противном случае алгебра A содержала бы свободную подалгебру ранга 2 (см. доказательство теоремы 4.10). Можно также заметить, что рост автоматной алгебры, граф которой содержит дважды циклическую вершину, экспоненциальный, а рост любой конечно порожденной *PI*-алгебры степенной (ввиду теоремы Ширшова об ограниченности высот). $\square$

Для доказательства теорем 4.14 и 4.15 мы приведем явные конструкции представлений автоматных алгебр.

4.2.1. Конструкции представлений автоматных алгебр

Занумеруем вершины графа $G(A)$ алгебры A числами $1, 2, \dots, n$. Обозначим образующие алгебры A через $a_1, \dots, a_m$. Пусть $\tilde{t}_{k,ij}$ — *свободные переменные*, порождающие свободную алгебру $K\langle \tilde{t}_{k,ij} \rangle$, где $k = 1, \dots, m$, $i, j = 1, \dots, n$ (т.е. k индексирует образующие алгебры A, а i, j — вершины графа $G(A)$). Соответственно через $t_{k,ij}$ обозначим *свободные коммутативные переменные*, порождающие алгебру коммутативных многочленов $K[t_{k,ij}]$. Эти переменные будут соответствовать ребрам графа $G(A)$: переменная $t_{k,ij}$ соответствует ребру, соединяющему вершины i и j, помеченному буквой a_k. Рассмотрим следующие два гомоморфизма из алгебры A, заданные своими значениями на образующих A. Оба они являются продолжениями гомоморфизмов полугруппы ненулевых слов алгебры A в полугруппу матриц.

- Гомоморфизм φ из A в алгебру $n \times n$ матриц над свободной алгеброй:

  $$\varphi(a_k) = \sum_{(i,j)} \tilde{t}_{k,ij} e_{ij} \ ,$$

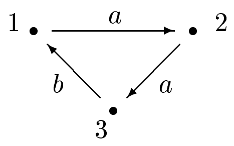
  где суммирование ведется по всем парам индексов (i, j) таким, что в графе $G(A)$ есть ребро, направленное от вершины i к вершине j и помеченное буквой a_k. Через e_{ij} мы обозначили матричные единицы.

- Гомоморфизм ψ из A в алгебру $n \times n$ матриц над алгеброй коммутативных многочленов:

$$\psi(a_k) = \sum_{(i,j)} t_{k,ij} e_{ij} \ ,$$

где суммирование ведется по тем же парам индексов (i,j), что и в предыдущем случае.

Пример. Рассмотрим автоматную алгебру A, все ненулевые слова которой являются подсловами бесконечного циклического слова $aabaab\ldots$. Алгебру A можно представить графом $G(A)$:



Представление ψ отображает A в алгебру 3×3 матриц над кольцом многочленов $K[t_{a,12},\ t_{a,23},\ t_{b,31}]$ и задается матрицами

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} 0 & t_{a,12} & 0 \\ 0 & 0 & t_{a,23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t_{b,31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы задали отображения φ и ψ на образующих алгебры A. Продолжим естественным образом эти отображения на слова от образующих. Нетрудно видеть, что образы нулевых слов алгебры A равны нулю (см. лемму 4.17). Поэтому отображения φ и ψ продолжаются до гомоморфизмов полугруппы ненулевых слов алгебры A в полугруппу матриц, а следовательно, и до гомоморфизмов полугрупповой алгебры в алгебру матриц. Поэтому φ и ψ задают гомоморфизмы алгебры A в алгебру матриц.

Гомоморфизм ψ мы в дальнейшем будем называть *каноническим представлением* автоматной алгебры A. Отметим, что каждому расположению слова отвечает оператор вида λE_{ij}, где i — номер начальной вершины расположения, j — конечной. Если в графе обратить стрелки, то его каноническое представление (сопряженной алгебры) будет сопряжено каноническому представлению исходного графа.

Перейдем к доказательству теорем 4.14 и 4.15. Теорема 4.14 вытекает из следующей простой леммы, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 4.17. *Пусть $w = a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l}$ — ненулевое слово от образующих автоматной алгебры A. Тогда при отображении φ слово w переходит в матрицу $\varphi(w)$, у которой на месте с индексами (i,j) стоит элемент*

$$\varphi(w)_{ij} = \sum \tilde{t}_{k_1, i\, v_1}\ \tilde{t}_{k_2, v_1 v_2} \ldots \tilde{t}_{k_l, v_{l-1}\, j},$$

где суммирование ведется по всем путям $i, v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}, j$, соединяющим вершины (i,j), таким, что пометки ребер каждого из этих путей совпадают со словом $a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l}$. (Если таких путей нет, то сумма полагается равной нулю.)

В случае, когда граф $G(A)$ детерминированный (т.е. не существует двух ребер с одинаковой меткой, выходящих из одной и той же вершины), в этой сумме может быть не больше одного слагаемого. $\square$

Теорема 4.14 следует из леммы 4.17, поскольку образы ненулевых слов алгебры A при отображении φ линейно независимы.

Для отображения ψ лемма 4.17 переформулируется следующим образом.

Лемма 4.18. *Пусть в графе $G(A)$ автоматной алгебры A не существует двух ребер с одинаковой меткой, выходящих из одной и той же вершины (т.е. граф детерминированный). Пусть $w = a_{k_1}a_{k_2}\ldots a_{k_l}$ — ненулевое слово от образующих A. Если в графе $G(A)$ существует путь из вершины i в вершину j, метки ребер которого совпадают со словом w, то в матрице $\psi(w)$ на месте (i,j) стоит элемент*

$$\psi(w)_{ij} = t_{k_1,iv_1}^{\alpha_{i\,v_1}} t_{k_2,v_1v_2}^{\alpha_{v_1v_2}} \ldots t_{k_l,v_r\,j}^{\alpha_{v_r\,j}},$$

где через $v_1, v_2, \ldots, v_r$ мы обозначили различные *вершины, по которым проходит путь, соединяющий вершины (i,j), через $\alpha_{v_hv_t}$ мы обозначили количество раз, которое путь проходит через ребро $v_h \to v_t$.*

Иными словами, в матрице на месте (i,j) стоит произведение степеней коммутативных переменных, соответствующих ребрам пути из вершины i в вершину j. Степень каждой из этих переменных равна количеству раз, которое путь проходит через соответствующее ребро.

Если пути из вершины i в вершину j, метки ребер которого совпадали бы со словом w, не существует, то в матрице $\psi(w)$ на месте (i,j) стоит 0. □

Для доказательства теоремы 4.15 нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 4.19. *Пусть детерминированный граф $G(A)$ автоматной алгебры A не имеет вершин, принадлежащих двум различным циклам. Тогда всякий путь в $G(A)$ однозначно определяется количеством прохождений каждого ребра графа $G(A)$.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по длине пути. Достаточно показать, что первое ребро пути определяется однозначно. Пусть из начальной вершины выходит более одного ребра, принадлежащего пути (и, следовательно, путь больше одного раза проходит через начальную вершину). Тогда только одно из этих ребер может принадлежать циклу, поскольку в графе нет пересекающихся циклов. Так как путь должен хотя бы раз вернуться в начальную вершину, первым ребром пути должно быть циклическое ребро. □

Теорема 4.14 вытекает из лемм 4.18 и 4.19, поскольку из них следует, что образы различных ненулевых слов алгебры A линейно независимы.

Если мономиальная алгебра представима, то и ее полугруппа слов представима. Однако обратное неверно. Имеет место следующий результат (см. [138]).

Теорема 4.20 (Клини). *Любой регулярный язык матрично представим. (В частности, представима любая автоматная мономиальная полугруппа.)* □

Доказательство этой теоремы копирует доказательство теоремы о представимости произвольной мономиальной алгебры матрицами над свободной. Вершинам графа следует сопоставить двумерные векторные пространства, а стрелкам — морфизмы общего положения. Далее следует воспользоваться тем обстоятельством, что две матрицы общего положения образуют абсолютно свободную полугруппу.

Если минимальный граф содержит зацепляющиеся циклы, то соответствующая мономиальная алгебра не будет представимой. Таким образом, ядро представления может содержать не слова, а только их линейные комбинации. Получение информации об этом ядре (в частности, в каком T-идеале оно содержится) представляется интересным. Интересно также знать, когда каноническое представление графа дает точное представление его полугруппы слов. Простейший пример, когда это не так — граф, содержащий одну вершину и две петли, помеченные разными буквами (образ канонического представления получается коммутативным). Более общий пример — граф, состоящий из пары циклов, зацепленных по одной вершине. Условие точности должно формулироваться в терминах поведения фрагментов такого рода. По этой причине в доказательстве теоремы Клини вершинам графа сопоставлялись не векторы, а целые двумерные пространства. Отметим, что каноническое представление алгебры графа без зацепляющихся циклов является точным.

Назовем мономиальную полугруппу *квазипредставимой*, если имеется представление без мономиального ядра. Полугруппы, квазипредставимые над конечными кольцами, можно описать.

Предложение 4.21. *а) Полугруппа представима конечным кольцом тогда и только тогда, когда она конечна.*

б) Мономиальная полугруппа квазипредставима некоторым конечным кольцом тогда и только тогда, когда она автоматна.

Доказательство. Пункт а) очевиден. Квазипредставимость мономиальной полугруппы получается из канонического представления. Обратное вытекает из критерия регулярности языка: язык регулярен тогда и только тогда, когда все его слова можно разбить на конечное число типов так, что замена подслова любым словом того же типа сохраняет принадлежность всего слова языку. Отметим, что класс квазипредставимых алгебр не зависит от характеристики. □

Замечание. С помощью графов можно задавать операторы. Верхнетреугольная матрица задается графом, все циклы которого имеют длину 1 и не зацеплены. Похожие конструкции используются в главе 4.6.

Если граф Γ есть цикл длины n, все стрелки которого помечены буквой a, то в расширении его канонического представления базис из собственных векторов $\vec{e}_\theta$ имеет вид: $\vec{e}_\theta = \sum_j \vec{e}_{\theta,j}$, где θ — корень n-ой степени из единицы, $\vec{e}_{\theta,j} = \vec{e}_j \cdot \theta^j M^{-1} \prod_{i<j} \lambda_i$; λ_i — константы канонического представления, M — их среднее геометрическое. Вектору $\vec{e}_\theta$ отвечает собственное значение, равное $\theta \cdot M$.

4.2.2. Полиномиальные тождества

Следствие 4.16 дает алгоритм проверки наличия полиномиального тождества в автоматной алгебре. Цель этого пункта — получить более точную информацию о тождествах. Чтобы не загромождать формулировки утверждений, ограничимся случаем бесконечного основного поля.

Введем некоторые определения и обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем (в частности, в главах 4.6 и 5).

Определения. Цикл называется *неприводимым*, если его *большой период* — слово, которое по нему можно прочесть, — не циклично, т.е. не равно степени меньшего слова. *Малым периодом* цикла называется корень из его большого периода. *Расположением* слова в графе Γ называется путь, по которому его можно прочитать. Если между графами Γ' и Γ можно установить соответствие, взаимно однозначное на стрелках и вершинах, при котором разным буквам разметки графа Γ отвечают разные буквы разметки Γ', то говорят, что граф Γ' отличается от Γ *расклейкой букв*.

Отметим, что если слово не имеет расположения в графе, задающем автоматную алгебру, то оно в этой алгебре нулевое. Все слова, отвечающие прохождению данного цикла C, циклически сопряжены. Все слова, расположения которых соединяют две данные вершины цикла A и B имеют вид: R^kS, где R отвечает большому периоду цикла, а S — кратчайшему пути, соединяющему A с B.

Обозначим через A_u мономиальную алгебру, все ненулевые слова которой являются подсловами бесконечного циклического слова $u^\infty = uuu\dots$. Будем считать, что u не циклично, т.е. не равно степени никакого своего собственного подслова.

Теорема 4.22. *Множество полиномиальных тождеств алгебры A_u совпадает с множеством тождеств алгебры матриц K_n, где n — длина слова u.*

Доказательство. Алгебру A_u можно представить циклическим графом $G(A)$ (мы допускаем, что любая вершина графа является начальной). Метки ребер цикла в порядке их прохождения совпадают со словом u. Обозначим через $T(A)$ идеал тождеств A, через $T(K_n)$ — идеал тождеств алгебры матриц K_n. Конструкция представления ψ дает нам вложение A в алгебру матриц порядка n над расширением F исходного поля K. Так как поле бесконечно, то при расширении поля набор тождеств сохраняется. Следовательно, $T(A) \supseteq T(F_n) = T(K_n)$.

Обратное включение следует из того, что образ $\psi(A)$ порождает над полем F всю матричную алгебру F_n. Достаточно проверить, что матричные единицы принадлежат $F \cdot \psi(A)$. Пусть $u = a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_n}$, ребра $i \to i+1$ графа $G(A)$ помечены буквами a_i, $i = 1, \dots, n-1$, ребро $n \to 1$ помечено буквой a_{k_n}. Из леммы 4.19 следует, что образ слова

$$\psi(a_{k_i}a_{k_{i+1}}\dots a_{k_n}ua_{k_1}\dots a_{k_{j-1}})$$

является матрицей, у которой на всех местах, кроме (i,j), стоят нули, а на месте (i,j) стоит ненулевой элемент поля F. Чтобы получить матричную единицу e_{ij}, достаточно домножить эту матрицу на обратный элемент. $\square$

Напомним, что *полиномиальной степенью*, или *сложностью PI*-алгебры A, называется максимальное n такое, что $T(A) \subseteq T(K_n)$.

Теорема 4.23. *Полиномиальная степень автоматной алгебры равна максимуму из длин периодов бесконечных циклических слов в алгебре.* $\square$

Следствие 4.24. *Полиномиальная степень автоматной алгебры не превосходит порядка максимального цикла в ее минимальном детерминированном графе.* $\square$

Доказательство этой теоремы предоставляется читателю. Отметим, что неравенство в условии следствия может быть строгим, как показывает следующий пример:

$$\bullet \xrightarrow{a} \bullet \underset{b}{\overset{b}{\rightleftarrows}} \bullet \xrightarrow{c} \bullet$$

Максимальная длина цикла здесь равна двум, но полиномиальная степень равна единице, т.к. в алгебре выполняется тождество $[x_1, y_1][x_2, y_2][x_3, y_3] = 0$.

Таким образом, для нахождения сложности автоматной алгебры надо взять максимум длин малых периодов всех циклов.

Из теоремы о независимости 2.40 вытекает следующее предложение.

Предложение 4.25. *а) Минимальная размерность ненильпотентного представления мономиальной алгебры (не обязательно автоматной или PI) равна минимально возможной длине периода в бесконечном слове из этой алгебры.*

б) Эта размерность в случае автоматной алгебры равна минимальной длине малого периода в любом графе, задающем эту алгебру. В случае PI-алгебры она совпадает с ее сложностью. □

Замечание. Интересен вопрос об алгоритме вычисления минимальной размерности представления автоматной полугруппы или алгебры.

И в заключение этого параграфа сделаем последнее наблюдение.

Предложение 4.26. *Коммутативная мономиальная алгебра есть прямая сумма* 1*-порожденных.* □

4.3. Структурная теория автоматных алгебр

Автоматные алгебры по своему строению похожи на конечномерные. В частности, радикал Джекобсона автоматной алгебры нильпотентен и равен пересечению конечного числа первичных идеалов.

Обозначим через $\Gamma(A)$ минимальный детерминированный граф алгебры A. Через n обозначим количество вершин графа $\Gamma(A)$.

Теорема 4.27. *Радикалы Джекобсона, Бэра и нильрадикал автоматной алгебры совпадают и нильпотентны. Радикал порождается как линейное пространство словами, которым соответствуют пути в графе $\Gamma(A)$, не входящие целиком в состав ни одного циклического пути. Как идеал радикал порождается такими словами длины, не большей n.*

Напомним, что в произвольной мономиальной алгебре радикал Джекобсона и нильрадикал совпадают (глава 3). Однако радикал Бэра (первичный радикал) может быть строго меньшим, чем радикал Джекобсона.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько простых предложений.

Предложение 4.28. *Пусть A — произвольная мономиальная алгебра. Тогда*

(1) A полупервична тогда и только тогда, когда для любого слова $u \neq 0$ существует слово v такое, что $uvu \neq 0$; или, что то же самое, она задается графом с несвязанными сильно связными компонентами.

(2) A первична тогда и только тогда, когда для любых слов $u, v \neq 0$ существует слово w такое, что $uwv \neq 0$. Или, что то же самое, она задается сильно связным графом.

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратные импликации вытекают из рассмотрения старших слов соответствующих элементов. □

Предложение 4.29. *Выделим произвольный подграф $G \subseteq \Gamma(A)$ в графе алгебры A. Тогда автоматная алгебра A', соответствующая графу G, является гомоморфным образом алгебры A.*

Доказательство. Действительно, множество ненулевых слов алгебры A' является подмножеством множества ненулевых слов алгебры A. Следовательно, A' является фактором алгебры A по идеалу, порожденному разностью этих множеств. □

Предложение 4.30. *Пусть автоматная алгебра A полупервична. Тогда она полупроста в смысле Джекобсона.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $0 \neq x \in A$. Обозначим через u старшее слово x. По предложению 4.28 найдется слово v_1 такое, что $uv_1u \neq 0$. Применяя снова предложение 4.28 к слову uv_1u, получим v_2 такое, что $uv_1uv_2uv_1u \neq 0$. Действуя и далее таким образом, мы построим бесконечное вправо ненулевое слово W такое, что слово u встречается в нем сколь угодно далеко от начала. Отметим бесконечное число неперекрывающихся вхождений u в W: пусть u является концом слов $(W)_{k_1}, (W)_{k_2}, \ldots$, где через $(W)_i$ обозначается начальный кусок слова W длины i. Воспользуемся автоматностью алгебры A: среди слов $(W)_{k_i}$ найдутся два слова, соответствующие одной и той же вершине графа $\Gamma(A)$. Пусть они равны $(W)_h$, $(W)_t$, где $t > h$ и $t - h > |u|$. Слово $(W)_t$ можно представить в виде $(W)_hzu$ для некоторого ненулевого слова z. Из эквивалентности $(W)_h$ и $(W)_hzu$ следует, что бесконечное периодическое слово $U = (zu)^\infty = zuzuzu\ldots$ отлично от нуля в A. Рассмотрим алгебру A_U. В главе 3 показано, что она полупроста в смысле Джекобсона. При естественном эпиморфизме $A \to A_U$ элемент x переходит в ненулевой элемент алгебры A_U (поскольку образ x есть линейная комбинация слов, в которую входит слово u). Следовательно, $x \notin J(A)$. □

Замечание. Предложение 4.30 неверно в случае произвольной мономиальной алгебры.

Доказательство теоремы 4.27. Обозначим через I идеал, порожденный всеми словами, которым соответствуют пути, не входящие в состав ни одного циклического пути. Очевидно, эти слова порождают нильпотентную полугруппу, так что идеал I нильпотентен. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $J(A/I) = 0$.

Покажем, что алгебра A/I полупервична. Действительно, A/I — автоматная алгебра, которая может быть задана подграфом графа $\Gamma(A)$, состоящим из вершин и ребер, входящих в состав всевозможных циклических путей (см. предложение 4.29). Отсюда следует, что любое ненулевое слово в алгебре A/I входит в состав бесконечного периодического слова. Следовательно, по предложению 4.28 алгебра полупервична. Полупростота в смысле Джекобсона вытекает из предложения 4.30. □

Назовем ориентированный граф *сильно связным*, если для любых его двух вершин существует путь из одной в другую.

Теорема 4.31. *Радикал Джекобсона автоматной алгебры A равен пересечению конечного числа первичных идеалов P_i, соответствующих сильно связным компонентам G_i графа $\Gamma(A)$. Идеал P_i порождается как линейное пространство словами, которым соответствуют пути, не лежащие целиком внутри подграфа G_i. Как идеал P_i порождается такими словами длины, не большей n. Факторалгебра A/P_i является автоматной алгеброй, задаваемой графом G_i.*

Доказательство. Любой циклический путь лежит целиком внутри какой-нибудь сильно связной компоненты G_i графа $\Gamma(A)$. Следовательно, пересечение идеалов P_i порождается словами, которым соответствуют пути, не входящие в состав циклических путей. Поэтому из теоремы 4.27 следует, что пересечение идеалов P_i совпадает с радикалом. Первичность идеалов P_i вытекает из предложения 4.28 и сильной связности подграфов G_i. □

4.4. Нильпотентные элементы и делители нуля

Тема этого параграфа — построение алгоритмов, которые по заданному элементу x автоматной алгебры A проверяют, является ли x нильпотентным элементом и является ли x делителем нуля. Автоматная алгебра задается своим графом $\Gamma(A)$.

Теорема 4.32. *Пусть граф $\Gamma(A)$ автоматной алгебры A имеет n вершин, $x \in A$ — нильпотентный элемент (т.е. существует t такое, что $x^t = 0$). Тогда $x^n = 0$.*

Следствие 4.33. *Задача проверки, является ли элемент $x \in A$ нильпотентным, алгоритмически разрешима.* □

Доказательство теоремы. Выше было доказано, что A вкладывается в алгебру $n \times n$ матриц над свободной алгеброй (теорема 4.14). Хорошо известно, что свободная алгебра вкладывается в тело (см. [195]). Следовательно, достаточно доказать утверждение для нильпотентной матрицы M над телом. Но это вытекает из соображений размерности. (Левое умножение на матрицу является линейным оператором правого векторного пространства столбцов размерности n над телом. Размерности образов операторов M, $M^2, \ldots$ строго убывают, следовательно, $M^n = 0$.) □

С делителями нуля дело обстоит несколько сложнее. Можно попытаться воспользоваться вложением в алгебру матриц над свободной алгеброй, тем более, что соответствующая задача для алгебры матриц над свободной алгеброй алгоритмически разрешима.

Предложение 4.34. *Существует алгоритм, проверяющий, является ли квадратная матрица размера n с элементами из свободной алгебры правым делителем нуля в алгебре матриц над свободной алгеброй.*

Идея доказательства. Достаточно проверить, что некоторая нетривиальная линейная комбинация строк матрицы, коэффициенты которой — элементы свободной алгебры, равна нулевой строке. Алгоритм напоминает метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду. Элементарными преобразованиями строк можно добиться того, что у ненулевых многочленов, стоящих в первом столбце матрицы, старшие слова не являлись бы концами друг друга. Следовательно, они являются свободным базисом левого идеала, порожденного ими, как левого модуля над свободной алгеброй. Переставляя строки, можно считать, что ненулевые элементы первого столбца стоят в строках $1, 2, \ldots, i_1$, а ниже идут нули. Этот процесс, как в методе Гаусса, повторяется для минора матрицы, расположенного, начиная со второго столбца, в строках $i_1 + 1, \ldots, n$. Если мы получим таким образом матрицу с нулевой строкой, то исходная матрица является правым делителем нуля (поскольку элементарные преобразования соответствуют домножению слева на обратимую матрицу). Если же нулевой строки не получится, то любая линейная комбинация строк полученной матрицы отлична от нуля, следовательно, она не является правым делителем нуля. Так как исходная матрица получается домножением на обратимую, то же самое верно и для исходной матрицы. □

Замечание. Проанализировав доказательство, можно получить, что если матрица M является правым делителем нуля, то

1) левый аннулятор матрицы порождается идемпотентной матрицей;

2) существует аннулирующая матрица L такая, что $LM = 0$ и степень элементов L не превосходит $dn(n+1)/2$, где d — максимальная степень элементов матрицы M.

К сожалению, применить предложение 4.34 для проверки, является ли делителем нуля элемент y автоматной алгебры A, не удается. Вложив A в алгебру матриц, можно убедиться, что y не делитель нуля, если соответствующая матрица не делитель нуля. Однако в противоположном случае не ясно, всегда ли левый аннулятор образа y имеет ненулевое пересечение с образом алгебры A. Поэтому приходится применять несколько более сложные рассуждения.

4.4.1. Алгоритм проверки, является ли элемент делителем нуля

Обозначим образующие автоматной алгебры A через $a_1, \ldots, a_s$. Зафиксируем элемент $y \in A$. Требуется проверить, является ли он *правым* делителем нуля, т.е. существует ли элемент $x \in A$ такой, что $xy = 0$. Обозначим $\deg y = n$, и в дальнейших рассуждениях n будет фиксировано. Пусть минимальный граф $\Gamma(A)$ алгебры A имеет m вершин. Напомним, что вершины графа $\Gamma(A)$ — это в точности классы эквивалентности ненулевых слов алгебры A. Два слова u и v эквивалентны, если у них одинаковые множества ненулевых продолжений:

$$u \sim v \iff (\forall w \quad uw \neq 0 \iff vw \neq 0)\ .$$

Алгебра автоматна, если $|\Gamma(A)| < \infty$, т.е. имеется m ненулевых слов $d_1, \ldots, d_m$ таких, что всякое ненулевое слово алгебры A эквивалентно одному из слов d_i. Отметим, что если слова u и v эквивалентны, то множество элементов (не обязательно слов) x таких, что $ux = 0$, совпадает с множеством элементов z таких, что $vz = 0$. (Это вытекает из того, что в мономиальной алгебре разные слова не могут сокращаться между собой.)

Докажем сначала вспомогательную лемму. Мы считаем, что A является алгеброй над полем K и что $1 \in A$.

Лемма 4.35. *Пусть существует элемент $x \in A$ такой, что $xy = 0$. Тогда существует слово d и элемент x' такие, что $dx'y = 0$, и свободный член элемента x' отличен от нуля.*

Доказательство. Пусть свободный член x равен нулю. Тогда $x = a_1x_1 + \cdots + a_sx_s$, где a_i — образующие алгебры A (т.е. буквы), а элементы x_i имеют степень, на единицу меньшую, чем x. Поскольку слова, начинающиеся с разных букв, не могут сократиться между собой, то для всех индексов i выполняются равенства $a_ix_iy = 0$. Выберем такое i_1, что $x_{i_1} \neq 0$. Если свободный член элемента x_{i_1} отличен от нуля, то в качестве слова d можно взять a_{i_1}. Иначе от x_{i_1} можно отщепить еще одну букву a_{i_2} такую, что $a_{i_1}a_{i_2}x_{i_1,i_2}y = 0$, и так далее. Рано или поздно этот процесс оборвется. □

Напомним, что наша цель состоит в том, чтобы найти x такой, что $xy = 0$. При этом элемент y фиксирован, и его степень обозначена через n. Через $\bar{d}$, где d — ненулевое слово алгебры A, мы будем обозначать класс эквивалентности слова d, т.е. вершину минимального графа $\Gamma(A)$ алгебры A. В построении алгоритма главную роль будут играть следующие линейные подпространства в алгебре A:

$$\begin{aligned} W_{\bar{d},k} &= \{x\colon \deg x \le k \quad \& \quad dxy = 0\}, \\ V_{\bar{d},k} &= \{x\colon \deg x \le k \quad \& \quad \deg(dxy) < \deg d + n\}. \end{aligned}$$

Комментарий: для решения нашей задачи достаточно либо найти ненулевой элемент $x \in W_{\bar{d},k}$ для некоторого слова d и некоторой степени k, либо показать, что для всех d, k пространства $W_{\bar{d},k}$ нулевые. В алгоритме, однако, удобнее работать с пространствами $V_{\bar{d},k}$. В их определении условие равенства нулю произведения dxy заменено на чуть более слабое: в линейной комбинации, представляющей элемент dxy, все члены со степенями, большими или равными $\deg d + \deg y$, сокращаются. Отметим, что $W_{\bar{d},k} \subseteq V_{\bar{d},k}$. Более того, подпространство $W_{\bar{d},k}$ в $V_{\bar{d},k}$ задается лишь конечным числом линейных условий на компоненты степеней не выше n.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определения.

Лемма 4.36. *Подпространства $V_{\bar{d},k}$ вложены друг в друга и возрастают с ростом k: $V_{\bar{d},1} \subseteq V_{\bar{d},2} \subseteq V_{\bar{d},3} \subseteq \dots$. Аналогично $W_{\bar{d},1} \subseteq W_{\bar{d},2} \subseteq W_{\bar{d},3} \subseteq \dots$.* □

Рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi_n\colon A \to A/A^{(n+1)}$ алгебры A в ее факторалгебру по идеалу, порожденному всеми словами степеней, больших n. Рассмотрим образы пространств $W_{\bar{d},k}$ и $V_{\bar{d},k}$ при этом эпиморфизме:

$$\begin{aligned} V^{(n)}_{\bar{d},k} &= \pi_n(V_{\bar{d},k}) \ , \\ W^{(n)}_{\bar{d},k} &= \pi_n(W_{\bar{d},k}) \ . \end{aligned}$$

Пространства $V^{(n)}_{\bar{d},k}$ есть проекции пространств $V_{\bar{d},k}$ на подпространство, порожденное всеми словами степени не выше n. Поскольку они конечномерны, вложены друг в друга и возрастают с ростом k (лемма 4.36), то с некоторого $k = N$ наступает стабилизация: для любого $k \ge N$ и для любого $\bar{d} \in \Gamma(A)$ справедливо равенство $V^{(n)}_{\bar{d},k} = V^{(n)}_{\bar{d},N}$. Основой алгоритма является следующее

Предложение 4.37. *Пусть для некоторого натурального k для всех вершин $\bar{d}$ минимального графа $\Gamma(A)$ алгебры A выполняются равенства $V^{(n)}_{\bar{d},k-1} = V^{(n)}_{\bar{d},k}$. Тогда для любого $\bar{d}$ справедливо равенство $V^{(n)}_{\bar{d},k} = V^{(n)}_{\bar{d},k+1}$.*

Предложение утверждает, что если стабилизация произошла на некотором шаге k, то в дальнейшем подпространства $V^{(n)}_{\bar d,k}$ уже не будут больше возрастать.

Доказательство. Зафиксируем $\bar d \in \Gamma(A)$ (d — некоторое слово). Рассмотрим $\bar x \in V^{(n)}_{\bar d,k+1}$. Нужно доказать, что $\bar x \in V^{(n)}_{\bar d,k}$. По определению $V^{(n)}_{\bar d,k}$, существует $x \in V_{\bar d,k}$ такой, что $\pi_n(x) = \bar x$. Представим x в виде $x = x_0 + a_1x_1 + \dots + a_sx_s$, где x_0 — свободный член элемента x (т.е. элемент основного поля), $a_1, \dots, a_s$ — образующие алгебры A. Тот факт, что $x \in V_{\bar d,k+1}$, означает, что $\deg(dxy) < \deg d + n$. Имеем

$$dxy = dx_0y + \sum_{i=1}^{s} da_ix_iy.$$

Рассмотрим члены в правой части равенства, степень которых не меньше $\deg d+n+1$. Степень элемента dx_0y не превосходит $\deg d+n$, поэтому члены степени выше $\deg d + n$, входящие в состав суммы, не могут сократиться с членами, входящими в состав dx_0y. Следовательно, $\deg(\sum_i da_ix_iy) < \deg d+ n + 1$. Далее, члены, начинающиеся с подслов da_i для разных i, не могут сократиться между собой, т.к. буквы a_i различны. Поэтому $\deg(da_ix_iy) < \deg d + n + 1$. Это в точности означает, что $x_i \in V_{\overline{da_i},\,k}$. Рассмотрим теперь члены элемента dxy степени ровно $\deg d + n$. Они зависят только от членов элемента x, имеющих степень не выше n. То, что все они равны нулю, означает, что $\deg(\pi_{\deg d+n}(dxy)) < \deg d + n$. Итак, имеем

$$x \in V_{\bar d,k+1} \iff \begin{array}{l} \forall i \quad da_ix_i \in V_{\overline{da_i},\,k} \quad \& \\ \deg(\pi_{\deg d+n}(dxy)) < \deg d + n. \end{array} \tag{1}$$

Воспользуемся теперь равенствами $V_{\overline{da_i},\,k} = V_{\overline{da_i},\,k-1}$ из условия предложения 4.37. Из них вытекает, что для всякого $i = 1, \dots, s$ существуют элементы $x'_i \in V_{\overline{da_i},\,k-1}$ такие, что $\pi_n(x'_i) = \pi_n(x_i)$. Составим из них элемент x':

$$x' = x_0 + \sum_{i=1}^{s} a_ix'_i\ .$$

Степень элемента x' не выше k. Условие $\deg(\pi_{\deg d+n}(dx'y)) < \deg d + n$ вытекает из того, что у элементов x и x' члены степеней, не больших n, совпадают. Поэтому из эквивалентности (1), в которой число k заменено на $k-1$, вытекает, что $x' \in V_{\bar d,k}$. По построению x' имеем $\pi_n(x') = \pi_n(x)$ и $\pi_n(x') \in V^{(n)}_{\bar d,k}$. Следовательно, $\bar x = \pi_n(x) = \pi_n(x') \in V^{(n)}_{\bar d,k}$. □

Предложение 4.38. *Пусть для некоторого натурального k для всех вершин $\bar d$ минимального графа $\Gamma(A)$ алгебры A выполняются равенства $V^{(n)}_{\bar d,k+1} = V^{(n)}_{\bar d,k}$. Тогда для всех $\bar d$ справедливы также равенства $W^{(n)}_{\bar d,k+1} = W^{(n)}_{\bar d,k}$.*

Доказательство. Пусть $\bar x \in W^{(n)}_{\bar d,k+1}$, т.е. $\bar x = \pi_n(x)$ и $x \in W_{\bar d,k+1}$. Последнее означает, что $\deg x \le k+1$ и $dxy = 0$. Равенство $dxy = 0$ эквивалентно тому, что

а) $\deg(dxy) < \deg d + n$ и
б) $\pi_{\deg d+n}(dxy) = 0$, т.е. члены степеней, не больших $\deg d + n$, равны нулю. (2)

Первое условие означает, что $d \in V_{\bar{d},k+1}$; второе задается конечным числом линейных уравнений на коэффициенты при компонентах элемента x степеней, не больших n. Поскольку $V^{(n)}_{\bar{d},k+1} = V^{(n)}_{\bar{d},k}$, то найдется элемент $x' \in V_{\bar{d},k}$ такой, что $\pi_n(x') = \pi_n(x)$. Условие а) из (2) выполняется по определению $V_{\bar{d},k}$, условие б) — потому, что у элементов x и x' члены степеней, не больших n, совпадают. Следовательно, из эквивалентности (2) вытекает, что $dx'y = 0$. Степень элемента x' не превосходит k. Следовательно, $x' \in W_{\bar{d},k}$ и $\pi_n(x') \in W^{(n)}_{\bar{d},k}$. Поэтому $\bar{x} = \pi_n(x) = \pi_n(x') \in W^{(n)}_{\bar{d},k}$. Предложение доказано. □

Лемма 4.39. *Если для всех вершин $\bar{d}_i \in \Gamma(A)$ и для всех степеней k пространства $W^{(n)}_{\bar{d}_l,k}$ нулевые, то y не является правым делителем нуля.*

Доказательство. Если бы это было не так, то по лемме 4.35 существовали бы слово d_l и элемент x' такие, что $d_l x' y = 0$, и элемент x' имел бы ненулевой свободный член. По определению пространств $W_{\bar{d}_l,k}$, имеем $x' \in W_{\bar{d}_l,\deg x'}$. Но $\pi_n(x') \neq 0$, так как свободный член элемента x' отличен от нуля. Следовательно, $W^{(n)}_{\bar{d}_l,\deg x'} = \pi_n(W_{\bar{d}_l,\deg x'}) \neq 0$, что противоречит условию предложения. □

Построение алгоритма Для всех вершин $\bar{d}_i$, $i = 1, \dots, m$, минимального графа $\Gamma(A)$ алгебры A вычисляются пространства $V_{\bar{d}_i,k}$; число k последовательно принимает значения $1, 2, 3, \dots$. При каждом фиксированном k вычисляются проекции $V^{(n)}_{\bar{d},k}$ этих пространств в факторалгебре $A/A^{(n+1)}$ по идеалу, порожденному всеми словами степеней, больших n. Эти проекции конечномерны, и их размерность ограничена некоторым числом, не зависящим от k (а именно, максимальным числом различных путей в $\Gamma(A)$ длины, не большей n, выходящих из одной вершины). По лемме 4.36 пространства $V^{(n)}_{\bar{d},k}$ возрастают с ростом k. Пусть для некоторого $k = N$ наступает стабилизация: для всех вершин $\bar{d}_i$, $i = 1, \dots, m$, графа $\Gamma(A)$ выполняются равенства $V^{(n)}_{\bar{d},k} = V^{(n)}_{\bar{d},k-1}$. По предложению 4.37 пространства $V^{(n)}_{\bar{d},k}$ уже больше не будут возрастать с ростом k, начиная с $k = N$. По предложению 4.39 пространства $W^{(n)}_{\bar{d},k}$ также не будут больше возрастать. Вычислим для всех вершин d_i пространства $W_{\bar{d}_i,N}$. Если одно из них отлично от нуля, например $W_{\bar{d}_l,N} \neq 0$, то для некоторого ненулевого x имеем $d_l xy = 0$, и искомый делитель нуля равен $d_l x$. В противном случае все пространства $W^{(n)}_{\bar{d}_i,k}$ нулевые, и по лемме 4.39 элемент y не является правым делителем нуля.

Сложность алгоритма Построенный алгоритм имеет "полиномиальную сложность по модулю роста алгебры", т.е. если рост алгебры полиномиальный, то алгоритм также работает за полиномиальное время в зависимости от степени y. Если же рост экспоненциальный, то приведенный алгоритм имеет экспоненциальную сложность. Зависимость времени работы от числа вершин графа квадратичная.

Обозначим $n = \deg y$, $m = |\Gamma(A)|$, $r(n)$ — функция роста алгебры (т.е. число слов длины, не большей n).

Нетрудно получить явную оценку на степень аннулятора y. Суммарная размерность пространств $V_{\bar{d}_i,\,k}^{(n)}$ не превосходит $m\cdot r(n)$, следовательно, стабилизация всех этих пространств наступит не позже, чем через указанное число шагов. Пусть z — ненулевой аннулятор элемента y минимальной степени, т.е. $zy = 0$. Тогда $z = dx$, где $x \in W_{\bar{d}_i,\,k}$ и $k \le m \cdot r(n)$. Элемент d можно выбрать таким, чтобы его степень не превосходила числа вершин в $\Gamma(A)$ (элемент такой степени можно выбрать в любом классе эквивалентных слов алгебры A). Итак, имеем $\deg d \le m$, $\deg x \le m \cdot r(n)$. Следовательно,

$$\deg x \le m \cdot r(n) + m\ .$$

Отметим, что алгоритм проверки, является ли данный однородный элемент $\sum \lambda_i v_i$ делителем нуля значительно проще. Т. Гатева-Иванова показала, что в этом случае существует слово u, такое, что при всех i выполняется равенство: $uv_i = 0$.

4.5. Нетеровость

Предложение 4.40. *Автоматная алгебра является нетеровой справа тогда и только тогда, когда*

1) ее минимальный детерминированный граф $\Gamma(A)$ не имеет дважды циклических вершин, и

2) если $\Gamma(A)$ содержит циклы, то из них не выходит ни одного ребра. □

Следствие 4.41. *Нетерова автоматная алгебра является PI-алгеброй и либо имеет линейный рост, либо конечномерна.* □

Доказательство является несложным упражнением. Справедливо, однако, более сильное утверждение.

Теорема 4.42. *Мономиальная алгебра A является нетеровой справа тогда и только тогда, когда ее граф (дерево) правых умножений содержит лишь конечное число ветвлений.* □

Доказательство содержится в книге Ж.Окнинского [245].

Из этой теоремы и теоремы о периодичности вытекает

Следствие 4.43. *Нетерова справа мономиальная алгебра является автоматной.* □

Из следствий 4.43 и 4.41 получаем

Следствие 4.44. *Нетерова справа мономиальная алгебра является PI-алгеброй и либо имеет линейный рост, либо конечномерна.* □

В заключение дадим описание артиновых мономиальных алгебр.

Предложение 4.45. *Артиновы мономиальные алгебры конечномерны.*

Доказательство. Пусть A — артинова мономиальная алгебра. Занумеруем образующие некоторым множеством индексов. Из стабилизации убывающей цепочки идеалов, I_k порожденных всеми образующими A кроме как k первых, следует конечная порожденность A, а из стабилизации убывающей цепочки идеалов, A^k следует нильпотентность A. □

4.6. Представления мономиальных алгебр

Данный раздел посвящен представлениям мономиальных алгебр.

Необходимым условием представимости является выполнение теоремы о высоте. В этом случае при некотором h все слова алгебры имеют вид $u_1^{k_1}u_2^{k_2}\dots u_l^{k_l}$, где $l \le h$, а $\{u_i\}$ — фиксированый набор слов. Необходимое и достаточное условие представимости формулируется как условие на множество векторов степеней $\vec{k} = \langle k_1,\dots,k_l\rangle$. Оно означает, что множество таких $\langle k_1,\dots,k_l\rangle$, что $u_1^{k_1}\dots u_l^{k_l} = 0$, должно задаваться системой экспоненциальных диофантовых уравнений.

Далее мы изучаем многообразия, порожденные мономиальными алгебрами. Таковыми, к примеру, оказываются $M_n = \mathrm{Var}(A_u)$ и многообразие, порожденное верхнетреугольными матрицами. Рассмотрение этих многообразий нужно для комбинаторного использования сложности тождеств.

Для исследования описанных выше вопросов нам понадобится техника, связанная с заданием представлений графами, представлениями прямых сумм и тензорных произведений.

4.6.1. Операции над мономиальными алгебрами. Прямые суммы

Предложение 4.46. *Пусть A — мономиальная алгебра, $a_{11},\dots,a_{1k_1}$, $a_{21},\dots,a_{2k_2}$, $\dots$, a_{sk_s} — ее образующие. Положим $b_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}$. Тогда*

а) элементы $b_1,\dots,b_s$ порождают мономиальную алгебру;

б) слово $U(b_1,\dots,b_s) = 0$ в том и только том случае, когда для любой подстановки $b_i \to a_{ij}$ (для разных вхождений b_i могут подставляться a_{ij} с различными индексами j) результат подстановки есть 0.

Доказательство. Если подставить вместо b_i сумму $\sum_j a_{ij}$ и раскрыть скобки, то члены, соответствующие разным словам, не будут совпадать. Поэтому элементы b_i порождают мономиальную алгебру. Пункт б) следует из того, что все члены, получающиеся раскрытием скобок, различны, причем находятся во взаимно однозначном соответствии с указанными подстановками. □

Из этого предложения непосредственно следует

Предложение 4.47 (о диагональном вложении). *Пусть $A_j = \langle a_{j1}\dots a_{js}\rangle$ — мономиальные алгебры, $A = \oplus A_j$. Положим $a_i = \sum_j a_{ji}$. Тогда $a_1,\dots,a_s$ порождают мономиальную алгебру $\widehat{A}$, и множество нулевых слов в $\widehat{A}$ есть пересечение множеств нулевых слов в алгебрах A_j.*
□

Следствие 4.48. *Пусть A — мономиальная алгебра, $I_1,\dots,I_n$ — мономиальные идеалы. Тогда если для любого j алгебра A/I_j представима, то представима и алгебра $A/\cap_j I_j$.* □

Пусть Γ — граф мономиальной алгебры A. Пометим стрелки графа Γ разными буквами. Пусть это будут образующие новой алгебры A_Γ. Введем очевидное умножение: $b_1b_2 = 0$, если конец стрелки b_1 не совпадает с началом стрелки b_2, иначе имеем ненулевой моном. Тогда соответствие $a_i \to \sum b_i$ (b_i отвечают стрелкам, помеченным буквой a_i) дает вложение мономиальной алгебры A в алгебру A_Γ, которую мы будем называть Γ-*накрытием* алгебры A.

Предложение 4.49. *а) Пусть A — мономиальная алгебра, $\widehat{A}$ — ее Γ-накрытие. Тогда слову в алгебре A соответствует сумма слов в алгебре $\widehat{A}$, соответствующих его всевозможным расположениям в графе Γ.*

б) Если $\Gamma(A)$ получается из $\Gamma(A')$ расклейкой букв, то A вкладывается в A' и $\mathrm{Var}(A') \subseteq \mathrm{Var}(A)$.

в) Любая автоматная мономиальная алгебра вкладывается в конечно-определенную. □

Предложение 4.50. *а) Если каждое ненулевое слово в A' является ненулевым в A, то A' есть факотр-алгебра алгебры A и $\mathrm{Var}(A') \subseteq \mathrm{Var}(A)$. Стиранию стрелок в графе отвечает факторизация.*

б) Пусть Γ_i - связные компоненты графа Γ. Тогда имеется естественное вложение A_Γ в прямую сумму A_{Γ_i}. Многообразие $\mathrm{Var}(A_\Gamma)$ есть объединение $\mathrm{Var}(A_{\Gamma_i})$. □

(*Расположением* слова мы называем путь, ребра которого в порядке их прохождения помечены буквами данного слова. Если расположения нет, то слово нулевое. Для сверхслов ситуация аналогичная.)

Следующая конструкция связана с тензорным произведением. Тензорное произведение не определено в категории мономиальных алгебр (например, $k\langle x\rangle \otimes k\langle y\rangle \simeq k[x,y]$, а кольцо коммутативных многочленов от двух переменных не является мономиальной алгеброй). Поэтому в тензорном произведении надо выбирать подходящую подалгебру.

Предложение 4.51. *Пусть A_i, $i = 1,\dots,n$, — семейство мономиальных алгебр с образующими a_{ij}, $j = 1,\dots,s$. Рассмотрим подалгебру $\widehat{A}$ тензорного произведения $\otimes_i A_i$, порожденную элементами $a_{1j} \otimes a_{2j} \otimes \cdots \otimes a_{nj}$, $j = 1,\dots,s$. Тогда $\widehat{A}$ — мономиальная алгебра. Слово в A равно нулю в том и только том случае, когда оно равно нулю в одной из алгебр A_i.* □

Таким образом, идеал слов в алгебре $\widehat{A}$ есть сумма идеалов слов в алгебрах A_i.

Замечание. Если есть изоморфизм у ориентированных графов Γ_1 и Γ_2, (не обязательно сохраняющий разметку стрелок), то можно рассмотеть подпространство в тензорном произведении пространств канонических представлений Γ_1 и Γ_2, порожденное произведением соответствующих векторов. Разметим парами букв"тензорное произведение" стрелок. Получится каноническое представление мономиальной алгебры, образующие которой обозначены парами букв, отвечающих стрелкам Γ_1 и Γ_2. Можно также рассматривать подпространства тензорных произведений канонических представлений порожденное произведением векторов "сответствующих уровней" (в смысле порядка на сильно связных компонентах).

Если алгебры A_i представимы, то, беря тензорное произведение представлений, мы получаем

Предложение 4.52. *а) Рассмотрим алгебру $\widehat{A}$ и семейство алгебр A_i из предыдущего предложения. Пусть алгебры A_i представимы, W_i — соответствующие пространства представлений. Тогда алгебра $\widehat{A}$ также представима, и $\otimes W_i$ — пространство ее представления.*

б) Если A — мономиальная алгебра, $I_1,\dots,I_k$ — мономиальные идеалы (т.е. идеалы, порожденные наборами мономов), и алгебры A/I_j представимы, то алгебра $A/(I_1 + \cdots + I_k)$ также представима. □

Итак, для наборов нулевых слов, факторы по которым представимы, мы можем использовать операции пересечения, объединения и суммы.

Всюду ниже мы будем рассматривать только графы, не имеющие пересекающихся циклов. Как правило, различным стрелкам в графе будут соответствовать разные образующие мономиальной алгебры.

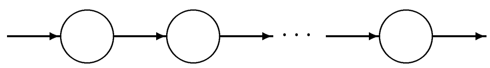
Предложение 4.53. *Пусть разным стрелкам в графе мономиальной алгебры соответствуют разные образующие. Тогда стиранию стрелки в графе соответствует факторизация по соответствующей образующей.* □

Определение 4.54. Две стрелки графа называются *параллельными*, если не существует пути, проходящего через обе эти стрелки.

Следующее предложение будет использоваться при осуществлении редукции.

Предложение 4.55. *Если $\Gamma(A)$ содержит параллельные стрелки, то соответствующая алгебра вкладывается в прямую сумму алгебр A_α, получающихся стиранием одной из стрелок. T-идеал тождеств алгебры A есть пересечение идеалов тождеств соответствующих алгебр, а многообразие, порожденное алгеброй A, — объединение соответствующих многообразий. Пусть I — мономиальный идеал в A такой, что для всякого α факторалгебра A_α/I представима. Тогда алгебра A/I тоже представима.* □

Ниже мы будем рассматривать *веточные* графы — т.е. графы без параллельных стрелок и без зацепляющихся циклов. Каждый такой граф имеет вид



.

Граф без параллельных ребер нильпотентной алгебры — это граф вида $\to\to\to\to\to\to$, а сама такая алгебра — это алгебра подслов конечного слова.

Напомним, что ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух вершин существует путь, ведущий из первой вершины во вторую. Легко убедится в том, что в *PI*-случае (т.е. когда нет зацепляющихся циклов) все сильно связанные компоненты графа без параллельных ребер суть циклы.

Мы будем рассматривать факторалгебры автоматных алгебр, которые перестают быть автоматными. При этом, однако, все равно будет использоваться техника графов.

4.7. Критерий представимости мономиальной алгебры

Если мономиальная алгебра представима, то она *PI*, и в ней выполняется теорема о высоте. Обратное, вообще говоря, неверно. (Например, алгебра с дробной размерностью Гельфанда—Кириллова не может быть представимой.) Мы дадим критерий представимости.

По теореме о высоте множество слов алгебры имеет вид $v_1^{k_1}v_2^{k_2}\ldots v_l^{k_l}$, где $l \le H$, H — высота алгебры, и v_i принадлежат конечному множеству слов. Таким образом, каждое слово алгебры A задается своим *типом* — упорядоченным набором $(v_1, \dots, v_l)$, и *вектором степеней* $\vec{k} = (k_1, \dots, k_l)$. При этом число различных типов конечно. Условие представимости суть условия на типы и векторы степеней. Назовем тип $(u_1, \dots, u_k)$ *подтипом* типа $(v_1, \dots, v_l)$, если последовательность $(v_1, \dots, v_l)$ имеет вид $(v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k, v_{m+k+1}, \dots, v_l)$. Иначе говоря, слова типа $(u_1, \dots, u_k)$ являются подсловами слов типа $(v_1, \dots, v_l)$ с указанием разбиения на степени. Мы считаем, что слова v_i нециклические (т.е. не являются степенями) и что несколько подряд идущих слов в типе $v_\alpha^{k_\alpha} \dots v_\beta^{k_\beta}$ не представимы в виде произведения меньшего числа степеней. (Это условие не только на v_i, но и на соответствующие степени k_i.)

Зафиксируем число N. Его в дальнейшем выберем достаточно большим. Назовем компоненту $v_i^{k_i}$ *существенной*, если $k_i > N$. Отметим, что из равенства существенной высоты размерности Гельфанда—Кириллова (теорема **??**) вытекает, что число существенных компонент при достаточно больших N равно размерности Гельфанда—Кириллова. Отметим в произведениях существенные компоненты. Представим слово $v_1^{k_1} \dots v_l^{k_l}$ в виде

$$D_0 v_{i_1}^{k_{i_1}} D_1 \dots v_{i_s}^{k_{i_s}} D_s,$$

где $k_{i_1}, \dots, k_{i_s} \geq N$ и D_α — произведения несущественных компонент. Выбор достаточно большого N гарантирует, что s не больше существенной высоты. Представление в таком виде может быть сделано однозначно. Для этого мы считаем v_i правильными (в указанном выше смысле) словами. Отметим, что степени не могут иметь больших перекрытий. Если слово представимо в виде $D_0 v_{i_1}^{k_{i_1}} \dots D_s$ несколькими способами, то выберем тот, который отвечает минимальному по длине D_0, затем — максимальному $v_{i_1}^{k_1}$, потом — минимальному D_2 и т.д. Полученное однозначное представление $(D_0, v_{i_1}, D_1, v_{i_2}, \dots, D_s)$ слова называется *существенным типом* (мы опускаем вектор степеней). Суммируем сделанные наблюдения и сформулируем некоторые полезные замечания.

Предложение 4.56. *При достаточно большом N каждому слову однозначно соответствует его существенный тип. Имеется конечное число различных существенных типов. Подтип существенного типа $(D_0, v_1, \dots, v_s, D_s)$ имеет один из следующих видов: $(v_i, D_i, \dots, v_j)$, $(v_i, \dots, D''_j)$, $(D'_{i-1}, v_i, \dots, v_j)$, $(D'_{i-1}, \dots, v_j, D''_j)$, где D'_{i-1} — конец $v_{i-1}^{k_{i-1}} D_i$, а D''_j — начало $D_j v_{j+1}^{k_{j+1}}$. Каждое слово подтипа является подсловом слова данного типа. Каждому существенному типу соответствует граф без параллельных ребер такой, что все слова этого типа получаются как пути в графе. При этом v_i соответствуют циклам, а D_j — путям, их соединяющим.* $\square$

Теперь мы можем сформулировать критерий представимости.

Теорема 4.57. *Мономиальная алгебра A представима в том и только том случае, когда A имеет ограниченную высоту и векторы степеней удовлетворяют выполняются следующим условим.*

1. Для каждого существенного типа задана конечная система экспоненциальных диофантовых уравнений на показатели степеней существенных компонент. При этом

$$D_0 v_{i_1}^{k_1} D_1 \dots v_{i_s}^{k_s} D_s = 0$$

в том и только том случае, когда выполняются все эти уравнения

$$P_{\alpha,t}(k_1,\ldots,k_s)=0$$

(через t мы обозначили существенный тип $(D_0, v_{i_1},\ldots,v_{i_s}D_s)$).

2. Если P_α — система уравнений для подтипа, то ей соответствует система уравнений для типа.

Доказательство. Сначала докажем необходимость (и заодно проясним условие теоремы). Последнее условие означает, что если слово имеет нулевое подслово, то оно равно нулю. О необходимости выполнения теоремы о высоте уже говорилось выше.

Чтобы показать, как из условия равенства слова нулю вытекает выполнение системы экспоненциальных диофантовых уравнений, нам понадобится следующее

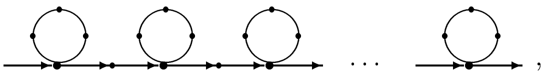
Предложение 4.58. *Пусть A — квадратная матрица. Тогда (ij)-я компонента ее степени A^n для любого n имеет вид $\sum_{i=1}^k \lambda_i^n P_i(n)$, где λ_i — элемент из конечного алгебраического расширения K основного поля $P_i \in K[x]$.*

Доказательство. Данное предложение есть непосредственное следствие теоремы о жордановой клетке. □

Таким образом, равенство нулю слова данного типа означает равенство нулю всех компонент соответствующего оператора, и необходимость условий теоремы получается из раскрытия скобок.

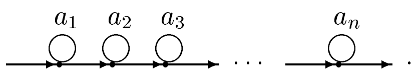
Перейдем к *доказательству достаточности.* Пусть выполняется условие теоремы. Наша алгебра есть факторалгебра алгебры, граф которой состоит из несвязанных кусков, отвечающих разным типам. В силу соображений, связанных с прямым произведением, достаточно рассмотреть случай графа одного типа и соответствующих этому типу уравнений. Предложение 4.49 сводит задачу к случаю графа, все стрелки которого помечены разными буквами. Наконец, предложение 4.52 позволяет ограничиться случаем одного уравнения. Итак, наша задача свелась к следующей.

Пусть A — алгебра графа вида



все стрелки которого помечены разными буквами, $P(k_1,\ldots,k_s)$ — произвольный экспоненциальный диофантов полином от $k_1,\ldots,k_s$. Пусть I — идеал, порожденный словами, в которых первый цикл пройден k_1 раз, второй — k_2 раз и т.д., причем $P(k_1,\ldots,k_s)=0$. Докажем, что тогда факторалгебра A/I представима.

Сведем сначала это утверждение к случаю графа с единичными петлями и единичными стрелками, соединяющими петли. Пусть мы построили представление, отвечающее факторалгебре графа

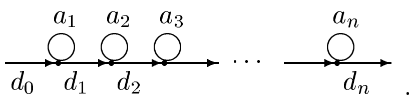


Пусть V — пространство представления. Обозначим через $W_i \subset V$ образ оператора, соответствующего элементу a_i. Рассмотрим прямую сумму пространства V и пространств $W_i^1,\ldots,W_i^l$, изоморфных подпространству W_i, и определим операторы a_i^0, $a_i^1, \ldots, a_i^l$: a_i^j при $1 \leq j < n$ суть изоморфизмы W_i^j на W_i^{j+1}; на остальных компонентах представления они действуют нулевым образом. Оператор a_i^0 есть композиция a_i и изоморфизма W_i на W_i^1; наконец, оператор a_i^l есть изоморфизм W_i^l на W_i. Тогда произведение операторов $a_i^0 a_i^1 \ldots a_i^l$ действует на пространстве V так же, как и оператор a_i, т.е. прохождение цикла соответствует применению оператора a_i.

С помощью аналогичной процедуры можно легко добиться того, чтобы циклы были соединены путями единичной длины.

Подведем предварительный итог. Доказательство свелось к следующей лемме.

Лемма 4.59 (о представлении). *Рассмотрим граф* Γ *следующего вида*



Пусть $P(k_1, \ldots, k_n)$ *— произвольный экспоненциальный диофантов полином от переменных* $k_1, \ldots, k_n$. *Пусть* I *— идеал, порожденный элементами вида* $d_0 a_1^{k_1} d_1 a_2^{k_2} \ldots d_{n-1} a_n^{k_n} d_n$ *такими, что* $P(k_1, \ldots, k_n) = 0$. *Тогда алгебра* A_Γ / I *представима.*

В доказательстве мы будем использовать технику обобщенных графов.

4.7.1. Обобщенные графы

Обобщенные графы будут использоваться нами для построения примеров представимых (но не автоматных!) мономиальных алгебр с заданными свойствами.

Определение 4.60.
1. Ориентированный граф, вершины которого помечены буквами a_i и числами λ_i, называется *обобщенным.*

2. *Алгебра обобщенного графа* (и ее представление) строится следующим образом:

1) вершинам графа соответствуют базисные векторы пространства представления;

2) каждой букве a_i соответствует своя трансцендентная константа $\bar{a}_i$, не зависящая от расположения этой буквы в графе;

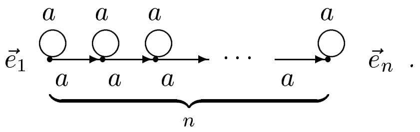
3) стрелке, соединяющей i-ю вершину с j-й, помеченной буквой a_k и числом λ_s, соответствует оператор $\bar{a}_k \lambda_s E_{ij}$ (где E_{ij} — матричная единица, т.е. оператор, переводящий i-й базисный вектор e_i в j-й);

4) каждой образующей a_i соответствует сумма операторов, отвечающих стрелкам, на которых она написана (если из вершины не выходит стрелка, помеченная буквой a_i, то действие оператора на соответствующий базисный вектор нулевое, поэтому, если $\lambda = 0$, то стрелку можно стереть);

5) если на стрелке не написано никакое число λ, то оно по умолчанию полагается равным единице.

Рассмотрим жорданову клетку A. Как связано изображение операторов A и A^k с помощью обобщенных графов?

Предложение 4.61. *Рассмотрим следующий обобщенный граф*



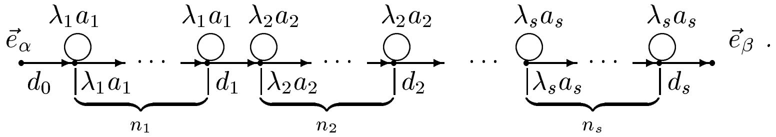
Обозначим через A оператор, соответствующий образующей a. Тогда оператору A^k соответствует граф, у которого на стрелках, соединяющих вершины $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$, где $i < j$, написаны числа $\binom{k}{j-i}\overline{A^k}$, где $\overline{A^k} = \bar{a}^k$ — соответствующая трансцендентная константа (мы полагаем $\binom{k}{0} = \binom{k}{n} = 1$, $\binom{k}{n} = 0$ при $n > k$).

Доказательство. Данное утверждение есть перевод на язык графов хорошо известного утверждения о степени жордановой клетки (которое нетрудно доказать, например, по индукции). □

Нас будет интересовать стрелка, соединяющая крайние вершины $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_n$. На ней написано $\binom{k}{n-1}\bar{a}^k$. Если бы на всех стрелках графа из условия предложения было дополнительно написано число λ, то на интересующей нас стрелке было бы написано $\lambda^k\binom{k}{n-1}\bar{a}^k$. Трансцендентные константы нам нужны для обеспечения однородности по каждой переменной.

Следующее предложение есть непосредственное следствие предыдущего.

Предложение 4.62. *Рассмотрим алгебру, заданную обобщенным графом*



Пусть образующим d_i соответствуют операторы D_i, образующим a_i — операторы A_i, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда

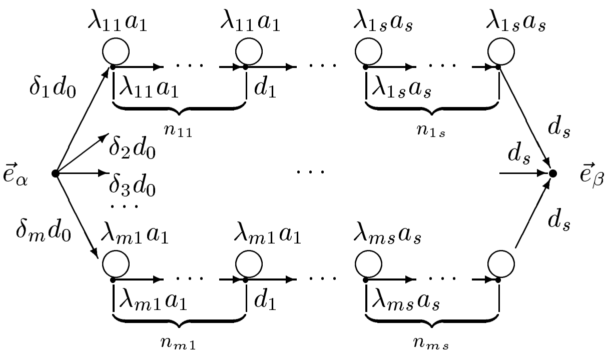
$$D_0 A_1^{k_1} D_1 A_2^{k_2} \ldots D_{s-1} A_s^{k_s} D_s = E_{\alpha\beta} \cdot \bar{d}_0 \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{k_i} \binom{k_i}{n_i - 1} \bar{a}_i^{k_i} \bar{d}_i \quad ,$$

где через $E_{\alpha\beta}$ обозначена матричная единица. □

Предложение 4.63. *Полиномы вида $\binom{k_1}{n_1-1}\binom{k_2}{n_2-1}\ldots\binom{k_s}{n_s-1}$ для всевозможных наборов $n_1, \ldots, n_s$ образуют базис в пространстве всех полиномов $K[k_1, \ldots, k_s]$. Полиномы с экспонентами $\lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_s^{k_s}\binom{k_1}{n_1-1}\ldots\binom{k_s}{n_s-1}$ образуют базис в пространстве полиномов с экспонентами.* □

Замечание. Полиномы $\binom{k_1}{n_1-1}\binom{k_2}{n_2-1}\ldots\binom{k_s}{n_s-1}$ суть $\mathbb{Z}$-базис полиномов от переменных $k_1, \ldots, k_s$, принимающих в целых точках целые значения.

Предложение 4.64. *а) Пусть задан обобщенный граф:*



Пусть образующим a_i соответствуют операторы A_i, образующим d_i — операторы D_i. Тогда

$$D_0A_1^{k_1}D_1A_2^{k_2}\dots A_s^{k_s}D_s = E_{\alpha\beta}\cdot\left(\bar{d}_0\prod_{j=1}^{s}\bar{a}_j^{k_j}\bar{d}_j\right)\cdot\sum_{i=1}^{m}\delta_i\prod_{j=1}^{s}\lambda_{ij}^{k_j}\binom{k_j}{n_{ij}-1}.$$

Таким образом, $D_0A_1^{k_1}D_1\dots A_s^{k_s}D_s = 0$ тогда и только тогда, когда $P(k_1,\dots,k_s)=\sum_{i=1}^{m}\delta_i\prod_{j=1}^{s}\lambda_{ij}^{k_j}\binom{k_j}{n_{ij}-1}=0$.

б) Любому слову, имеющему расположение в этом графе, кроме, возможно, некоторых слов, соединяющих вершины $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$, соответствует ненулевой оператор. Ненулевые операторы, соответствующие разным словам, линейно независимы. □

Предложение 4.64 позволяет соорудить любую линейную комбинацию из произведений биномиальных коэффициентов, а предложение 4.63 показывает, что таким образом можно получить любой экспоненциальный диофантов полином. Это доказывает лемму о представлении, что завершает доказательство критерия представимости.

4.7.2. Применения критерия представимости

Мы воспользуемся критерием представимости для доказательства автоматности представимой алгебры, размерность Гельфанда—Кириллова которой равна единице, а также для построения примеров представимых мономиальных алгебр с патологическими свойствами.

Теорема 4.65. *Представимая мономиальная алгебра над полем характеристики нуль, размерность Гельфанда—Кириллова которой равна единице, является автоматной, а ее ряд Гильберта рационален.*

Доказательство. Данная теорема вытекает из теоремы о совпадении существенной высоты с размерностью Гельфанда—Кириллова, критерия представимости и следующей теоремы.

Теорема 4.66. *Множество целочисленных нулей экспоненциально-полиномиального диофантового уравнения над полем характеристики нуль есть объединение конечного множества точек и конечного набора арифметических прогрессий.*

Доказательство. Теорема доказывается методом Сколема (см. [25]) Мы приведем вспомогательные факты из алгебры и теории чисел.

1. Из набора элементов $\{\lambda_i\}$ поля (т.е. параметров, связанных с изучаемым уравнением) можно выбрать максимальный набор алгебраически независимых элеметов $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, именуемый *базисом трансцендентности.* Каждое λ_i является корнем алгебраического уравнения вида $P_{i0}\lambda_i^n + \dots + P_{in} = 0$, где все P_{ij} суть значения многочленов с целыми коэффициентами от $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Любое отображение базиса трансцендентности в набор алгебраически независимых элементов поля H продолжается до гомоморфизма поля $\mathbb{Q}(\{\lambda_i\})$ в некоторое конечное алгебраическое расширение поля H.

2. Возьмем достаточно большое простое число p такое, что для некоторого набора остатков $\{\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_k\}$ все полиномы $P_{in_i}(\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_k)$, $P_{i0}(\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_k) \neq 0$ (т.е. обеспечим, чтобы p не входило в знаменатель). Возьмем алгебраически независимые над $\mathbb{Z}$ p-адические числа $\{\lambda_1', \dots, \lambda_k'\}$ с остатками по модулю p, равными $\{\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_k\}$ соответственно. Тогда отображение $\lambda_i \to \lambda_i'$ продолжается до вложения $\mathbb{Z}[\{\lambda_i\}]$ в некоторое конечное алгебраическое расширение $\mathbb{H}$ кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. При этом образы $P_{js}(\lambda_i)$ не принадлежат главному идеалу $\mathbb{H}_p$ кольца $\mathbb{H}$. Пусть m — степень $\mathbb{H}$ над $\mathbb{Z}_p$.

3. Если λ не принадлежит идеалу $\mathbb{H}_p$, то $\lambda^{p^m-1} - 1 \in \mathbb{H}_p$. В этом случае функция t^x, где $t = \lambda^{p^m-1}$, аналитична по x.

4. Любое конечное расширение $\mathbb{H}$ кольца целых p-адических чисел компактно.

5. Аналитическая функция f, имеющая бесконечно много нулей в $\mathbb{H}$, тождественно равна нулю. (Множество нулей имеет предельную точку, в которой f имеет нулевой ряд Телора.)

Перейдем к доказательству. Пусть $r = p^m - 1$. Перейдем с помощью шагов 1–2 к кольцу $\mathbb{H}$. Разобьем множество показателей степеней $\mathbb{N}$ на r арифметических прогрессий с шагом r. Каждая такая прогрессия P_i отвечает уравнению с основаниями степеней λ_i^r (т.к. показатель степени меняется с шагом r). Левая часть этого уравнеия аналитична. Поэтому P_i либо содержит только конечное число нулей, либо вся нулевая. □

То обстоятельство, что доказанная теорема в случае ненулевой характеристики неверна, позволяет привести пример мономиальной полугруппы, представимой над полем характеристики p и не представимой над полем характеристики 0. Рассмотрим уравнение на $x \in \mathbb{N}$: $(1+t)^x - t^x - 1 = 0$, t — трансцендентный элемент. Основания степеней лежат в поле характеристики p. Его решения суть $x = p^k$. Поэтому полугруппа с соотношениями $AC = DA = DC = CD = 0$, $CA^nD = 0$ при $n = p^k$ в соответствии с критерием представимости представима над полем характеристики p, но не представима над полем характеристики 0 по предыдущей теореме. Выпишем матричные элементы ее представления:

$$\begin{array}{ll} A: & (1+\lambda)aE_{11} + \lambda a E_{22} + aE_{33}, \\ C: & c(E_{01} - E_{02} - E_{03}), \\ D: & d(E_{14} + E_{24} + E_{34})\ . \end{array}$$

Ряд Гильберта соответствующей мономиальной алгебры трансцендентен. Можно показать, что данная алгебра не представима над полем характеристики, отличной от p.

Приведем пример представимой над полем характеристики 0 мономиальной алгебры с размерностью Гельфанда—Кириллова 2. Известно, что все решения уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1(d \neq k^2$ имеют вид (x_n, y_n): $x_n + \sqrt{d}y_n = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n$, где (x_0, y_0) — минимальное решение. Множество решений имеет логарифмическую плотность, и ряд Гильберта указанной ниже алгебры трансцендентен:

$$\begin{aligned}
&CA^xB^yD = 0, \quad \text{если } x^2 - dy^2 = 0,\\
&C^2 = D^2 = AC = BC = DC = DB = DA = 0,\\
&BA = AD = CB = CD = 0\ .
\end{aligned}$$

(Это алгебра подслов множества слов вида CA^xB^yD, где $x^2 - dy^2 \neq 0$)

Итак, вопрос о представимости мономиальной алгебры сводится к следующей проблеме: является ли данное множество множеством нулей некоторого экспоненциального диофантового полинома от нескольких переменных. Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима. Алгоритмически неразрешима также проблема распознавания наличия натурального нуля у такого полинома. Поэтому справедлива следующая

Теорема 4.67. *Проблема изоморфизма и проблема равенства рядов Гильберта двух мономиальных подалгебр матричных алгебр алгоритмически неразрешимы.* □

Можно ограничиться матрицами размера 1000×1000 над $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_9]$.

Замечания. Свойство нулей аналитической функции (не тождественоо равной нулю) не иметь предельных точек есть специфика случая одной переменной. Известно, что задача отыскания решения системы диофантовых уравнений от двух переменных алгоритмически разрешима. Если обобщить этот результат на экспоненциальные диофантовы уравнения, то мы получим алгоритмическую разрешимость проблем, связанных с представимыми мономиальными алгебрами размерности Гельфанда—Кириллова 2.

5. Многообразия мономиальных алгебр

Многообразием мономиальных алгебр мы называем многообразие алгебр, порожденное некоторым множеством мономиальных алгебр. Мы покажем, что каждое такое многообразие порождается одной конечно определенной алгеброй с графом без параллельных ребер специального вида: каждая стрелка, имеющая общую вершину с циклом, помечена буквой, которая нигде больше не встречается. Далее мы получим описание унитарно замкнутых многообразий мономиальных алгебр. Это суть многообразия, порожденные прямыми суммами полупрямых произведений матричных алгебр разного размера. Мы пользуемся техникой пополнения алгебр и техникой преобразования графов. Эти техники заслуживают внимания, вероятно, большего, чем сами результаты данной главы.

Через многообразия мономиальных алгебр проходит мост, связывающий структурные свойства тождеств и комбинаторику слов. Вот общая схема рассуждений: тождество f не выполняется в многообразии $\Longrightarrow$ f не выполняется в "тестовой" мономиальной алгебре $A \Longrightarrow$ некоторое слово в произвольной алгебре, графически совпадающее со словом из A, с помощью тождества f переводится в линейную комбинацию других слов. Последнее дает возможность осуществлять приведение. Мы применим этот подход для алгебры матриц и алгебры верхнетреугольных матриц, а также докажем леммы, нужные для параграфа 2.2. Говоря о словах из $\mathrm{Wd}(A)$, мы говорим о словах, графически совпадающих со словами алгебры A.

Предложение 5.1. *а) Пусть f — тождество, не выполняющееся в мономиальной алгебре A, B — произвольная алгебра с теми же именами образующих. Тогда существует слово u из $\mathrm{Wd}(A)$ в алгебре B, линейно представимое по модулю $T(f)$ словами, не равными u.*

б) Пусть f — полилинейное тождество вида $\sum_{\sigma\in S}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(p)}$; $\alpha_\sigma\in F$. Тогда существуют слова $v_1,\dots,v_p$ из $\mathrm{Wd}(A)$ и коэффициенты $\beta_\sigma\in S_p$ такие, что

$$\begin{aligned}&V=v_1v_2\dots v_p\in \mathrm{Wd}(A),\\ &v_1v_2\dots v_p\equiv \textstyle\sum_{V_\sigma\neq V}\beta_\sigma V_\sigma \pmod{T(f)}, \quad \textit{где}\\ &V_\sigma=v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}\dots v_{\sigma(p)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Взяв фактор по словам не из $\mathrm{Wd}(A)$, мы сведем доказательство к случаю самой алгебры A. Последний очевиден. □

Отметим, что зачастую обеспечивается линейная представимость w словами не из $\mathrm{Wd}(A)$.

Предложение 5.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — унитарно замкнутое многообразие, f — произвольное тождество степени p, v_i, v_i' — слова, свободные от переменных x_i. Тогда выполнимость тождества $f(x_1,\dots,x_p)$ в многообразии $\mathfrak{M}$ равносильна выполнимости тождества $f(v_1x_1v_1',\dots,v_px_pv_p')$.*

Доказательство. Достаточно подставить единицу вместо переменных, входящих в v_i и v_i'. □

Следствие 5.3. *Пусть $\mathrm{Var}(A)$ — унитарно замкнутое многообразие. Тогда слова v_i в равенстве (3) могут быть выбраны одновременно сколь угодно длинными.*

Итак, "вычеркивания и приписки" (см. лемму 2.5) являются комбинаторным аналогом унитарной замкнутости. Воспользуемся полученными утверждениями для матричной алгебры и для алгебры верхнетреугольных матриц. Следующее предложение используется в параграфе 2.2.

Предложение 5.4. *Пусть u — нециклическое слово длины n, и пусть f — полилинейное тождество сложности меньше n и степени p. Тогда существует подслово t в сверхслове u^∞, представимое в виде $t=t_0\dots t_{p+1}$, где длины подслов t_i находятся в пределах $2n\le|t_i|\le 3n$; при этом слово t представимо также в виде линейной комбинации слов вида $t_\sigma=t_0t_{\sigma(1)}\dots t_{\sigma(p)}t_{p+1}$, не входящих в сверхслово u^∞.*

Доказательство. По теореме 4.22 $\mathrm{Var}(A_u)=\mathbb{M}_n$. Применим предыдущее следствие к алгебре A_u и заметим, что по предложению 5.1, если $t_\sigma\neq t$, то $t_\sigma\notin \mathrm{Wd}(A_u)$. Выполнения неравенств $2n\le t_i\le 3n$ добиваемся с помощью леммы 2.5 о вычеркиваниях и приписках. □

Замечание. Рассуждения из предложения 5.1 сами по себе неконструктивны. Конструктивность достигается с помощью "вычеркиваний и приписок".

Определение 5.5. Рассмотрим нематричное многообразие $\mathfrak{M}$, порожденное конечно порожденной алгеброй. *Сложностью Латышева* $\mathrm{Lat}(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ называется максимальное n такое, что алгебра верхнетреугольных матриц $\mathbb{T}_n$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Сложностью Латышева $\mathrm{Lat}(A)$ конечно порожденной алгебры A называется сложность порождаемого ею многообразия $\mathrm{Var}(A)$ (в том случае, если $\mathrm{Var}(A)$ нематричное).

Пусть алгебра A имеет вид

$$A = F\langle x, c_1, \dots, c_n\rangle / \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{id}(c_i)^2 + \mathrm{id}(c_1, \dots, c_n)^n\right).$$

Она мономиальна и $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(\mathbb{T}_n)$. Воспользовавшись следствием 5.3, получаем

Предложение 5.6. *Если в алгебре A выполняется тождество f, которое не выполняется в многообразии $\mathbb{T}_{n+1}$, то в A выполняется тождество слабой (а следовательно, в силу предложения **??**, и сильной) алгебраичности порядка не выше n.*

Это дает возможность перекачивать n степеней одного и того же слова в меньшее число степеней (см. пункт **??**). Следующее предложение полезно при оценке размерности Гельфанда—Кириллова.

Предложение 5.7. *а)* $\mathrm{GKdim}(A) \le S\cdot\mathrm{Lat}(A)$, *где S — минимальное число элементов s-базиса.*

б) Пусть A — конечно порожденная алгебра, порождающая нематричное многообразие. Тогда в алгебре A выполняется сильная алгебраичность порядка $\mathrm{Lat}(A)$ *и не выполняется слабая алгебраичность порядка* $\mathrm{Lat}(A) - 1$.

Доказательство. Пункт а) следует из предложения 5.6 и процедуры перекачки: всякий элемент алгебры линейно представим словами вида $d_0 v_{i_1}^{e_1} d_1 v_{i_2}^{e_2} \dots d_{h-1} v_{i_h}^{e_h} d_h$, где все слова d_i имеют ограниченную степень, слова v_{i_j} принадлежат s-базису, и для каждого элемента v из s-базиса среди слов v_{i_j} может быть не более $\mathrm{Lat}(A)$ слов, равных v. Отсюда вытекает, что $h \le S \cdot \mathrm{Lat}(A)$.

Пункт б) следует из предложения 5.6 и из того, что в $\mathbb{T}_n$ не выполняется сильная алгебраичность порядка $\mathrm{Lat}(A) - 1$. □

Итак, сложность Латышева и просто сложность многообразий определяются в терминах мономиальных алгебр. Интересно, что более общие "сложности" возникали в работах, посвященных проблеме Шпехта. Эти сложности соответствуют полупрямым произведениям матричных алгебр, т.е. многообразиям, порожденным унитарно замкнутыми мономиальными алгебрами.

5.1. Редукция к конечно порожденному случаю

Предложение 5.8. *Пусть в мономиальной алгебре A выполняется полилинейное тождество степени m. Тогда*

а) все слова, содержащие m различных образующих, нулевые;

б) $\mathrm{Var}(A)$ порождается $(m-1)$-порожденными алгебрами и имеет базисный ранг не выше $m-1$.

Следствие 5.9. *Многообразие, заданное тождеством $x^n = 0$, а также многообразие, порожденное алгеброй Грассмана, не порождаются мономиальными алгебрами.* □

Переходя к прямой сумме этих $(m-1)$-порожденных алгебр и применяя диагональное вложение (см. предложение 4.47), имеем следующую теорему.

Теорема 5.10. *Если в многообразии мономиальных алгебр $\mathfrak{M}$ выполняется тождество степени m, то существует $(m-1)$-порожденная мономиальная алгебра A такая, что $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\mathfrak{A})$.* □

Теорема 5.11. *Любое многообразие $\mathfrak{M}$ мономиальных алгебр порождается автоматной алгеброй.*

5.2. Описание многообразий автоматных алгебр в терминах графов

Определение 5.12. Граф называется *замечательным*, если он конечен и связен, не имеет параллельных ребер, входные и выходные вершины циклов совпадают и каждая стрелка, имеющая общую вершину с циклом, помечена буквой, которая нигде больше не встречается. Граф называется *кусочно замечательным*, если он конечен, каждая связная компонента замечательна, и стрелки из разных компонент помечены разными буквами. (В таком графе все циклы неприводимы.)

Предложение 5.13. *Любой кусочно замечательный граф задает конечно определенную алгебру.* □

Наша ближайшая цель — доказать следующую теорему.

Теорема 5.14. *Любое многообразие $\mathfrak{M}$ мономиальных алебр порождается алгеброй некоторого кусочно замечательного графа.*

Иными словами, $\mathfrak{M}$ есть конечное объединение многообразий, заданных алгебрами замечательных графов.

Следствие 5.15. *Любое многообразие мономиальных алгебр порождается конечно определенной алгеброй.* □

Дадим другую формулировку данной теоремы.

Теорема 5.16. *Каждое унитарно замкнутое многообразие мономиальных алгебр представляется в виде конечного объединения многообразий вида*

$$\mathbb{M}_{n_1}\mathbb{M}_{n_2}\ldots\mathbb{M}_{n_k}.$$

Здесь через $\mathbb{M}_{n_i}$ обозначено многообразие, порожденное алгеброй матриц размера n_i, произведение многообразий определяется через произведение T-идеалов (ему отвечает полупрямое произведение алгебр). □

Предложение 5.17. *Алгебра, заданная кусочно-замечательным графом порождает унитарно-замкнутое многообразие $\iff$ она может быть задана кусочно-замечательным графом, все соседние циклы в котором близки и нет перемычек: входящей в начальный цикл и выходящей из финального.* □

Замечание. По сути дела, через многообразия вида $\mathbb{M}_{n_1}\mathbb{M}_{n_2}\ldots\mathbb{M}_{n_k}$ в работах, посвященных проблеме Шпехта, определялась обобщенная сложность. Если все $n_k=1$, то мы имеем сложность Латышева; если $k=1$, то мы имеем обычную сложность.

Все оставшиеся трудности, относящиеся к многообразиям мономиальных алгебр, связаны с перешейками. Представляются интересными следующие вопросы.

1. Провести аналогичные рассмотрения представлений мономиальных алгебр произвольных графов (в том числе с зацепляющимися циклами). Как кстроено замыкание по Зарисскому представлений? К какому более удобному виду Γ' можно привести граф Γ, чтобы при этом алгебры канонических представлений графов Γ и Γ' имели бы изоморфные центральные расширения?

2. Привести пример многообразия мономиальных алгебр, не получающегося с помощью операций пересечения, объединения, а также произведения T-идеалов из нильпотентных и матричных многообразий.

3. Свести описание многообразий мономиальных алгебр к изучению обобщенных многообразий мономиальных алгебр (часть переменных, отвечающих циклам, служит коэффициентами обобщенных тождеств), и упростить таким образом доказательство основной теоремы.

4. Исследовать многообразие, порожденное нильпотентными мономиальными алгебрами ограниченного индекса, — в частности, многообразие, порожденное конечным подсловом сверхслова u^∞.

5. Разработать алгоритм проверки того, что две автоматные алгебры порождают одно и то же многообразие.

6. Лиева нильпотентность: распознавание и проблема равенства

В этой главе рассматриваются ассоциативные алгебры с тождеством лиевой нильпотентности. Алгоритмы, рассмотренные здесь, следуют общей теории базисов Грёбнера.

Пусть, как и выше, $K\langle X\rangle$ обозначает свободную ассоциативную алгебру над полем K со свободными порождающими $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Множество X порождает также относительно операции коммутирования $[y_1,y_2]=y_1y_2-y_2y_1$ *свободную алгебру Ли* $K_0\langle X\rangle^{(-)}$ над полем K. Мы считаем, что пустое слово 1 принадлежит $\langle X\rangle$. *"Длинный" коммутатор* (правонормированное произведение) определяется по индукции: $[y_1,\ldots,y_r]=[[y_1,\ldots,y_{r-1}],y_r]$. Длинный коммутатор можно рассматривать как "неассоциативный моном". Элементы алгебры Ли $K_0\langle X\rangle^{(-)}$ мы будем называть *лиевыми элементами* свободной ассоциативной алгебры $K\langle X\rangle$. Элементы, представимые в виде линейной комбинации произведений длинных коммутаторов, называются *собственными элементами.* Например, лиевы элементы являются собственными. Хорошо известно, что всякий вполне характеристический идеал (T-идеал) порождается собственными элементами. (Мы предполагаем в этой главе, что характеристика поля равна нулю.) Предполагается, что читатель знаком с понятием *базиса Грёбнера.* Необходимый материал можно найти в книгах по компьютерной алгебре. Алгебра A называется s.f.p. (standard finitely presented — *стандартно конечно определенной*) алгеброй, если ее идеал определяющих соотношений порождается базисом Грёбнера с конечным числом элементов. Очевидно, это влечет разрешимость проблемы равенства в A. Свойство P алгебры называется *распознаваемым*, если существует алгоритм проверки, обладает ли s.f.p. алгебра A свойством P. Свойство лиевой нильпотентности алгебры A означает, что для некоторого r в ней выполняется полиномиальное тождество $[y_1, \dots , y_r] = 0$. Коммутаторный идеал в такой алгебре нильпотентен индекса $q \leq q(r, n)$, где n — число порождающих алгебры A, и функция $q(r, n)$ может быть вычислена алгоритмически.

Теорема 6.1. *Лиева нильпотентность фиксированного индекса r — алгоритмически распознаваемое свойство.*

Доказательство. Рассмотрим следующие типы собственных элементов, принадлежащих T-идеалу $T^{(r)} \lhd K\langle X\rangle$, порожденному длинным коммутатором $[y_1, \dots , y_r]$ (как и выше, через q мы обозначаем индекс нильпотентности идеала, порожденного коммутаторами, в алгебре $K\langle X\rangle/T^{(r)}$):

$$\begin{array}{ll} (i) & [x_{i_1}, \dots , x_{i_r}]; \\ (ii) & [x_{i_1}, \dots , x_{i_{s_1}}] \dots [x_{j_1}, \dots , x_{j_{s_q}}]; \\ (iii) & \{f_1, \dots , f_t\} \text{ — базис линейного подпространства в } \\ & T^{(r)}, \text{ порожденного собственными элементами сте-} \\ & \text{пени } \leq D = \max\{q(r-1), r\}. \end{array} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что эти элементы порождают $T^{(r)}$ как идеал. Таким образом, алгебра $A = K\langle a_1, \dots , a_n\rangle$ с n образующими a_i удовлетворяет полиномиальному тождеству $[y_1, \dots , y_r] = 0$ тогда и только тогда, когда собственные полиномы (4) обращаются в нуль при всех подстановках элементов a_j вместо x_i. Это дает искомый алгоритм распознавания. □

Многообразие $V^{(r)}$ лиево нильпотентных алгебр индекса r является конечно аппроксимируемым, поэтому проблема равенства разрешима в нем. Однако мы хотим показать, что эта проблема разрешима с помощью алгоритма, использующего понятие базиса Грёбнера.

Разумеется, рассматриваемая задача эквивалентна проблеме принадлежности элемента идеалу в свободной алгебре A многообразия $V^{(r)}$, которая представляет собой факторалгебру $A \cong K\langle X\rangle/T^{(r)}$, т.е. она конечно определена, и некоммутативные многочлены (4) являются ее определяющими соотношениями. Пусть $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/T^{(r)}$ — естественный эпиморфизм. Образ $L = \varphi(k_0\langle X\rangle^{(-)})$ свободной алгебры Ли $k_0\langle X\rangle^{(-)}$ в A конечномерен, потому что все однородные лиевы элементы степени $\geq r$ принадлежат T-идеалу $T^{(r)}$. Если $\xi_1 = \varphi(g_1), \dots , \xi_m = \varphi(g_m) \in L$ — базис алгебры Ли L, $g_i \in k_0\langle X\rangle^{(-)}$, $m = \dim L$, то элементы g_i могут быть выбраны таким образом, что $g_1 = x_1, \dots , g_n = x_n$ и $g_{n+1}, \dots , g_m$ — однородные лиевы элементы степени, меньшей r. Поскольку T-идеал $T^{(r)}$ однороден, элементы g_i могут быть найдены при помощи “линейных процедур”. В то же время мы выразили все ξ_i как некоторые (лиевы) полиномы от $\xi_1, \dots , \xi_n$ и вычислили структурные константы алгебры L в этом базисе.

Пусть U_L — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли L и $e_1, \dots, e_n$ — соответственно копии элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ в U_L. Конечно, элементы $e_1, \dots, e_n$ порождают U_L. Имеется два канонических эпиморфизма, ассоциированных с U_L. Во-первых, это эпиморфизм алгебр $\psi : k\langle X\rangle \to U_L$, продолжающий отображение множеств $\psi : X \to U_L$, $\psi(x_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Во-вторых, это эпиморфизм алгебр $\theta : U_L \to A$, при котором $\theta(e_i) = \xi_i$, $i = 1, \dots, n$. Диаграмма эпиморфизмов

$$\begin{tikzcd} k\langle X\rangle \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U_L \arrow[d, "\theta"] \\ & A \cong k\langle X\rangle / T^{(r)} \end{tikzcd}$$

коммутативна, и потому идеал $\ker\theta \lhd U_L$ порождается элементами $h_j(e_1, \dots, e_n)$, где $h_j(e_1, \dots, e_n)$ — один из полиномов вида (4). Таким образом, мы имеем изоморфизмы

$$A \cong k\langle X\rangle / T^{(r)} \cong U_L / I.$$

Теорема 6.2. *Существует алгоритм, основанный на понятии базиса Грёбнера, который разрешает проблему принадлежности элемента идеалу в многообразии лиево нильпотентных алгебр фиксированного индекса.*

Доказательство. Мы будем использовать технику, введенную выше. Рассмотрим проблему принадлежности идеалу $B \lhd A$, порожденному конечным числом элементов $b_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi(b_i(x_1, \dots, x_n))$, $b_i(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$. Эта проблема может быть переформулирована как задача о принадлежности к идеалу $J \lhd U_L$, порожденному элементами $b_i(e_1, \dots, e_n) = \psi(b_i(x_1, \dots, x_n))$ и $h_i(e_1, \dots, e_n)$, $I \subseteq J$. Для решения последней достаточно построить базис Грёбнера идеала J и применить редукционный процесс относительно этого базиса. $\square$

Приложение

А. О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным

Известно, что многие результаты, полученные для ассоциативных *PI*-алгебр, в дальнейшем переносились на другие случаи, в частности, на случаи альтернативных или йордановых колец. Техника получения этих результатов состояла в переходе к ассоциативной алгебре (левых) умножений. Мы попытались сформулировать критерии асимптотической близости к ассоциативным кольцам и выделить некоторые основные понятия и конструкции.

Определения. Алгебра A имеет *ограниченную L-длину*, если при некотором k алгебра $L[A]$ ее левых умножений линейно представима множеством элементов вида $L(p_1)\dots L(p_q)$, где $q < k$, $L(x)$ — оператор левого умножения на x. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *неплохим*, если алгебра левых умножений любой конечно порожденной алгебры из этого многообразия 1) конечно порождена, 2) имеет ограниченную L-длину, 3) любая 1-порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$ ассоциативна, т.е. $\mathfrak{M}$ есть *эластичное многообразие* или *многообразие с ассоциативными степенями*. Эти условия означают близость ассоциативной алгебры $L[A]$ к исходной алгебре A, позволяя переносить утверждения, относящиеся к $L[A]$ на A. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *хорошим*, если оно неплохое, и 4) алгебра левых умножений любой конечно порожденной алгебры из этого многообразия является PI-алгеброй. Алгебра называется *представимой*, если она вкладывается в конечномерную алгебру над ассоциативно-коммутативным кольцом. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *Курошевым* если в нем положительно решается проблема Куроша, т.е. любая алгебраическая алгебра из $\mathfrak{M}$ локально конечна.

Любое многообразие ассоциативных PI-алгебр является Курошевым, а многообразие всех ассоциативных алгебр Курошевым не является (В силу наличия ненильпотентных конечно порожденных ниль-алгебр.)

Имеет место следующее

Предложение A.1. *а) В категории n-мерных представлений существует универсальный отталкивающий объект.*

б) Алгебра C представима тогда и только тогда, когда существует семейство идеалов $\{\mathcal{J}_i\}_{i\in I}$ и число $n\in\mathbb{N}$ такие, что 1) $\forall x\in C\ \exists i\in I$: $x\notin\mathcal{J}_i$; 2) $\dim C/\mathcal{J}_i\le n$.

Доказательство. Пункт б) непосредственно следует из п.а), который является известным утверждением. Приведем конструкцию универсального n-мерного над центром представления. Пусть $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ — базисные векторы. Умножение задается структурными коэффициентами C_{ij}^k: $\bar{e}_i\bar{e}_j = C_{ij}^k\bar{e}_k$. Каждой i-й образующей алгебры C поставим в соответствие элемент $\sum_j\lambda_{ij}\bar{e}_i$. Далее, на коэффициенты C_{ij}^k и λ_{ij} наложим соотношения, являющиеся следствиями из соотношений алгебры C. Сами эти коэффициенты считаем из фактора кольца коммутативных многочленов по указанным выше соотношениям. $\square$

Замечание. Отметим, что в классе n-мерных алгебр над полем, универсальный отталкивающий объект может не существовать даже в ассоциативном случае. В кольце, порожденном структурными константами могут появится делители нуля и нильпотенты. (См. [122], [123].)

Обозначения. Mon_r обозначает множество неассоциативных мономов степени r. $M^{(k)}$ — идеал, порожденный k-ми степенями элементов из M. Если J — идеал в C, то I_J есть идеал в $L[C]$, порожденный операторами умножения на элементы из J. Пусть $D\subseteq C$; $I_{D,s}$ обозначает идеал в $L[C]$, порожденный операторами левого умножения на элементы вида $W(t_1,\dots,t_k)$, где $W\in\mathrm{Mon}_k$, $k\le s$, и $\exists i$: $t_i\in D$. Если I — идеал в $L[C]$, то идеал $\mathcal{J}_I$ есть следующее множество $\{x\in C\colon \forall d\in\mathrm{id}(x)\quad L(d)\in I\}$. Через $g(r)$ обозначается количество образующих в алгебре левых умножений для $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ — свободной r-порожденной алгебры из $\mathfrak{M}$. $l(r)$ обозначает l-длину $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$. В силу условия конечной порожденности алгебры левых умножений, существует функция, обозначаемая $G_{\mathfrak{M}}(r)$, (или просто $G_(r)$) такая, что при $s>G(r)$ в r-порожденной алгебре C из $\mathfrak{M}\quad I_{D,s}\ni I_{\mathrm{id}(D)}$.

Из свойств конечной порожденности алгебр левых умножений следует

Предложение А.2. *Существует функция $h(r)$ такая, что $L[\mathfrak{M}_\mathfrak{r}]$ порождается операторами левого умножения на мономы степени не выше $h(r)$ от образующих алгебры $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$.* $\square$

Предложение А.3. *Если I — идеал в $L[C]$ коразмерности k, то коразмерность идеала $\mathcal{J}_I$ не превосходит $k \cdot N$, где N — число неассоциативных мономов степени не выше $G(r+1)$, r — число образующих в алгебре C.*

Доказательство. Из условия конечной порожденности алгебры левых умножений следует, что $x \in \mathcal{J}_I$, если $L(d) \in I$ для любого неассоциативного монома d степени не выше $G(r+1)$, в который входит x. Поэтому коразмерность $\mathcal{J}_I$ не превосходит произведения коразмерности I на число таких мономов. $\square$

Теорема А.4. *а) Пусть $\mathfrak{M}$ — неплохое многообразие, $C \in \mathfrak{M}$ — к.п. алгебра. Тогда представимость C равносильна представимости $L[C]$.*

б) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее, $C \in \mathfrak{M}$ — полупервичная алгебра, то C представима.

в) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее, $C \in \mathfrak{M}$ — простая алгебра, то C конечномерна.

С другой стороны, всякая конечномерная первичная алгебра проста.

г) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее, и алгебра $C \in \mathfrak{M}$ не имеет идеалов с ненильпотентным фактором, то C проста.

д) Если многообразие $\mathfrak{M}$ хорошее, и любая простая алгебра из $\mathfrak{M}$ не имеет базиса, составленного из нильпотентных элементов, то в $\mathfrak{M}$ положительно решается проблема Куроша. Более того, если C однородна и конечно порождена, то $\exists M \subset C \colon \forall k$ алгебра $C/M^{(k)}$ нильпотентна.

е) Решетка первичных идеалов обладает свойством обрыва как возрастающих, так и убывающих цепей.

Доказательство. Пункт а) следует из предыдущих предложений. Пункты в), г) следуют из б), пункты д) и е) следуют из предыдущих пунктов. Докажем пункт б). В алгебре $L[C]$ найдется последовательность идеалов $\{I_\alpha\}$, пересечение которых лежит в радикале $R(L[C])$, при этом каждый фактор $L[C]/I_\alpha$ вкладывается в алгебру $m \times m$ матриц для некоторого m, общего для всех I_α. Соответствующая последовательность идеалов $\mathcal{J}_{I_\alpha}$ в C обладает тем свойством, что каждый фактор $C/\mathcal{J}_{I_\alpha}$ вкладывается в алгебру, имеющую размерность над центром не выше некоторого числа m'. Если $x \in \cap \mathcal{J}_{I_\alpha}$, то $L(x) \in R(L[C])$ и $x \in R(C)$. Но в силу первичности алгебры C, $R(C) = 0$. Осталось воспользоваться предложением А.1. $\square$

Пусть $q(n)$ — степень нильпотентности $C/M^{(n)}$, s — число образующих алгебры C. Через $I(M,n)$ обозначается идеал в алгебре $L[A]$, порожденный элементами вида $L(t_1)\dots L(t_n)$ такими, что $\exists m \in M \colon \forall i \quad t_i = m^{k_i}$ (элемент $m \in M$ общий для всех t_i). Из определения неплохого многообразия вытекает

Предложение А.5. *Оператор $L(x^q)$ при некотором q порождает собственный идеал в алгебре $L[B]$ тогда и только тогда, когда x^t при некотором t порождает собственный идеал в B.* $\square$

Следующее предложение связано с комбинаторикой в неплохих многообразиях. Оно так же позволяет переходить от алгебры к ее алгебре левых умножений и обратно.

Предложение А.6. *а)* $L[A]/I_{M^{(k)}}$ *нильпотентно степени не выше* $q(k)\cdot l(s+1)$.

б) $\mathrm{Id}(D)\supseteq I_{D,r}$, *и при* $r\geq h(s+1)$ *для всех* D *имеет место равенство* $Id(D)=I_{D,r}$.

в) При достаточно больших k *(при* $k>g(r+1)$*) справедливо включение* $I_{M^{(k)},s}\subseteq I(M,n)\quad (k>K(|M|,n,s))$.

г) При $n>k\cdot l(2)$ *имеет место обратное включение* $I(M,n)\subseteq I_{M^{(k)},s}$.

Доказательство. а) Элемент из $L[A]^t$ лежит в идеале, порожденном операторами левого умножения на элемент из $L[A^{t/l(s)}]$. Если $t/l(s)\geq q(k)$, то $A^{t/l(s)}\supseteq M^{(k)}$.

б) Включение $\mathrm{Id}(D)\supseteq I_{D,r}$ очевидно. Обратное включение при $r\geq h(s+1)$ следует из предложения А.2.

в) Пусть $z\in id(m^k)$. Закодируем элемент m^k новой буквой m'. $L[z]$ лежит в идеале, порожденном мономами степени не выше $G(s+1)$ от образующих A и буквой m'. Пусть z' – такой моном. Теперь подставим m^k вместо m' и получим моном w (от образующих алгебры и буквы m).

Оператор $L(w)$ линейно представим произведениями вида $\prod L(w_i)$, где степень каждого w_i не превосходит $h(s+1)$ (алфавит состоит из s образующих алгебры и элемента m). Назовем *мономом первого рода* моном w_i, содержащий букву, отличную от m и *мономом второго рода* моном без таких букв. Количество мономов первого рода не превосходит $G(s+1)-1$ и все вместе они содержат не более $(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)$ вхождений буквы m. Таким образом, имеется не менее $k-(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)$ вхождений буквы m в мономы второго рода.

Оператор умножения на моном второго рода линейно представим произведением мономов второго рода степени не выше $h(2)$ (нужна буква m и то, к чему применяются операторы). Следовательно, можно считать, что количество операторов второго рода не меньше, чем $\frac{k-(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)}{h(2)}$. Поскольку мономов первого рода не более $G(s+1)-1$, то найдется участок, состоящий из не менее чем $\frac{k-(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)}{h(2)(G(s+1)-1)}$ операторов умножений на мономы второго рода, идущих подряд. Таким образом, при $k>n\cdot h(2)\cdot(G(s+1)-1)+(h(s+1)-1)(G(s+1)-1)$ имеет место требуемое включение $I_{M^{(k)},s}\subseteq I(M,n)$.

г) Заметим, что в переработке выражений $x\cdot L[w_1]\cdots L(w_n)$, где w_i – степени m, участвуют два символа — m и x. Поэтому результат п.г) следует из ограниченности L-длины алгебры, порожденной элементами x и m величиной$l(2)$. □

Пусть число n больше степени тождества, выполняющегося в $L[A]$. Применив предыдущее предложение и лемму о перекачке, получим следующее утверждение.

Лемма А.7. *Пусть* C *— к.п. градуированная PI-алгебра из хорошего многообразия,* $M\subset C$ *— конечный набор однородных элементов такой, что* $\forall k$ *факторалгебра* $C/M^{(k)}$ *нильпотентна. Тогда существуют число* H *и конечное множество* $D(M)$ *такие, что алгебра* $L[C]$ *линейно представима элементами вида* $t_1t_2\cdots t_k$, *где* $k<H$, *и либо* $t_i\in D$, *либо* $\exists m_i\in M$ *такое, что* $t_i=L(x_{i1})L(x_{i2})\cdots L(x_{ij})$, *где (при фиксированном* i*) все* $x_{i\alpha}$ *являются степенями одного и того же* m_i. □

Из условия ограниченности L-длины вытекает следующее

Предложение A.8. *Пусть все x_α являются степенями элемента m. Тогда произведение $L(x_1)L(x_2)\cdots L(x_j)$ линейно представимо элементами вида $L(y_1)L(y_2)\cdots L(y_\lambda)$, где $\lambda \le l(1)$, и все y_α являются степенями элемента m.* □

Определение A.9. Алгебра C имеет *существенную высоту* H над множеством M, называемым s-базисом C, если существует конечное множество $D(M)$ и число N такие, что C линейно представима элементами вида $Q(t_1,\dots,t_l)$, где $Q \in \mathrm{Mon}_l$, $l \le H$, и $\forall i$ либо $t_i \in D$, либо $\exists m_i \in M$, $k_i \in \mathbb{N}$: $t_i = m_i^{k_i}$, причем количество $t_i \notin D$ не превосходит H. Если при некотором H можно положить $D = \varnothing$, то M — базис Ширшова алгебры C. Это равносильно выполнению еще одного условия: M порождает C как алгебру.

Из предложения A.8 получается такое

Следствие A.10. *Пусть* $\mathrm{Var}(B)$ *– хорошее многообразие, $Y \subset B$ – конечный набор элементов, Y' есть конечное подмножество B, состоящее из степеней элементов из Y. Тогда если $L[B]$ имеет ограниченную существенную высоту над множеством $\{L[y]|y \in Y'\}$, то B имеет ограниченную существенную высоту над Y.*

□

Замечание. Понятия алгебраичности, сильной алгебраичности и разреженного тождества определяются аналогично.

Следующая теорема вытекает из леммы A.7 и предложения A.8.

Теорема A.11 (А. Я. Белов). *Пусть C — конечно порожденная градуированная PI-алгебра из хорошего многобразия, $M \subset C$ — конечный набор однородных элементов. Тогда если $\forall k$ алгебра $C/M^{(k)}$ нильпотентна, то C имеет ограниченную высоту над M. Если же M порождает C как алгебру, то M — базис Ширшова C.* □

Замечание. Предыдущая теорема будет выполняться, даже если отказаться от условия ассоциативности 1-порожденных алгебр. В этом случае в определении существенной высоты условие $\exists m_i \in M : t_i = m_i^{k_i}$ заменяется на условие представимости t_i в виде монома от одного элемента из M.

Следствие A.12. *Пусть C — к.п. градуированная PI-алгебра из хорошего многообразия, $M \subset C$ — конечный набор однородных элементов. Тогда M является s-базисом тогда и только тогда, когда каждый простой фактор алгебры C содержит ненильпотентный образ элемента из M.* □

Воспользовавшись конечномерностью простых алгебр из хороших многообразий, получаем

Следствие A.13. *Пусть $\mathfrak{M}$ — хорошее многообразие такое, что любая простая алгебра из $\mathfrak{M}$ не имеет базиса, составленного из нильпотентных элементов. Пусть C — однородная конечно порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. Тогда C имеет ограниченную высоту над некоторым конечным множеством M.* □

Теорема A.11 допускает обобщение на неоднородный случай.

Определение A.14. Множество $M \subset A$ называется *курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$.

В ассоциативной ситуации это было сделано выше. Была установлена следующая

Теорема A.15 (А. Я. Белов). *Пусть A — PI-алгебра, $M \subseteq A$ — курошево подмножество в A. Тогда M — s-базис алгебры A.*

Из данной теоремы а также следствия A.10 получается окончательный результат:

Теорема A.16 (А. Я. Белов). *Пусть C — алгебра из хорошего многообразия, $M \subseteq A$ — курошево подмножество в C. Тогда M — s-базис алгебры C.* □

В ряде работ доказывается асимптотическая близость тех или иных алгебр к ассоциативным. При этом, по сути дела, доказывается свойство многообразия "быть хорошим". Условия конечной порожденности алгебр левых умножений для альтернативных или йордановых алгебр проверяется непосредственно. В работе [141] показана ограниченность l-длины к.п. йордановых алгебр, в работе [163] — для альтернативных. В работе [163] показано, что алгебра левых умножений альтернативной или специальной йордановой к.п. *PI*-алгебры является *PI*-алгеброй. Наконец, Ю.Медведев [110] показал справедливость условия (4) для к.п. йордановых *PI*-алгебр. Тем самым было установлено, что любая альтернативная или йорданова *PI*-алгебра порождает хорошее многообразие.

В работе [163] также показано, что любое многообразие альтернативных *PI*-алгебр является курошевым. Для к.п. альтернативной *PI*-алгебры степени m множество слов M степени не выше m^2 является курошевым (и однородным). В [59] установлена Курошевость многообразия йордановых *PI*-алгебр степени m, при этом множество слов степени не выше m^2 является Курошевым. Таким образом, имеет место

Следствие A.17. *а) Пусть A — к.п. градуированная ассоциативная (альтернативная, йорданова) PI-алгебра, $M \subset A$ — конечный набор однородных элементов, порождающий A как алгебру, $M^{(k)}$ — идеал, порожденный k-ми степенями элементов из M. Тогда если $\forall k$ факторалгебра $A/M^{(k)}$ нильпотентна, то A имеет ограниченную высоту над M.*

б) Пусть B — альтернативная или йорданова к.п. PI-алгебра степени m. Тогда B имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше m^2. □

Имеет место следующее

Предложение A.18. *Пусть B — алгебра Кэли—Диксона над произвольным полем. Тогда некоторое слово длины не выше двух от образующих B не нильпотентно.* □

Из данного предложения, теоремы A.11 и теоремы A.4 вытекает

Теорема А.19. *Пусть B — относительно свободная альтернативная алгебра, M — некоторое множество (неассоциативных) слов от ее образующих. Тогда M является базисом Ширшова (s-базисом) алгебры B тогда и только тогда, когда M является базисом Ширшова (s-базисом) фактора B по ассоциаторному идеалу.* □

Комбинаторно-асимптотические понятия и результаты переносятся на хорошие многообразия. Сложность многообразия $\mathfrak{M}$ определяется как класс простых алгебр, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Разреженное тождество определяется как в разделе **??**.

Теорема А.20. *Пусть $\mathfrak{M}$ — хорошее многообразие. Тогда*

а) существенная высота представимой алгебры, если она существует, равна размерности Гельфанда—Кириллова самой алгебры, а также равна существенной высоте и размерности Гельфанда—Кириллова ее алгебры левых умножений;

б) в каждой к.п. алгебре из $\mathfrak{M}$ выполняется тождество сильной алгебраичности, а также естественный аналог тождества Капелли. Поэтому ее алгебра правых умножений тоже PI;

в) Радикал Джекобсона $J(B)$ (т.е. максимальный идеал, состоящий из квазиобратимых элементов) существует, совпадает с нильрадикалом и в случае, когда алгебра $B \in \mathfrak{M}$ конечно порождена, нильпотентен.

справедливы аналоги теорем Амицура и Брауна;

г) если каждая простая алгебра из $\mathfrak{M}$ имеет центр, то справедлив полный аналог теории размысловских многочленов. В частности, локализация первичной алгебры по центру конечномерна над центром, и первичная алгебра вкладывается в алгебру, конечномерную над центром. Размерность Гельфанда—Кириллова есть степень трансцендентности центра.

д) Однородные компоненты тождеств образуют алгебраический идеал. Справедлив аналог теоремы **??** *и предложения* **??**.

д) При некотором n любой T-идеал, порожденный многочленами соответствующая диаграмма Юнга которых содержит квадрат $n \times n$, принадлежит $\mathrm{T}(\mathfrak{M})$. □

Мы не приводим доказательства этой теоремы, равно как и определения некоторых участвующих в ней понятий, в силу полной аналогичности ассоциативному случаю.

А.1. Вопросы и замечания

Интересно получить описание базисов Ширшова в лиевом и йордановом случаях. Известно, что простая йорданова алгебра — это либо алгебра квадратичной формы, либо неспециальная алгебра HC_3, либо алгебра матриц с операцией $A \circ B = AB + BA$. В первом случае образующие могут быть нильпотентными, но тогда все слова длины два — нет. В последнем случае (см. следствие 2.87) множество мономов такое, что для каждого правильного слова u длины не выше размера матриц n найдется моном из этого множества, у которого при раскрытии скобок получается старший член u, является базисом Ширшова. Поэтому для улучшения оценок в результате Е. И. Зельманова [59] достаточно провести вычисления в алгебре HC_3. Но в любом случае ограничение на степень слов будет не более чем $\max(m/2, \mathrm{const})$. Отметим, что в силу возможности разных расстановок скобок, указанное условие на множество йордановых (лиевых) мономов является достаточным, но не необходимым. В этой связи встает вопрос об описании множеств мономов, являющихся базисами Ширшова. При этом, в силу теоремы А.19 достаточно только следует проверять только условие “курошевости”. По всей видимости, последнее как-то связано с тензорными рангами выражений. Было бы очень важно прояснить эту связь.

Известно, что все простые PI (λ, δ)-алгебры ассоциативны. Поэтому возникает вопрос: будет ли многообразие PI (λ, δ)-алгебр хорошим?

Легко видеть, что к.п. энгелева алгебра Ли порождает неплохое многообразие. Можно ли непосредственно доказать, что оно хорошее? Для этого достаточно оценить сверху порядок роста коразмерностей как $o(n)!$. Тогда получится другое доказательство ее нильпотентности (известный результат Е. И. Зельманова).

Будет ли алгебра, хорошая слева, хорошей справа? В случае характеристики нуль?

Замкнут ли класс неплохих (хороших) многообразий в к.п. случае относительно тензорного произведения? В общем случае? Поскольку тензорное произведение ассоциативных PI-алгебр снова PI, то алгебра левых умножений в тензорном произведении хороших многообразий снова PI. Кроме того, ясно, что тензорное произведение алгебр A и B с ограниченной L-длиной снова имеет ограниченную L-длину; а если алгебры $L[A]$ и $L[B]$ конечно порождены, то $L(A \otimes B)$ также конечно порождено. Однако верно ли это для свободного объекта из многообразия $\mathrm{Var}(A \otimes B)$?

При решении проблемы Куроша мы потребовали, чтобы выполнялось условие отсутствия нильбазиса у простой алгебры. Оно выполняется в ассоциативном, йордановом и альтернативном случаях. С другой стороны, конечная алгебра Ли порождает хорошее многообразие с нильбазисом. Интересно получить какие-нибудь общие критерии отсутствия нильбазиса. Нельзя ли в условии следствия А.13 заменить это условие на более слабое условие отсутствия простых нильалгебр?

Б. О теореме Нагаты—Хигмана для полуколец

Полукольцом называется множество, снабженное операциями сложения и умножения. Операция сложения коммутативна и связана с умножением законом дистрибутивности. Специфика полуколец состоит в отсутствии вычитания и в наличии ядра у операции сложения. Можно рассматривать полукольца-алгебры над ассоциативно-коммутативным полукольцом Φ. Любое полукольцо является алгеброй над $\mathbb{N}$. Мы будем рассматривать только ассоциативные полукольца с нулем.

Если в полукольце выполнено тождество вида

$$x_1 \dots x_m = \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}, \quad \text{где } \alpha_\sigma \in \Phi, \tag{5}$$

то выполняется теорема о высоте. Однако, в отличие от случая колец, наличие даже полилинейного тождества не влечет наличия тождества вида (5). В качестве примера рассмотрим полукольцо, порожденное образующими относительно свободной алгебры. Имеет место следующее

Предложение Б.1. *Пусть A — относительно свободная ненильпотентная алгебра, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\mathfrak{A})$, $a_1, \dots, a_s$ — образующие A, R — полукольцо, порожденное a_i. Тогда некоторое слово v есть линейная комбинация в R*

других слов в том и только в том случае, когда оно равно другому слову w, и эта комбинация состоит из одного слова w.

Доказательство. В относительно свободной алгебре любое соотношение является тождеством, а в силу ненильпотентности сумма коэффициентов при членах тождества должна равняться нулю. С другой стороны, все коэффициенты в линейной комбинации из R суть натуральные числа. $\square$

Если взять несколько матриц общего положения размера 2×2 или выше, то они порождают абсолютно свободную полугруппу, поэтому указанное выше равенство невозможно, если многообразие $\mathfrak{M}$ имеет сложность, большую единицы, и алгебра A рассматривается над бесконечным полем (т.е. $\mathfrak{M}$ имеет сложность, большую единицы, в смысле пункта **??**). Имеем следующее

Следствие Б.2. *Пусть A удовлетворяет условиям предыдущего предложения и* $\mathrm{PIdeg}(\mathfrak{M}) > 1$ *(в смысле определения из пункта* **??***). Тогда никакое слово не представимо в R в виде линейной комбинации других слов. В частности, в R не выполняется теорема о высоте.* $\square$

Пусть в полукольце S выполняется тождество вида $f = 0$. "Частичная линеаризация" f может не выполняться. (Например, в многообразии полуколец, порожденном тождеством $x^3 = 0$, не выполняется тождество $x^2y + xyx + yx^2 = 0$.) Однако выполняется полная линеаризация f по каждой из переменных. Имеет место следующее

Предложение Б.3. *Пусть в полукольце S выполнено тождество $f(t,x) = 0$. (Через t обозначается набор переменных, отличных от x.) Пусть f — полином степени m по x. Тогда в S выполняется $\tilde{f}$ — полная линеаризация f по переменной x.*

Доказательство. Для случая колец мы бы записали равенство

$$\tilde{f} = f(t, x_1 + \cdots + x_m) - \sum_i f(t, x_1 + \cdots + \widehat{x}_i + \cdots + x_m) +$$
$$+ \sum_{i<j} f(t, x_1 + \cdots + \widehat{x}_i + \cdots + \widehat{x}_j + \cdots + x_m) - \cdots + (-1)^{m-1} \sum_k f(t, x_k).$$

(Знак $\widehat{\ }$, как обычно, означает, что соответствующий член опускается.)

Однако в полукольцах вычитания нет, и мы это равенство запишем по другому

$$\tilde{f} + \sum_i f(t, x_1 + \cdots + \widehat{x}_i + \cdots + x_m) +$$
$$+ \sum_{i<j<k} f(t, x_1 + \cdots + \widehat{x}_i + \cdots + \widehat{x}_j + \cdots + x_m) + \ldots =$$
$$= f(t, x_1 + \cdots + x_m) + \sum_{i<j} f(t, x_1 + \cdots + \widehat{x}_i + \cdots + \widehat{x}_j + \cdots + x_m) + \ldots .$$

Остается заметить, что если f — тождество, то все члены этого равенства, кроме, быть может, $\tilde{f}$, равны нулю. Но тогда и $\tilde{f}$ равно нулю. $\square$

Следствие Б.4. *Из тождества $x^m = 0$ в полукольцах следует тождество $\sum_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} = 0$.* □

Замечание. а) Отметим, что в доказательстве данного предложения ассоциативность не использовалась.

б) Поскольку нет вычитания, в полукольцах работают с правой и левой частями равенства. Равенство $x = y$ проверяют обычно так: показывают равенство $x + z = y + t$, а затем убеждаются в том, что $z = t = 0$ (равенство нулю существенно!).

Теперь все готово к доказательству теоремы Нагаты—Хигмана для полуколец.

Теорема Б.5. *Пусть A — l-порожденное полукольцо, в котором выполняется тождество $x^m = 0$. Тогда A нильпотентна степени не выше $2l^{m+1}m^3$.*

Доказательство. Докажем, что все слова указанной длины нулевые. Предположим противное и возьмем лексикографически минимальное ненулевое слово v длины $2l^{m+1}m^3$. В силу результатов главы 2, каждое такое слово либо m-разбиваемо, либо содержит m-ю степень подслова. Поэтому слово v m-разбиваемо и имеет вид $v = v_0 v_1 v_2 \dots v_m$, где $v_1 \succ v_2 \succ \dots \succ v_m$. Тогда для любого $\sigma \in S_m \setminus \mathrm{id}$ слово $v_\sigma = v_0 v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(m)}$ лексикографически меньше v и, в силу минимальности v, равно нулю. Имеем

$$v = v_0 v_1 v_2 \dots v_m = v_0 (v_1 v_2 \dots v_m + \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(m)}) =$$

$$= v_0 (\sum_\sigma v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(m)}) = v_0 \cdot 0 = 0.$$

Получили противоречие с выбором v. Теорема Нагаты—Хигмана для полуколец доказана. □

Замечание. Интересно было бы обобщить эту теорему для подходящего класса неассоциативных полуколец, в частности йордановых и альтернативных.

Случай полуколец с некоммутативным сложением Если R — кольцо, то в силу дистрибутивности $(x + y - x - y)z = (x + y)(z - z) = 0$. Поэтому $(x + y)z = (y + x)z$ и некоммутативность сложения неинтересна. В полукольцах такие выкладки не всегда удается произвести. Кроме того, в случае некоммутативного сложения нет линеаризации. Следующее предложение позволяет осуществлять обходной маневр.

Предложение Б.6. *Пусть $x + y = y + x' = 0$. Тогда при всех a и b $ax + bx = bx + ax$ и $xa + xb = xb + xa$.*

Доказательство. $0 = (a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$. С другой стороны, $bx + ax + ay + by = bx + a(x + y) + by = b(x + y) = 0$. Поэтому $bx + ax + (a + b)y = ax + bx + (a + b)y$. Прибавив справа $(a + b)x'$, получим требуемое равенство. Равенство $xa + xb = xb + xa$ доказывается аналогично. □

Из данного предложения и теоремы Нагаты—Хигмана для случая коммутативного сложения вытекает

Следствие Б.7. *Если W — слово длины $2l^{m+1}m^3$, $x + y = y + x' = 0$, то $Wx = xW = Wx' = x'W = 0$.* □

Пусть выполняется тождество $x^m = 0$. Рассмотрим выражения $(x_1 + \cdots + x_m)^m$ и $(x_m + \cdots + x_1)^m$. Раскроем в них скобки (вначале скобку первого сомножителя, потом — второго и т.д., в конце — m-го). Получим две суммы $\sum_{i=1}^{m^m} v_i$ и $\sum_{i=1}^{m^m} v'_i$, равные нулю и состоящие из m^m членов — всевозможных произведений x_i. При этом $v'_i = v_{m^m - i}$. (Если переписать в одной сумме слагаемые в обратном порядке, то получится другая сумма). Положим $s_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$, $s'_k = \sum_{i=m^m-(k-1)}^{m^m} v'_i$, $r_k = \sum_{i=k}^{m^m} v_i$, $r'_k = \sum_{i=1}^{m^m-1} v'_i$. Имеем $s_k + r_k = r'_k + s'_k = 0$, $s_k + v_k = s_{k+1}$, $v_{k-1} + r_k = r_{k-1}$, $v_k + s'_k = s'_{k+1}$, $r'_k + v_{k-1} = r'_{k-1}$.

Лемма Б.8. *Пусть длина слова W не меньше $k \cdot 2l^{m+1}m^3$. Тогда $Ws_k = Wv_k = Wr_k = Ws'_k = Wr'_k = 0$. То же верно и для правого умножения W на s_k, r_k, s'_k, r'_k и v_k.*

Доказательство. В силу симметрии, достаточно проверить равенства нулю Ws_k, Wr_k и Wv_k. Воспользуемся индукцией по k. Базу для $k = 1$ дает следствие Б.7. В силу равенства $s_k + r_k = 0$, достаточно проверить равенство нулю Wr_k. Положим $W = uW'$, где $|u| = 2l^{m+1}m^3$, $|W'| \geq (k-1) \cdot 2l^{m+1}m^3$. По индукционому предположению $W's_{k-1} = W'v_{k-1} = W'r_{k-1} = W's'_{k-1} = W'r'_{k-1} = 0$. Таким образом, $W's_k = W's'_k = W'v_k$ и $W'v_k + W'r_k = W's_k + W'r_k = W'(s_k + r_k) = 0$. Аналогично $W'r'_k + W's'_k = W'r'_k + W'v_k = W'r'_k + W's_k = 0$. Остается положить $x = W'r_k$, $y = W's_k$, $x' = W'r'_k$ и воспользоваться предыдущим предложением. □

Следствие Б.9. (Теорема Нагаты—Хигмана для полуколец общего вида.) *Если в l-порожденном полукольце выполнено тождество $x^m = 0$, то любое слово длины, большей $m^m \cdot 2l^{m+1}m^3 + m$, равно нулю.*

Доказательство. Индекс k меняется от 1 до m^m. Произведение слова длины $m^m \cdot 2l^{m+1}m^3$ на любой член любой суммы $\sum_{i=1}^{m^m} v_i$ равно нулю. □

Замечание. а) Используя степени частичных сумм и соображения симметрии, оценку легко можно улучшить до $m! \cdot l^{m+1}m^3 + m$. Интересно было бы получить экспоненциальную (по m) оценку.

б) Мы пользовались наличием нуля. Иначе операция сложения имела бы ядро, и наши рассуждения не прошли бы. Существует не локально конечное полукольцо с тождеством $x^2 = x^3$ (оно строится с помощью свободного от квадратов сверхслова из трех букв).

в) Мы пользовались двусторонней дистрибутивностью. Без нее даже в случае коммутативного сложения произведение сумм невозможно превратить в сумму произведений, и наши рассуждения не проходят. Вероятно, для почти колец (колец с односторонней дистрибутивностью) теорема Нагаты—Хигмана не верна.

Литература

1. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах // Москва, Наука, 1975. — 336 с.

2. *Адян С. И., Разборов А. А.* Периодические группы и алгебры Ли // Успехи мат. наук. — 1987. — *42*, б 2. — С. 2–68

3. *Адян С. И., Разборов А. А.* Экспоненциальная нижняя оценка степени нильпотентности алгебры Ли // Мат. заметки. — 1988. — *39*, б 3. — С. 444–452

4. *Ананьин А. З.* Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия алгебр // Алгебра и логика. — 1977. — *16*, б 1. — С. 3–23 (РЖМат, 1977, 11А304)

5. *Ананьин А. З.* Представимость к.п. алгебр с условием обрыва. *XIX* Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. Львов, 1987. — С. 7

6. *Ананьин А. З.* Локальная конечность некоторых алгебр // Алгебра и логика. — 1979. — *18*, б 1. — С. 3–8 (РЖМат, 1979,)

7. *Ананьин А. З., Кемер А. Р.* Многообразия ассоциатвных алгебр, решетки подмногообразий которых дистрибутивны // Сиб. мат. ж. — 1976. — *17*, б 4. — С. 723–730

8. *Андруанкиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Алгебры без квазирегулярных подалгебр // ДАН СССР. — 1984. — *275*, б 3

9. *Андруанкиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория // Москва, Наука, 1979

10. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. — М.: Мир, 1972.

11. *Бабенко И. К.* Проблемы роста и рациональности в алгебре и топологии // Успехи мат. наук. — 1986. — *41*, б 2. — С. 96–142

12. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли // Москва, Наука, 1985. — 448 с.

13. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождество // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1988 — *18*. — С. 117–240

14. *Бейдар К. И.* К теоремам А. И. Мальцева о матричных представлениях алгебр // Успехи мат. наук. — 1986. — *41*, б 5. — С. 161–162

15. *Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Ассоциативные кольца // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНИТИ. — 1984. — *22*. — С. 3–115 (РЖМат,

16. *Белов А. Я.* О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n // Мат. сб. — 1988. — *135*, б 31. — С. 373–384 (РЖМат, 1988, 7А252)

17. *Белов А. Я.* Теорема о высоте для йордановых и лиевых *PI*-алгебр // Сиб. школа по многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Барнаул, 1988. — С. 12–13

18. *Белов А. Я.* Оценка для высоты и размерности Гельфанда—Кириллова ассоциативных *PI*-алгебр // Международная конф. по алгебре памяти А. И. Мальцева. Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск, 1989. — С. 21

19. *Белов А. Я.* О рациональности ряда Гильберта свободных алгебр в многообразиях сложности 1 // VI Всесоюзн. школа по теории многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Магнитогорск, 1990. — С. 7–8

20. *Белов А. Я.* О конечно–определенных полугруппах с нецелой размерностью Гельфанда–Кириллова // VI симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы. — Львов, 11–13 сент. 1990. — С. 19

21. *Белов А. Я., Кондаков Г. В.* Обратные задачи символической динамики // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 1. — С. 71–79

22. *Белов А. Я.* Теорема Нагаты–Хигмана для полуколец // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 2. — С. 523–527

23. *Бокуть Л. А., Львов И. В., Харченко В. К.* Некоммутативные кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1988 — *18*. — С. 5–116

24. *Бокуть Л. А., Кукин Г. П.* Неразрешимые алгоритмические проблемы для полугрупп, групп и колец // Итоги науки и техн. Алгебра, Топология, Геометрия. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1987 — *25*. — С. 3–66

25. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1964. — 566 с. (РЖМат, 1965, 4А116К)

26. *Борисенко В. В.* О матричных представлениях конечно определенных алгебр, заданных конечным множеством слов // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1985. — б 4. — С. 75–77 (РЖМат, 1985, 11А290)

27. *Борисенко В. В.* О тождествах n-мерных алгебр некоторых многообразий // Успехи мат. наук. — 1986. — *39*, б 4. — С. 151–152

28. *Вайс А. Я., Зельманов Е. И.* Теорема Кемера для конечно порожденных йордановых алгебр // Изв. Высш. уч. зав., Математика. — 1989. — б 6. — С. 63–72

29. *Вайс А. Я.* О нормальных многообразиях алгебр Ли // XIX Всес. алгебр. конференция. — Львов, 9–11 сент. 1987 г.: 1987. — С. 48

30. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с. (РЖМат, 1968, 3А312К)

31. *Гатева-Иванова Т.* О сложности многообразия, порожденного тензорным произведением алгебр // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1980. — б 2. — С. 47–50

32. *Гельфанд И. М., Кириллов А. А.* О телах, связанных с обертывающими алгебрами алгебр Ли // Докл. АН СССР. — 1966. — *167*, б 3. — С. 503–505 (РЖМат, 1966, 8Б477)

33. *Генов Г. К.* Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем // Алгебра и логика. — 1981. — *20*, б 4. — С. 365–388

34. *Генов Г. К., Сидеров П. Н.* Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем //*I*, *II*. Сердика. — 1982., б 8. — С. 313–323 ,. — С. 351–366

35. *Генов Г. К.* Некоторые шпехтовы многообразия ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981., б 2. — С. 30–40

36. *Герасимов В. Н.* Дистрибутивные решетки подпространств свободной ассоциативной алгебры // Алгебра и логика. — 1976. — *15*, б 4. — С. 384–435

37. *Говоров В. Е.* О градуированных алгебрах // Мат. заметки. — 1972. — *12*, б 2. — С. 197–204 (РЖМат, 1972, 12А326)

38. *Говоров В. Е.* О размерности градуированных алгебр // Мат. заметки. — 1973. — *14*, б 2. — С. 209–216 (РЖМат, 1974, 1А392)

39. *Голод Е. С., Шафаревич И. Р.* О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — *28*, б 2. — С. 261–272 (РЖМат, 1964, 9А219)

40. *Голод Е. С.* О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — *28*, б 2. — С. 273–276 (РЖМат, 1964, 9А220)

41. *Горбатенко Е. М.* О базисе Гребнера идеала во внешней алгебре // *VI* симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы. — Львов, 11–13 сент. 1990. — С. 40–41

42. *Григорчук Р. И.* К проблеме Милнора о групповом росте // Функц. анал. и его прил. — 1980. — *14*, б 1. — С. 53–54

43. *Григорчук Р. И.* К проблеме Милнора о групповом росте // Докл. АН СССР. — 1983. — *271*, б 1. — С. 53–54 (РЖМат, 1983, 11А249)

44. *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, б 5. — С. 939–985 (РЖМат, 1984,

45. *Григорчук Р. И.* О рядах Гильберта-Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами // Мат. сб. — 1989. — *180*, б 2. — С. 207–225

46. *Губеладзе И. Д.* Гипотеза Андерсона и максимальный класс моноидов, над которыми проективные модули свободны // Мат. сб. — 1988. — *135*, б 2. — С. 169–185 (РЖМат, 1988, 6А382)

47. *Гришин А. В.* Асимптотические свойства свободных конечно порожденных алгебр некоторых многообразий // Алгебра и логика. — 1983. — *22*, б 6. — С. 608–625 (РЖМат, 1984, 11А172)

48. *Гришин А. В.* Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — *26*, б 5. — С. 536–557 (РЖМат, 1988, 8А264)

49. *Гришин А. В.* О конечной базируемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — *54*, б 5. — С. 899–927

50. *Гришин А. В.* Бесконечно базируемое T-пространство над полем характеристики 2 // Междунар. конфер. по алгебре и анализу, посв. 100-летию со дня рожд. Н. Г. Чеботарева. 5–11 июня 1994 г. Тез. докл. — Казань: НГУ, 1982. — С. 29

51. *Джекобсон Н.* Строение колец. — М.: ИЛ, 1961. — 392 с.

52. Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник — 4-е изд. — Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993. — 73 с.

53. *Дренски В. С.* О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. — 1974. — *13*, б 3. — С. 265–290

54. *Дубнов Я. С., Иванов В. К.* О понижении степени аффинорных полиномов // Докл. АН СССР. — 1943. — *41*, б 3. — С. 99–102

55. *Егорычев Г. В.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм // Москва, Наука, 1977

56. *Желваков К. А., Шестаков И. П.* О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — *12*, б 2. — С. 41–73

57. *Желваков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978. — 431 с.

58. *Зайцев М. В.* Представимость ассоциативных алгебр со слабыми тождествами // VI симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы. — Львов, 11–13 сент. 1990. — С. 56

59. *Зельманов Е. И.* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. ж. — 1982. — *23*, б 6. — С. 100–116 (РЖМат, 1983, 6А260)

60. *Зельманов Е. И.* О некоторых проблемах теории групп и алгебр Ли // Мат. сб. — 1989. — *180*, б 2. — С. 159–167

61. *Зельманов Е. И.* Решение ослабленой проблемы Бнрнсайда для групп нечетного показателя // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990., б 1. — С. 42–59

62. *Зельманов Е. И., Кострикин А. И.* Теорема о сендвичевых алгебрах // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1990. — *183*. — С. 106–111 (РЖМат, 1991, 1А247)

63. *Зубрилин К. А.* О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 2. — С. 409–430

64. *Иыуду Н. К.* Алгоритмическая разрешимость проблемы распознавания делителей нуля в одном классе алгебр // Фунд. и прикл. матем. — 1995. — *1*, б 2. — С. 541–544

65. *Иыуду Н. К.* Стандартные базисы и распознаваемость свойста алгебр, заданных копредставлением // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук, — Москва, 1996. — 73 с.

66. *Кемер А. Р.* Замечание о стндартном тождестве // Мат. заметки. — 1978. — *23*, б 5. — С. 753–757

67. *Кемер А. Р.* Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно порожденной *PI*-алгебры // Докл. АН СССР. — 1980. — *225*, б 4. — С. 793–797 (РЖМат, 1981, 4А242)

68. *Кемер А. Р.* О нематричных многообразиях // Алгебра и логика. — 1980. — *19*, б 3. — С. 255–283

69. *Кемер А. Р.* О разложении многообразий // Алгебра и логика. — 1981. — *20*, б 4. — С. 395–418

70. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, б 5. — С. 1042–1059

71. *Кемер А. Р.* Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — *26*, б 5. — С. 597–641

72. *Кемер А. Р.* Представимость приведенно-свободных алгебр // Алгебра и логика. — 1988. — *27*, б 3. — С. 274–294 (РЖМат, 1989, 5А166)

73. *Кемер А. Р.* Нематричные многообразия, многообразия со степенным ростом и конечно порожденные *PI*-алгебры // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук, — Новосибирск, 1981. — 105 с.

74. *Кемер А. Р.* Идеалы тождеств ассоциативных алгебр // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук — Барнаул, 1988. — 126 с.

75. *Кириллов А. А.* О тождествах в алгебрах Ли векторных полей // Вестн. МГУ. Сер. 1. — 1989. — б 2. — С. 11–13 (РЖМат, 1989, 7А210)

76. *Кириллов А. А., Концевич М. Л., Молев А. И.* Алгебры промежуточного роста // Препр. / Ин-т прикл. мат. АН СССР. — 1983. — б 39. — 19 с. (РЖМат, 1983, 12А249)

77. *Кириллов А. А., Молев А. И.* Об алгебраической структуре алгебры Ли векторных полей // Препр. / Ин-т прикл. мат. АН СССР. — 1985. — б 168

78. *Кириллов А. А., Концевич М. Л.* Рост алгебры Ли, порожденной двумя общими векторными полями на прямой // Вестн. МГУ. Серия 1. — 1983. — б 4. — С. 15–20 (РЖМат,

79. *Кожухарь Е. П., Чекану Г. П.* О нильпотентности алгебр // 3 Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова. — Красноярск, 1993. — 155 с. (РЖМат, 1994, 9А190)

80. *Колотов А. Т.* Апериодические последовательности и функции роста алгебр // Алгебра и логика. — 1981. — *20*, б 2. — С. 138–154 (РЖМат, 1982, 2А238)

81. *Колотов А. Т.* Алгебры и полугруппы с квадратичными функциями роста // Алгебра и логика. — 1980. — *19*, б 6. — С. 659–669 (РЖМат, 1982, 2А238)

82. *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986. — 232 с.

83. *Красильников А. Н.* О тождествах алгебр Ли треугольных матриц над полем положительной характеристики // *VI* симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы. — Львов, 11–13 сент. 1990. — С. 76

84. *Кублановский С. И.* Локально финитно-аппроксимируемые и локально представимые многообразия ассциативных колец и алгебр // Ленингр. педагогич. ин–т., — Л:, 1982, деп. в ВИНИТИ 14.12.82, б 6143. — 78 с.

85. *Кузьмин Е. Н.* О теореме Нагаты-Хигмана // Труды, посвященные академику Ильеву. — София, 1975. — С. 101–107 (РЖМат,)

86. *Кукин Г. П.* О проблеме равенства для алгебр Ли // Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, б 5. — С. 1194–1197 (РЖМат, 1978, 6А302)

87. *Кукин Г. П.* Базы свободной алгебры Ли // Мат. заметки. — 1978. — *24*, б 3. — С. 375–382 (РЖМат, 1979, 3А262)

88. *Курош А. Г.* Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах // Изв. АН СССРсер. мат., — 1941. — *5*. — С. 233–240

89. *Латышев В. Н.* Обобобщение теоремы Гильберта о конечности базисов // Сиб. мат. ж. — 1966. — *7*, б 6. — С. 1422–1424

90. *Латышев В. Н.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1969. — *8*, б 6. — С. 660–673

91. *Латышев В. Н.* О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — *37*, б 5. — С. 1010–1037 (РЖМат, 1974, 2А272); English transl.: Math. USSR. Izvestija. — 1973. — *7*. — С. 1011–1038

92. *Латышев В. Н.* К теореме Регева о тождествах тензорного произведения *PI*-алгебр // Успехи мат. наук. — 1972. — *27*, б 4. — С. 213–214

93. *Латышев В. Н.* Конечная базируемость некоторых колец // Успехи мат. наук. — 1977. — *32*, б 4. — С. 259–262

94. *Латышев В. Н.* О сложности нематричных многообразий ассоциативных алгебр //*I*. Алгебра и логика. — 1977. — *16*, б 2. — С. 149–183

95. *Латышев В. Н.* Нематричные многообразия ассоциативных алгебр // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ. мат. наук, — Москва, 1977. — 150 с.

96. *Латышев В. Н.* Коммутативность *PI*-алгебр полиномиального типа // Алгебра. Сб. работ, посвящ. 90-летию со дня рожд. О. Ю. Шмидта. — М., 1982. — С. 86–94 (РЖМат, 1983, 4А276)

97. *Латышев В. Н.* Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. — М.: МГУ, 1988. — 67 с. (РЖМат, 1988, 12А356К)

98. *Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1972. — 564 с.

99. *Львов И. В.* О многообразиях ассоциативных колец // Алгебра и Логика. — 1973. — *12*, б 3. — С. 269–297 (РЖМат,

100. *Львов И. В.* К теореме Ширшова о высоте // Всес. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск: НГУ, 1982. — С. 57

101. *Львов И. В.* Теорема Брауна о радикале конечно порожденной *PI*-алгебры // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1984. — б 63. — 51 с. (РЖМат, 1985, 6А212)

102. *Мальцев А. И.* Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Мат. сб. — 1950. — *26*, б 3. — С. 19–33

103. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. — 1948. — *22*, б 2. — С. 351–352

104. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

105. *Мальцев А. И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Международный конгресс по математике. (Москва, 1966), — М.: 1968. — С. 217–231

106. *Мальцев Ю. Н.* Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц // Алгебра и Логика. — 1971. — *10*, б 4. — С. 393–400

107. *Мальцев Ю. Н., Кузьмин Е.Н.* Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем // Алгебра и Логика. — 1978. — *17*, б 1. — С. 28–32

108. *Марков В. Т.* О системах образующих T-идеалов конечно порожденных свободных алгебр // Алгебра и Логика. — 1979. — *18*, б 5. — С. 587–598 (РЖМат, 1980, 9А268); English transl.: Algebra and Logic. — 1980. — *18*. — С. 371–378

109. *Марков В. Т.* Ниль-радикалы конечно порожденных йордановых *PI*-алгебр // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1985. — б 24. — 30 с. (РЖМат, 1986, 6А398)

110. *Медведев Ю. А.* Ниль–радикалы конечног порожденных йордановых *PI*-алгебр // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1985. — б 24. — 30 с. (РЖМат, 1986, 6А398)

111. *Михалев А. А.* Теорема о свободе и проблема равенства для цветных суперaлгебр Ли с одним определяющим соотношением специального вида. 5 Сиб. конф. по многообразиям алгебр. систем. Тез. сообщ. Барнаул, 1988. — С. 48–51

112. *Михалев А. А.* Лемма о слиянии и проблема равенства для цветных супералгебр Ли // Вестн. МГУ. Серия 1. — 1989. — б 5. — С. 88–91 (РЖМат, 1990, 2А278)

113. *Михалев А. А.* Техника композиции А. И. Ширшова в супералгебрах Ли (некоммутативные базисы Гребнера) // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1994. — *18* (в печати)

114. *Мищенко С. П.* К проблеме Энгелевости // Мат. сб. — 1984. — *124*, б 1. — С. 56–67

115. *Мищенко С. П.* Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли // Мат. заметки. — 1990. — *47*, б 4. — С. 83–89 (РЖМат, 1991,

116. *Молев А. И.* О росте некоторых алгебр векторных полей // Успехи мат. наук. — 1986. — *41*, б 2. — С. 205–206

117. *Наджарян Н. Г.* О σ-порожденности линейных T-пространств // XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 197

118. *Новиков П. С., Адян С. И.* О бесконечных периодических группах //*I, II*. Изв. АН СССР.сер. мат., — 1968. — *32*, б 1. — С. 212–244 , б 2. — С. 251–254 , б 3. — С. 709–731

119. *Ольшанский А. Ю.* О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР.сер. мат., — 1970. — *34*, б 2. — С. 376–384

120. *Охитин С. В.* Базис пространства центральных многочленов алгебры матриц второго порядка над полем характеристики нуль // XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 209

121. *Петроградский В. М.* О некоторых типах промежуточного роста в алгебрах Ли // Успехи мат. наук. — 1993. — *48*, б 5. — С. 181–182 (РЖМат, 1994, 4А182)

122. *Пихтильков С. А.* О многообразии, порожденном n-мерными алгебрами // Тульский политех. ин–т., — Тула, 1980, деп. в ВИНИТИ 12.04.80, , б 1213. — 58 с.

123. *Пихтильков С. А.* Полиномиальные тождества алгебр, близких к конечномерным // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. мат. наук, — Москва, 1980. — 99 с.

124. *Поликарпов С. В., Шестаков И. П.* Неассоциативные афинные алгебры // Алгебра и логика. — 1990. — *29*, б 6. — С. 709–703

125. *Поликарпов С. В.* Свободные афинные алгебры Алберта // Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, б 6

126. *Поликарпов С. В.* О центрах конечно порожденных свободных алгебр в многообразиях, порожденных некоторыми простыми конечномерными неассоциативными алгебрами // XIX Всес. алгебр. конференция. — Львов, 9–11 сент. 1987 г.: 1987. — С. 225

127. *Попов А. П.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981., б 2. — С. 41–53

128. *Пустыльников ?. ?.* Совместное распределение дробных частей значений многочлена // Успехи мат. наук. — 1994. — *?*, б 4

129. *Пчелинцев С. В.* Теорема о высоте для альтернативных алгебр // Мат. сб. — 1984. — *124*, б 4. — С. 557–567 (РЖМат, 1984, 12А315)

130. *Размыслов Ю. П.* О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характреристики нуль // Алгебра и логика. — 1973. — *12*, б 1. — С. 83–113

131. *Размыслов Ю. П.* Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — *37*, б 3. — С. 483–501

132. *Размыслов Ю. П.* О радикале Джекобсона в *PI*-алгебрах // Алгебра и логика. — 1974. — *13*, б 3. — С. 337–360 (РЖМат, 1975, 4А299)

133. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — *38*, б 4. — С. 723–756

134. *Размыслов Ю. П.* О проблеме Холла–Хигмэна // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — *42*, б 4. — С. 833–847 (РЖМат, 1979, 1А246)

135. *Размыслов Ю. П.* Тождества алгебр и их представлений // — М.: Наука, 1989. — 432 с.

136. *Размыслов Ю. П.* Тождества Капелли и критерий их выполнимости в алгебрах // — в сб.: Алгебра. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1980. — С. 72–76

137. *Рябухин Ю. М.* О счетнопорожденных локально *PI*-алгебрах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — *40*. — С. 1203–1223

138. *Саломаа А.* Жемчужины формальных языков. — М.: Мир, 1986. — 159 с. (РЖМат, 1986, 5Г744К)

139. *Сапир М. В.* Проблемы бернсайдовского типа и конечная базируемость в многообразиях полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. — *51*, б 2. — С. 319–340 (РЖМат, 1987, 7А143)

140. *Сапир М. В.* Минимальное многообразие ассоциативных алгебр с неразрешимой проблемой равенства // Мат. сб. — 1989. — *180*, б 12. — С. 1691–1708 (РЖМат, 1990, 4А212)

141. *Скосырский В. Г.* Йордановы алгебры с условием минимальности для двусторонних идеалов // Препр. / Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1985. — б 21

142. *Стовба В. В.* О связи многообразий алгебр и супералгебр и рациональности рядов Гильберта некоторых многообразий супералгебр // XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 266

143. *Трофимов В. И.* Об одном признаке экспоненциального роста градутрованных алгебр // В кн.: Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем. — Свердловск, 1980. — С. 152–160

144. *Трофимов В. И.* Графы с полиномиальным ростом // Мат. сб. — 1984. — *123*, б 3. — С. 407–421

145. *Уфнаровский В. А.* О росте алгебр // Вестн. МГУ. Сер 1. — 1978. — б 4. — С. 59–65 (РЖМат, 1979, 1А331)

146. *Уфнаровский В. А.* О рядах Пуанкаре градуированных алгебр // Мат. заметки. — 1980. — *27*, б 1. — С. 21–32 (РЖМат, 1980, 5А370)

147. *Уфнаровский В. А.* Критерий роста графов и алгебр, заданных словами // Мат. заметки. — 1982. — *31*, б 3. — С. 465–472 (РЖМат, 1982, 7А428)

148. *Уфнаровский В. А.* Теорема о независимости и ее следствия // Мат. сб. — 1985. — *128*, б 1. — С. 124–132 (РЖМат, 1986, 1А419)

149. *Уфнаровский В. А.* Об использовании графов для вычисления базиса, роста и ряда Гильберта ассоциативных алгебр // Мат. сб. — 1989. — *180*, б 11. — С. 1548–1550 (РЖМат, 1990, 3А334)

150. *Уфнаровский В. А.* О правильных словах в смысле Ширшова // Междунар. конф. по алгебре памяти А .И. Мальцева. Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск, 1989. — С. 140

151. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1990 — *57*. — С. 5–177 (РЖМат, 1990, 7А338)

152. *Уфнаровский В. А., Чекану Г. П.* О нильпотентных матрицах // Матем. исследования, — Кишинев, 1995 — *85*. — С. 130–141

153. *Фейс К.* Алгебра: Кольца, модули и категории. — М.: Мир, тт. 1–2, 1977

154. *Харлампович О. Г.* Проблема равенства для разрешимых алгебр Ли и групп // Мат. сб. — 1989. — *180*, б 8. — С. 1033–1066 (РЖМат, 1990, 2А191)

155. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972. — 191 с.

156. *Чекану Г. П.* О локальной конечности алгебр // Мат. исслед. (Кишинев). — 1988. — б 105. — С. 153–171 (РЖМат, 1988, 12А245)

157. *Чекану Г. П.* К теореме Ширшова о высоте // XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 306

158. *Чекану Г. П.* Независимость и квазирегулярность в алгебрах // 3 Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова. — Красноярск, 1993. — С. 357 (РЖМат, 1994, 9А191)

159. *Чекану Г. П.* Независимость и квазирегулярность в алгебрах // Докл. Акад. наук. — 1994. — *337*, б 3. — С. 316–319

160. *Чекану Г. П.* Локально конечноые алгебры // Дисс. на соиск. ученой степени канд. физ. мат. наук. — Кишинев, 1982

161. *Чекану Г. П.* Независимость и локальная конечность // Дисс. на соиск. ученой степени хабилитат физ.мат. наук. — Кишинев, 1995. — 182 с.

162. Четвертая конференция Турнира Городов — Москва; 1994

163. *Шестаков И. П.* Конечно порожденные специальные йордановы и альтернативные *PI*-алгебры // Мат. сб. — 1983. — *122*, б 1. — С. 31–40 (РЖМат, 1984, 1А223)

164. *Ширшов А. И.* О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Мат. сб. — 1957. — *41*, б 3. — С. 381–394 (РЖМат, 1958, 164)

165. *Ширшов А. И.* О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. — 1957. — *43*, б 2. — С. 277–283 (РЖМат, 1958, 7544)

166. *Ширшов А. И.* О свободных кольцах Ли // Мат. сб. — 1958. — *45*, б 2. — С. 113–122 (РЖМат, 1959,

167. *Ширшов А. И.* О базах свободной алгебры Ли // Алгебра и логика. — 1962. — *1*, б 1. — С. 14–19

168. *Шмелькин А. Л.* Свободные полинильпотентные группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — *28*, б 1. — С. 91–122

169. Algebraic theory of mashins, languages and semigroups // — London–New York: Acad. Press, 1968 (Пер. на рус. яз.: Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. — М.: Статистика, 1975. — 336 с.

170. *Amitzur S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1950. — *1*. — С. 449–463

171. *Amitzur S.* The T-ideals of the free rings // Jour. Lond. Math. Soc. — 1955. — *30*. — С. 470–475

172. *Amitzur S.* A generalisation of Hilbert's Nullstensaltz // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — *8*, б 4. — С. 649–656

173. *Amitzur S.* Rational identities and aplications to algebra and geometry // J. of Algebra. — 1966. — *3*, б 3. — С. 304–359

174. *Amitzur S.* On central divison algebras // Israel J. Math. — 1972. — *12*, б 4. — С. 408–420

175. *Andrews G. E.* The Theorie of Partitions // Addison–Wesley, — 1976

176. *Anick D.* The smallest singularity of a Hilbert series // Math. scand. — 1982. — *51*. — С. 35–44

177. *Anick D.* Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // J. Algebra. — 1982. — *78*, б 1. — С. 120–140 (РЖМат, 1983, 3А354)

178. *Anick D.* On monomial algebras of finite global dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — *291*, б 1. — С. 291–310 (РЖМат, 1986, 7А394)

179. *Anick D.* Recent progress in Hilbert and Poincare series // Lect. Notes Math. — 1988. — *1318*. — С. 1–25 (РЖМат, 1988, 12А336)

180. *Artin M.* On Azumaya algebras and finite dimensional representation of rings // J. Algebra. — 1969. — *11*. — С. 532–563

181. *Backelin J.* On the rationality of some Hilbert sries I // Preprint Univ. Stockholm. — 1975., б 16.

182. *Belov A.* Some estimations for nilpotence of nil-algebras over field of an arbytrary characteristics and height theorem // Comm. in Algebra. — 1992. — *20*, б 10. — С. 2919–2922

183. *Belov A.* About height theorem // Comm. in Algebra. — 1995. — *23*, б 9. — С. 3551–3553

184. *Belov A., Gateva T.* Radicals of monomial algebras // Proceedings of Taivan-Moscow Algebra Workshop. to appear.

185. *Bergman G.* Centralizers in free associative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — *137*. — С. 327–344 (РЖМат, 1970, 2А242)

186. *Bergman G.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. — 1978. — *29*, б 2. — С. 178–218 (РЖМат, 1979, 3А238)

187. *Bergman G., Small L.* Degrees and prime ideals // J. of Algebra — 1975., б 3. — С. 435–462

188. *Berele A.* Magnum *PI* // Israel J. Math. — 1985. — *51*, б 1. — С. 13–19

189. *Birkhoff G.* On the structure of abstract algebras // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1935. — *37*, б 2. — С. 433–454

190. *Boerner H.* Representations of groups // Amsterdam: North–Holland publ. co., — 1963. — 325 с.

191. *Borho W., Kraft H.* Über die Gelfand-Kirillov dimension // Math. Ann. — 1976. — *220*, б 1. — С. 1–24 (РЖМат, 1977, 4А270)

192. *Braun A.* The radical in a finitely generated *PI*-algebras // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — *7*, б 2. — С. 385–386 (РЖМат, 1983, 3А248)

193. *Le Bruyn L.* The functional equations for Poincare series of trace rings of generic 2×2 matrices // Israel J. Math. — 1985. — *52*. — С. 355–360

194. *Buchberger B.* Grobner bases: An algoritmic method in polynomial ideal theory // Camp—bull. — 1983., б 83 (Пер. на рус. яз.: *Бухбергер Б.* Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов.)

195. *Cohn P.* Free rings and their relations. — London–New York: Acad. Press, 1971. — 346 с. (РЖМат, 1972, 11А105К). (Пер. на рус. яз.: *Кон П.* Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975. — 422 с. (РЖМат, 1976, 5А259К))

196. *Cojuchari E. P.* On independence and extremal elements // Proceedings of National conference in algebra. — Constanta, 1994

197. Computer algebra //Symbolic and algebraic computations. Wienn — New York: Springer–Verlag, — 1982 (Пер. на рус. яз.: Компьютерная алгебра. Сомвольные и алгебраические вычисления. — М.: Мир, 1986. — 392 с.)

198. *Curtis C. W., Reiner I.* Representation theory of finite groups and associative algebras // Interscience, 1962 (Пер. на рус. яз.: *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969. — 668 с.)

199. *Dehn M.* Über die Grundlagen der projectiven geometric und allgemeine zahlsisteme // Math. Ann. — 1922. — *85*. — С. 184–194

200. *Drensky V.* Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras // J. Algebra. — 1984. — *91*, б 1. — С. 1–17 (РЖМат, 1985, 5А262)

201. *Drensky V.* T-ideals, containing all matrix polinomial identities // Comm. in Algebra. — 1985. — *13*. — С. 2037–2072

202. *Drensky V.* On the Hilbert series of relatively free algebras // Comm. in Algebra. — 1984. — *12*, б 19. — С. 2335–2347

203. *Formanek E.* Central polynomials for matrix rings // J. Algebra. — 1972. — *23*. — С. 129–133

204. *Gateva-Ivanova T.* Noetherian properties of skew polynomial rings with binomial relations // Repts / Dep. Math. Univ. Stockholm. — 1991. — б 8. — С. 1–22 (РЖМат, 1992, 2A206)

205. *Gateva-Ivanova T.* Algorithmic determination of the Jacobson radical of monomial algebras // Lect. Notes Comput. Sci. — 1989. — б 378. — С. 355–364 (РЖМат, 1990, 7A173)

206. *Gateva-Ivanova T., Latyshev V.* On recognizable properties of associative algebras // J. Symb. Comput. — 1988. — *6*, б 2–3. — С. 371–388 (РЖМат, 1989, 8A251)

207. *Gelfand I. M., Kirillov A. A.* Sur les corps lies aux algébras enveloppantes des algébras de Lie // Publs. math. Inst. hautes étud. sci. — 1966. — *31*. — С. 509–523

208. *Golod E.* Standard bases and homology // Lect. Notes Math. — 1988. — *1352*. — С. 88–95 (РЖМат, 1989, 7A294)

209. *Grigutis R. A.* On nil-index of nill-algebra // Abstracts of Comm. of the $XXXIV$ conf of Lithuanian Math.Soc.— Vilnius, 1993. — С. 7–8 (РЖМат,)

210. *Grishin A. V.* On the finite basis property of T-spaces over field of finite characteristic // Proceedings of Taivan–Moscow Algebra Workshop. to appear.

211. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and extending maps // Publ. Math. inst. hautes etud. sci. — 1981. — *53*. — С. 53–73

212. *Gromov M.* Hyperbolic groups // Essays Group theory. — New York: e. a., 1987. — С. 75–263

213. *Haile D., Larson R., and Sweedler M.* A new invariant for $\mathbb{C}$ over $\mathbb{R}$: Almost invertible cohomology theory and the classificatin of idempotent cohomology class and algebras by partialy odered sets whith a Galois group action // Amer. J. of Math. — 1983. — *105*. — С. 689–814

214. *Hall M.* Combinatorial theory. — Waltham, Mass., Toronto–London: Blaisdell Publ. Co., 1967. — 310 с. (РЖМат, 1968, 3B248K) (Пер. на рус. яз.: *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — 424 с. (РЖМат, 1971, 1B262K))

215. *Higman G.* On a conjecture of Nagata // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1956. — *52*, б 1. — С. 1–4

216. *Higgins P.* Lie rings satysfying Engel condition // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1954. — *50*, б 1. — С. 8–15

217. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: *I*, *II* // Ann. Math. — 1964. — *79*. — С. 109–326

218. *Iltiakov A. V.* On finite basis of identities of Lie algebra representations // Nova Journ. Algebra Geometry. — 1992. — *1*, б 3

219. *Iltiakov A. V.* Representability of algebras and finitness of basis of identities // (в печати)

220. *Izmailov R. N., Vladimirov A. A.* Dimension of aliasing structures // Journ. of Appl. Math. and stoch. Analysis. (в печати)

221. *Jacobson N.* *PI*-algebras // Ring theory. — Proc. Ocla. conf., New York, 1974. — С. 1–30

222. *Jacobson N.* Structure theory of algebraic algebras of bounded degree // Ann. Math. — 1945. — *46*. — С. 695–707

223. *Justin J., Pirillo G.* Shirshov's theorem and ω-permutability of semigroups // Adv. Math. — 1991. — *87*, б 2. — С. 151–159 (РЖМат, 1992, 3А128)

224. *Kaplansky I.* Rings whith polinomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — *54*. — С. 575–580

225. *Kaplansky I.* Problems in the theory of rings // Report on a conference on linear algebras. NAS–NRS. — Washington, 1957 — *502*. — С. 1–3

226. *Kaplansky I.* Problems in the theory of rings //Revised. American Mathematical monthy. — 1970. — *77*, б 5. — С. 445–454

227. *Krause G. R., Lenagan T. H.* Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension. London: Pitman Adv. Publ. Program, 1985. — 182 с. (РЖМат, 1986, 6А355К)

228. *Kruse R.* Identities satisfied by a finite rings // J. Algebra. — 1973. — *26*, б 2. — С. 298–318

229. *Kuipers L., Niederreiter H.* Uniform Distribution of Sequences // John Wiley & Sons, — N.-Y. etc., 1974

230. *Latyshev V.* On the recognizable properties of associative algebras // Special vol. J.S.C.: On computational aspects of commutative algebras. London: Acad. Press, 1988. — С. 237–254

231. *Le Chenadec P.* Canonical forms in finetely presented algebras // Research Notes in Theoretical Computer Science, Pitman, 1986

232. *Leror U., Vapne A.* Polinomial identities of related rings // Israel J. of Math. — 1970. — *8*, б 2. — С. 127–137

233. *Levitzki J.* A problem of A. Kurosh // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — *52*. — С. 1033–1035

234. *Lewin J.* A matrix representation for associative algebras. I // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — *188*, б 2. — С. 293–308 (РЖМат, 1974, 11А317)

235. *Lewin J.* A matrix representation for associative algebras. II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — *188*, б 2. — С. 308–317 (РЖМат, 1974, 11А317)

236. *Lichtman A. I.* Growth in enveloping algebras // Isr. J. Math. — 1984. — *47*, б 4. — С. 297–304

237. *Luca A., Varricchio S.* Combinatorial properties of uniformly recurrent words and applications to semigroups // Int. J. of Algebra and Comput. — 1991. — *1*, б 2. — С. 227–245 (РЖМат, 1992, 8А142)

238. *Mikhalev A. A.* The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie p-superalgebras // Contemp. Math. — 1992. — *131*, б 2. — С. 91–104

239. *Milnor J.* Problem 5603 // American Mathematical monthy. — 1968. — *75*, б 6. — С. 675–686

240. *Mora F.* Greoebner bases for non-commutative polinomial rings // Proc. AAEECC3L.N. Comp. Sci, — 1986. — *229*. — С. 353–362

241. *Morse M., Hedlund G. A.* Symbolic dynamics *II*: Sturmian trajectories // Amer. J. of Math. — 1940. — *62*. — С. 1–42

242. *Nagata M.* On the nilpotency of nil algebras // J.Math.Soc.Japan. — 1948. — *54*. — С. 296–301

243. *Neuman B.* Varietes of groups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — *73*, б 5. — С. 603–613 (Пер. на рус. яз.: *Нейман Х.* Многообразия групп. — М.: Мир, 1969. —

244. *Okninski J.* On monomial algebras // Arch. Math. — 1987. — *45*. — С. 417–423

245. *Okninski J.* Semigroup algebras. — Marcel Dekker, 1991. — 357 с.

246. *Passi I. B. S.* Group Rings and their Augmentation Ideals // Springer Lecture Notes in Mathematics, — Berlin, Heidelberg, New York, 1979 — *715*

247. *Patterson E. M.* On the generators of nilpotent linear algebras // Quart. J. Math. — 1956. — *7*, б 25. — С. 17–23

248. *Procesi C.* Rings with polynomial identities, N.Y., 1973

249. *Procesi C.* Noncommutative affine rings // Lincei-Mem.Sc. fis., ecc., — 1967. — *8*, б 8. — С. 239–255

250. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. in math. — 1976. — *19*. — С. 306–381

251. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Capelli identities and representations of finite type // Comm. in Algebra. — 1994. — *22*, б 14. — С. 5733–5744

252. *Regev A.* Existence of identities in $A \otimes_F B$ // Israel J. Math. — 1972. — *11*, б 2. — С. 131–152

253. *Restivo A., Reutenauer C.* Some applications of a theorem of Shirshov to language theory // Inf. and Contr. — 1983. — *57*, б 2–3. — С. 205–213 (РЖМат, 1984, 10A291)

254. *Restivo A., Reutenauer C.* Rational languages and the Burnside problem // Theor. Comput. Sci. — 1985. — *40*, б 1. — С. 13–30 (РЖМат, 1986, 6A247)

255. *Robinson G. de B.* Representation theory of the symmetric groups // Edinburh: Univ. press, — 1961. — 204 с.

256. *Rowen L. H.* Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Acad. Press, 1980

257. *Shirayanagi K.* Algebras associated with LSGOP // J. of Algebra. — 1988. — *113*, б 2. — С. 318–338

258. *Shirayanagi K.* A classification of finite dimensional monomial algebras // In book: Effective Methods in Algebraic Geometry (T. Mora and C. Traverso eds.). Progr. in Math. Birkhäuser, 1991. — *94*. — С. 469–482

259. *Shirayanagi K.* Decision of Algebra Isomorphisms Using Gröbner Bases // In book: Computational algebraic geometry (F. Eyssette and A. Galligo eds.). Progr. in Math. Birkhäuser, 1993. — *109*. — С. 253–265

260. *Shirayanagi K.* On the Isomorphism Problem Finite-dimensional Binomial Algebras // Proc. Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation. (ISSAC'90) — 1990.. — С. 106–111

261. *Smith M. K.* Universal enveloping algebras with subexponential but not polynomially bounded growth // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — *60*. — С. 22–24

262. *Specht W.* Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — *52*. — С. 557–589

263. *Trofimov V. I.* The grouth function of finitely generated semigroups // Semigroup forum. — 1980. — *21*. — С. 351–360

264. *Vaughan–Lee M. R.* Varietes of Lie algebras // Quart. J. of Math. — 1970. — *21*, б 83. — С. 297–308

265. *Weyl H.* Über der gleichverteilung von zahlen *mod* 1 // Math. Ann. — 1916. — *77*. — С. 313–352

266. *Zelmanov E.* On the nilpotency of nilalgebras // Lect. Notes Math. — 1988. — *1352*. — С. 227–240 (РЖМат, 1989, 7A188)